

# ऊँचाई और दूरी

## Ex 8.1

### पाठ्यपुस्तक के प्रश्न

#### विविध प्रश्नमाला 8

प्रश्न 1. एक ऊर्ध्वाधर खम्भे की परछाई, खम्भे की ऊँचाई के बराबर है, तो सूर्य का उन्नयन कोण होगा

- (A)  $45^\circ$       (B)  $30^\circ$       (C)  $60^\circ$       (D)  $50^\circ$

प्रश्न 2. यदि एक मीनार के पाद बिन्दु से 100 मीटर की दूरी से उसके शिखर का उन्नयन कोण  $60^\circ$  है, तो मीनार की ऊँचाई है-

- (A)  $100\sqrt{3}$  मीटर      (B)  $\frac{100}{\sqrt{3}}$  मीटर  
(C)  $50\sqrt{3}$  मीटर      (D)  $\frac{200}{\sqrt{3}}$  मीटर

प्रश्न 3. 15 मीटर लम्बी एक सीढ़ी एक ऊर्ध्वाधर दीवार के शिखर तक पहुँचती है। यदि यह सीढ़ी दीवार के साथ  $60^\circ$  का कोण बनाती है, तो दीवार की ऊँचाई है

- (A)  $15\sqrt{3}$  मीटर      (B)  $\frac{15\sqrt{3}}{2}$  मीटर      (C)  $\frac{15}{2}$  मीटर      (D) 15 मीटर

प्रश्न 4. 10 मीटर ऊँची मीनार के शिखर से पृथ्वी पर एक बिन्दु का अवनमन कोण  $30^\circ$  है। बिन्दु की मीनार के आधार से दूरी है-

- (A)  $10\sqrt{3}$  मीटर      (B)  $\frac{10}{\sqrt{3}}$  मीटर      (C) 10 मीटर      (D)  $5\sqrt{3}$  मीटर

प्रश्न 5. एक नदी के ऊपर एक पुल नदी के तट के साथ  $45^\circ$  का कोण बनाता है। यदि नदी के ऊपर पुल की लम्बाई 150 मीटर हो तो नदी की चौड़ाई होगी-

- (A) 75 मीटर      (B)  $50\sqrt{2}$  मीटर      (C) 150 मीटर      (D)  $75\sqrt{2}$  मीटर

प्रश्न 6. दो खम्भों के शीर्ष, जिनकी ऊँचाई 20 मीटर तथा 14 मीटर है, एक तार से जुड़े हुए हैं। यदि तार क्षैतिज रेखा के साथ  $30^\circ$  का कोण बनाता है, तो तार की लम्बाई है

- (A) 12 मीटर (B) 10 मीटर (C) 8 मीटर (D) 6 मीटर

प्रश्न 7. यदि किसी मीनार के आधार से  $a$  तथा  $b$  ( $a > b$ ) दूरी पर उसी सरल रेखा पर स्थित दो बिन्दुओं से मीनार के शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः  $30^\circ$  व  $60^\circ$  हों तो मीनार की ऊँचाई है-

- (A)  $\sqrt{a+b}$  (B)  $\sqrt{a-b}$  (C)  $\sqrt{ab}$  (D)  $\sqrt{\frac{a}{b}}$

प्रश्न 8. 25 मीटर ऊँचे एक स्तम्भ के शीर्ष से एक मीनार के शीर्ष का उन्नयन कोण तथा मीनार के पाद का अवनमन कोण समान हो तो मीनार की ऊँचाई है-

- (A) 25 मीटर (B) 100 मीटर (C) 75 मीटर (D) 50 मीटर

प्रश्न 9. एक ऊर्ध्वाधर छड़ की लम्बाई तथा इसकी छाया की लम्बाई का अनुपात  $1 : \sqrt{3}$  हो तो सूर्य का उन्नयन कोण है

- (A)  $30^\circ$  (B)  $45^\circ$  (C)  $60^\circ$  (D)  $90^\circ$

प्रश्न 10. एक पहाड़ी का ढलान क्षैतिज से  $60^\circ$  का कोण बनाता है। यदि शिखर तक पहुँचने में 500 मीटर चलना पड़ता है, तो पहाड़ी की ऊँचाई है-

- (A)  $500\sqrt{3}$  मीटर (B)  $\frac{500}{\sqrt{3}}$  मीटर (C)  $250\sqrt{3}$  मीटर (D)  $\frac{250}{\sqrt{3}}$  मीटर

उत्तर-तालिका 1. (A) 2. (A) 3. (C) 4. (A) 5. (D) 6. (A) 7. (C) 8. (D) 9. (A) 10. (C)

प्रश्न 11. एक मीनार क्षैतिज समतल पर ऊर्ध्वाधर खड़ी है। यदि सूर्य का उन्नयन कोण  $30^\circ$  हो और मीनार की छाया की लम्बाई 45 मीटर हो तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

**हल:** माना कि मीनार की ऊँचाई  $PR = h$  मीटर है।

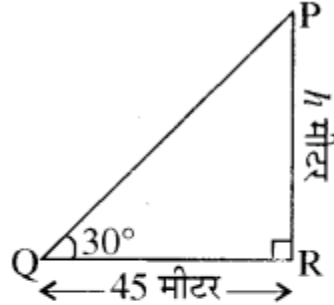
तथा मीनार की छाया  $QR$  की लम्बाई 45 मीटर है तथा सूर्य का उन्नयन कोण  $\angle RQP = 30^\circ$  है।

समकोण  $\triangle QRP$  में,

$$\text{अतः } \tan \theta = \frac{PR}{QR} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$$

$$\therefore \tan 30^\circ = \frac{h}{45}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{45} \left[ \because \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$$



वज्रगुणा करने पर  $\sqrt{3} \times h = 45$

$$\therefore h = \frac{45}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{45\sqrt{3}}{3}$$

$$h = 15\sqrt{3} \text{ मीटर उत्तर}$$

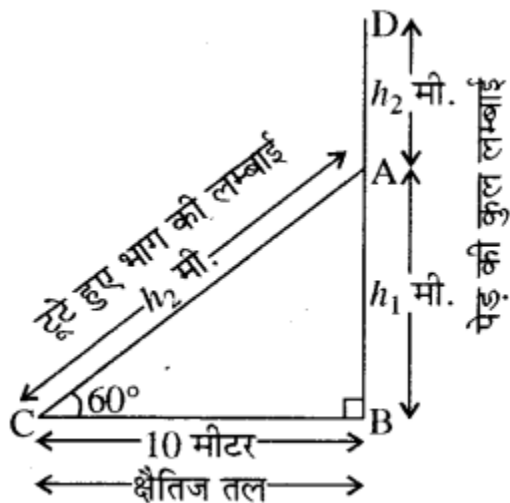
अतः मीनार की ऊँचाई  $15\sqrt{3}$  मीटर है।

**प्रश्न 12.** आँधी के कारण एक वृक्ष का ऊपरी भाग टूटकर क्षैतिज तल पर  $60^\circ$  का कोण बनाता है। वृक्ष का शिखर क्षैतिज तल पर वृक्ष की जड़ से 10 मीटर की दूरी पर मिलता है। टूटने से पहले वृक्ष की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। ( $\sqrt{3} = 1.732$ )

**हल:** माना कि वृक्ष के टूटने से पहले वृक्ष की ऊँचाई  $BD = h$  मीटर है।

आँधी के पश्चात्  $AD = AC =$  टूटे हुए वृक्ष के भाग की लम्बाई

अब समकोण त्रिभुज  $ABC$  में



$$\frac{AB}{BC} = \tan 60^\circ$$

$$\left[ \because \tan \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} \right]$$

या  $\frac{h_1}{10} = \frac{\sqrt{3}}{1}$

या  $h_1 = 10\sqrt{3}$  मीटर .....(i)

तथा  $\frac{BC}{AC} = \cos 60^\circ$   $\left[ \because \cos \theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} \right]$

या  $\frac{10}{h_2} = \frac{1}{2}$

या  $h_2 = 2 \times 10 = 20$  मीटर .....(ii)

$\therefore$  वृक्ष की कुल लम्बाई  $BD(h) = h_1 + h_2$

$$= 10\sqrt{3} + 20$$

$$= 10 \times 1.732 + 20$$

$$= 17.32 + 20$$

$$h = 37.32 \text{ मीटर}$$

अतः वृक्ष की कुल लम्बाई 37.32 मीटर है। उत्तर

**प्रश्न 13.** किसी अपूर्ण मीनार के आधार से 120 मीटर दूर किसी बिन्दु से। मीनार के शिखर का उन्नयन कोण  $30^\circ$  है। ज्ञात कीजिए कि मीनार को और कितना ऊँचा बनाया जाये जिससे उसी स्थान पर उसका उन्नयन कोण  $60^\circ$  हो जाये?

**हल:** माना कि मीनार को  $h_2$  मीटर ऊँचा बनाया जाये, जिससे उसी स्थान पर उसका उन्नयन कोण  $60^\circ$  हो जाये। साथ ही यह भी माना कि अपूर्ण मीनार की ऊँचाई  $h_1$  मीटर है। इस प्रकार पूरी मीनार की ऊँचाई  $h = h_1 + h_2$  है।

अब समकोण  $\triangle ABD$  से

$$\tan \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{DB}{AB}$$

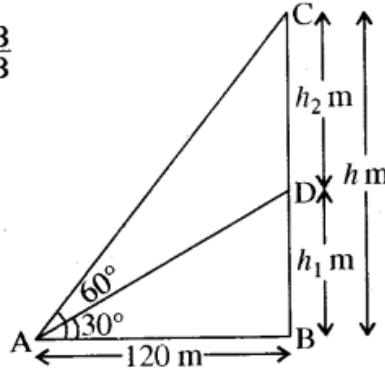
$$\therefore \tan 30^\circ = \frac{h_1}{120}$$

$$\text{या, } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h_1}{120}$$

$$\left[ \because \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$$

$$\text{या, } \sqrt{3} \times h_1 = 120$$

$$\text{या, } h_1 = \frac{120}{\sqrt{3}} \text{ मीटर}$$



दोनों तरफ (अंश व हर में)  $\sqrt{3}$  का गुणा करने पर

$$h_1 = \frac{120 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{120 \times \sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore h_1 = 40 \times \sqrt{3} = 40 \times 1.732$$

$$\text{या, } h_1 = 69.280 \text{ मीटर}$$

$$\therefore h_1 = 69.28 \text{ मीटर}$$

.....(i)

पुनः समकोण  $\triangle ABC$  से

$$\tan \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{h}{120}$$

$$\Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{h}{120}$$

$$\text{या, } \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h}{120}$$

$$\Rightarrow h = 120 \times \sqrt{3} = 120 \times 1.732$$

$$h = 207.840$$

$$\text{या } h = 207.84 \text{ मीटर}$$

.....(ii)

और ऊँची बनाए जाने वाली मीनार की ऊँचाई

$$(h_2) = h - h_1 \quad [\text{समीकरण (i) व (ii) से}]$$

$$= 207.84 - 69.28$$

$$= 138.56 \text{ मीटर}$$

अतः मीनार को 138.56 मीटर तक और ऊँचा किया जाना चाहिये। उत्तर

**प्रश्न 14.** एक मीनार के आधार से 100 मीटर दूरी पर स्थित बिन्दु से शिखर का उन्नयन कोण  $30^\circ$  है तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

**हल:** माना कि मीनार की ऊँचाई  $h$  मीटर है।

तथा मीनार के आधार B से 100 मीटर की दूरी पर स्थित C से मीनार के शिखर को उन्नयन कोण  $30^\circ$  है।

तब  $\angle BCA = 30^\circ$

∴ समकोण  $\triangle ABC$  से

$$\tan \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\text{या, } \tan 30^\circ = \frac{h}{100}$$

$$\text{या, } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{100} \left[ \because \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$$

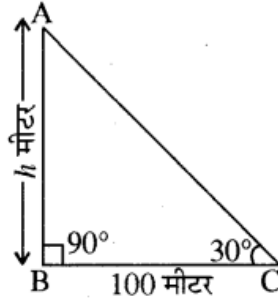
$$\text{या, } \sqrt{3} \times h = 100 \times 1$$

$$\therefore h = \frac{100}{\sqrt{3}}$$

अंश व हर में  $\sqrt{3}$  का गुणा करने पर

$$\begin{aligned} \therefore h &= \frac{100}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{100 \times \sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{100 \times 1.732}{3} = \frac{173.2}{3} \\ &= 57.73 \text{ मीटर} \end{aligned}$$

अतः मीनार की ऊँचाई 57.73 मीटर है। उत्तर



**प्रश्न 15.** किसी स्तम्भ की चोटी का उन्नयन कोण समतल पर स्थित एक बिन्दु से  $15^\circ$  है। स्तम्भ की ओर 100 मीटर चलने पर उन्नयन कोण  $30^\circ$  हो जाता है, तो स्तम्भ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। (जहाँ  $\tan 15 = 2 - \sqrt{3}$  है।)

**हल:** माना कि स्तम्भ की चोटी C का उन्नतांश कोण समतल पर बिन्दु O से  $15^\circ$  और बिन्दु A से  $30^\circ$  है, जहाँ  $OA = 100$  मी. है।।

$$\therefore \angle COB = 15^\circ \text{ और } \angle CAB = 30^\circ$$

$$\therefore \angle OCA = 15^\circ \text{ और } OA = AC = 100 \text{ मीटर}$$

[ $\because \triangle OAC$  समद्विबाहु त्रिभुज है]

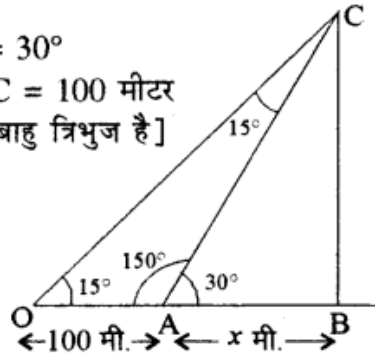
समकोण त्रिभुज CBA में,

$$\sin 30^\circ = \frac{BC}{AC}$$

$$\therefore BC = AC \sin 30^\circ$$

$$= 100 \times \frac{1}{2} = 50 \text{ मी.}$$

अतः स्तम्भ की ऊँचाई = 50 मीटर उत्तर

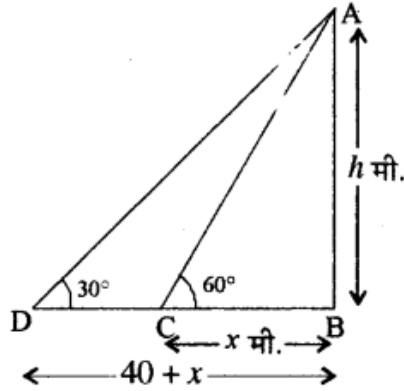


**प्रश्न 16.** एक समतल जमीन पर खड़ी मीनार की छाया उस स्थिति में 40 मीटर अधिक लम्बी हो जाती है जबकि सूर्य का उन्नतांश कोण  $60^\circ$  से घटकर  $30^\circ$  हो जाता है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

**हल:** माना कि AB की लम्बाई h मीटर है और BC, x मीटर है। प्रश्न के अनुसार DB, BC से 40 m अधिक लम्बा है।

अतः DB = (40 + x) m

यहाँ दो समकोण त्रिभुज ABC और ABD हैं।



$$\Delta ABC \text{ में } \tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$$

या  $\sqrt{3} = \frac{h}{x}$  .....(i)

$$\Delta ABD \text{ में } \tan 30^\circ = \frac{AB}{BD}$$

अर्थात्  $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+40}$  .....(ii)

समीकरण (i) से,

$$h = x\sqrt{3}$$

इस मान को समीकरण (ii) में प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{3}}{x+40}$$

$$(x\sqrt{3})\sqrt{3} = x + 40,$$

अर्थात्  $3x = x + 40$

अर्थात्  $x = 20$

$\therefore h = 20\sqrt{3} = 20 \times 1.732$

या  $h = 34.640$  मीटर

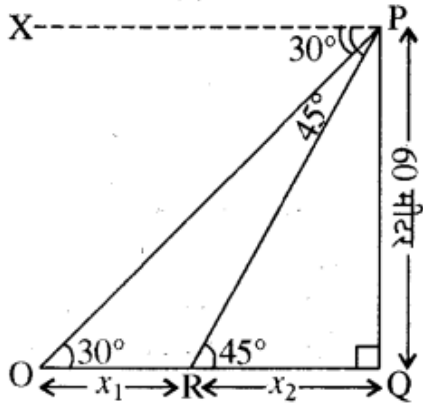
या  $h = 34.64$  मीटर

अतः मीनार की ऊँचाई 34.64 मीटर है। उत्तर

प्रश्न 17. समुद्र तल से 60 मीटर ऊँचे लाइट हाउस के शिखर से देखने पर दो समुद्री जहाजों के अवनमन कोण  $30^\circ$  व  $45^\circ$  हैं। यदि लाइट हाउस के एक ही ओर एक जहाज दूसरे जहाज के ठीक पीछे हो, तो जहाजों के मध्य दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि O और R जहाज A की दो स्थितियाँ हैं और प्रेक्षण की अवधि में जहाज द्वारा तय की गई दूरी  $x_1$  मीटर है।

माना प्रेक्षक बिन्दु P पर है और R से Q की दूरी  $x_2$  मीटर है। बिन्दु P से O और R के अवनमन कोण क्रमशः  $30^\circ$  और  $45^\circ$  हैं।



चित्र में  $OR = x_1$ ,  $RQ = x_2$

अब समकोण  $\Delta PQR$  में

$$\tan 45^\circ = \frac{PQ}{RQ} = \frac{60}{x_2}$$

या  $1 = \frac{60}{x_2}$

$\therefore x_2 = 60$  मीटर

पुनः समकोण  $\Delta PQO$  में

$$\tan 30^\circ = \frac{PQ}{OQ} = \frac{60}{OR + RQ}$$

या  $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{60}{x_1 + x_2}$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = 60\sqrt{3}$

$x_2$  का मान रखने पर

$$x_1 + 60 = 60\sqrt{3}$$

या  $x_1 = 60\sqrt{3} - 60 = 60(\sqrt{3} - 1)$

$$x_1 = 60(1.732 - 1)$$

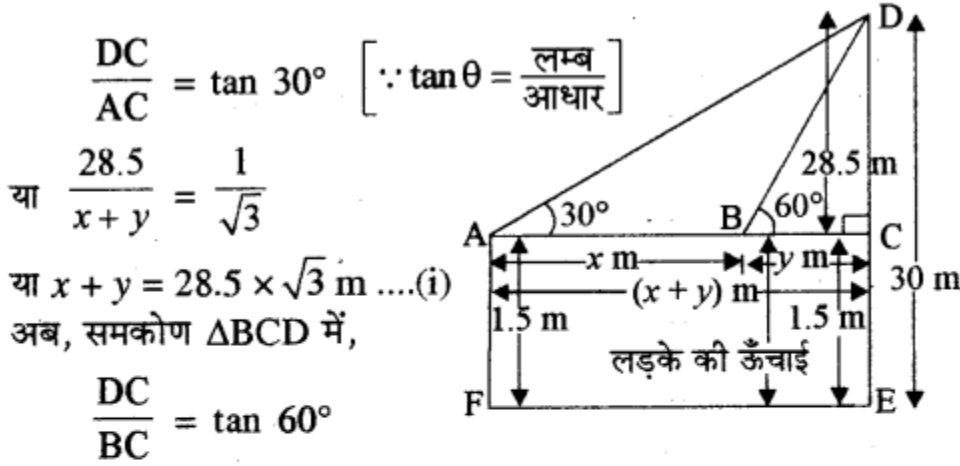
$$= 60 \times .732 = 43.92 \text{ मीटर}$$

अतः दोनों जहाजों के बीच की दूरी 43.92 मीटर है। उत्तर



प्रश्न 18. 1.5 मीटर लम्बा एक लड़का 30 मीटर ऊँचे एक भवन से कुछ दूरी पर खड़ा हो जब वह ऊँचे भवन की ओर जाता है तब उसकी आँख से भवन के शिखर का उन्नयन कोण  $30^\circ$  से  $60^\circ$  हो जाता है। बताइए कि वह भवन की ओर कितनी दूरी तक चलकर गया है?

हल: माना कि  $ED = 30$  m भवन की ऊँचाई है और  $EC = 1.5$  m लड़के की ऊँचाई है। विभिन्न स्थितियों में उन्नयन कोण क्रमशः  $30^\circ$  और  $60^\circ$  है। और यहाँ पर  $DC = DE - EC = 30 - 1.5 = 28.5$  m. समकोण  $\triangle ACD$  में,



$$\frac{DC}{AC} = \tan 30^\circ \quad \left[ \because \tan \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} \right]$$

$$\text{या } \frac{28.5}{x+y} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{या } x+y = 28.5 \times \sqrt{3} \text{ m} \dots (i)$$

अब, समकोण  $\triangle BCD$  में,

$$\frac{DC}{BC} = \tan 60^\circ$$

$$\text{या, } \frac{28.5}{y} = \sqrt{3} \quad \text{या } y = \frac{28.5}{\sqrt{3}}$$

अंश तथा हर में  $\sqrt{3}$  से गुणा करने पर

$$\text{या } y = \frac{28.5}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{28.5 \times \sqrt{3}}{3} \dots (ii)$$

$$\text{भवन की ओर चली गई दूरी} = AB = AC - BC$$

$$= (x+y) - y$$

$$= (28.5 \times \sqrt{3}) - \left( \frac{28.5}{3} \times \sqrt{3} \right) \text{ m}$$

[समीकरण (i) और (ii) का प्रयोग करने से]

$$= 28.5 \left( 1 - \frac{1}{3} \right) \sqrt{3} \text{ m}$$

$$= 28.5 \left( \frac{3-1}{3} \right) \sqrt{3} \text{ m}$$

$$= \left[ 28.5 \times \frac{2}{3} \right] \sqrt{3} \text{ m} = 19 \sqrt{3} \text{ m}$$

अतः, लड़के द्वारा भवन की ओर चली गई दूरी =  $19\sqrt{3}$  m उत्तर

प्रश्न 19. 7 मीटर ऊँचे भवन के शिखर से एक टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण  $60^\circ$  है और इसके पाद (Foot) का अवनमन कोण  $45^\circ$  है। टॉवर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि  $BD = h$  m केबल टॉवर की ऊँचाई है और  $AE = 7$  m भवन की ऊँचाई है। केबल टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण और पाद का अवनमन कोण क्रमशः  $60^\circ$  और  $45^\circ$  है।

अर्थात्  $\angle DEC = 60^\circ$   
 और  $\angle CEB = 45^\circ$   
 $BA \parallel EC, EA \parallel BC$   
 $\therefore EA = BC = 7$  m

समकोण  $\triangle BAE$  में,

$$\frac{AB}{AE} = \cot 45^\circ$$

या  $\frac{AB}{7} = 1$

या  $AB = 7$  m .....(i)

तथा समकोण  $\triangle DCE$  में,

$$\frac{EC}{DC} = \cot 60^\circ$$

या  $\frac{EC}{h-7} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

या  $EC = \frac{h-7}{\sqrt{3}}$  .....(ii)

परन्तु  $AB = EC$  (दिया है)

$$7 = \frac{h-7}{\sqrt{3}} \quad [\text{समीकरण (i) और (ii) के प्रयोग से}]$$

या  $7\sqrt{3} = h - 7$

या  $h = 7\sqrt{3} + 7 = 7(\sqrt{3} + 1)$  m

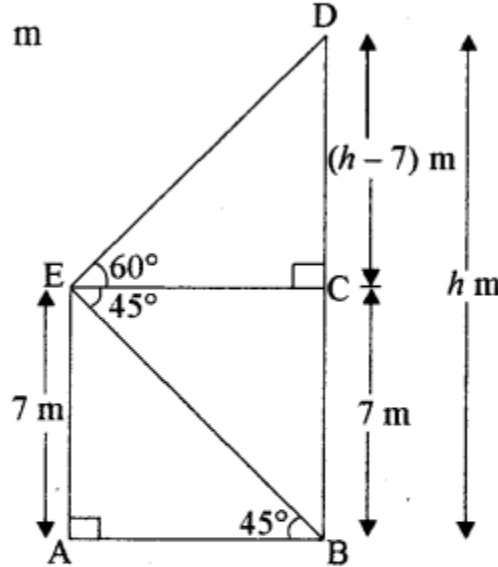
अतः केबल टॉवर की ऊँचाई =  $7(\sqrt{3} + 1)$  m उत्तर

या  $h = 7(1.732 + 1) = 7(2.732)$

या  $h = 19.124$

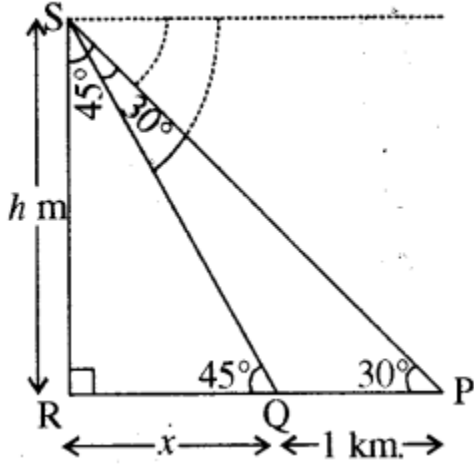
या  $h = 19.124$  m

अतः, केबल टॉवर की ऊँचाई = 19.124 m उत्तर



प्रश्न 20. एक पर्वत के शिखर से पूर्व की ओर स्थित दो बिन्दुओं से शिखर के अवनमन कोण  $30^\circ$  वे  $45^\circ$  हैं। यदि बिन्दुओं के बीच की दूरी 1 किमी. हो तो पर्वत की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि पर्वत के शिखर से पूर्व की ओर स्थित दो बिन्दुओं P और Q का अवनमन कोण क्रमशः  $30^\circ$  और  $45^\circ$  है। दोनों बिन्दुओं P और Q के बीच की दूरी 1 किमी. है।  
अब समकोण  $\triangle SRP$  में



$$\tan 30^\circ = \frac{h}{RP}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+1} \dots\dots(i)$$

अब समकोण  $\triangle SRQ$  में  $\tan 45^\circ = \frac{h}{RQ}$

या  $1 = \frac{h}{x}$

$\Rightarrow h = x \dots\dots(ii)$

समीकरण (i) में  $x$  का मान समीकरण (ii) से रखने पर

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{h+1}$$

$\Rightarrow h + 1 = \sqrt{3} \times h$

या  $1 = \sqrt{3}h - h$

$\Rightarrow h(\sqrt{3} - 1) = 1$

$$h = \frac{1}{(\sqrt{3} - 1)}$$

अंश तथा हर में  $(\sqrt{3} + 1)$  से गुणा करने पर

$$\Rightarrow h = \frac{1}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3})^2-1}$$

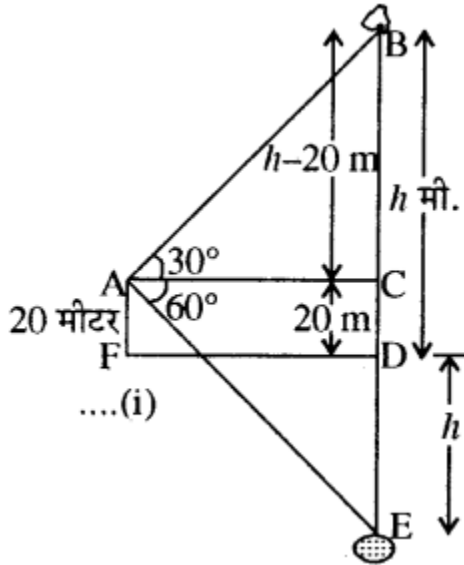
$$= \frac{1(\sqrt{3}+1)}{2} = \frac{1}{2}(1.732+1)$$

$$h = \frac{2.732}{2} = 1.366 \text{ किमी.}$$

अतः पर्वत की ऊँचाई = 1.366 किमी. है। उत्तर

प्रश्न 21. एक झील में पानी के तल से 20 मीटर ऊँचे बिन्दु A से एक बादल का उन्नयन कोण  $30^\circ$  है। यदि झील में बादल के प्रतिबिम्ब का बिन्दु A से अवनमन कोण  $60^\circ$  हो तो बिन्दु A से बादल की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: चित्रानुसार माना B बादल की स्थिति तथा E झील में बादल की परछाई है। AF = 20 मीटर झील से ऊँचाई है तथा माना बादल की झील से ऊँचाई h मीटर है। अब समकोण त्रिभुज ABC में



$$\cot 30^\circ = \frac{AC}{BC}$$

या  $AC = BC \cot 30^\circ$

या  $AC = (h - 20)\sqrt{3}$  ....(i)

पुनः  $\triangle ACE$  में

$$\tan 60^\circ = \frac{CE}{AC}$$

या  $AC = CE \cot 60^\circ$

या  $AC = (h + 20)\frac{1}{\sqrt{3}}$  .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) से

$$(h + 20)\frac{1}{\sqrt{3}} = (h - 20)\sqrt{3}$$

या  $h + 20 = 3h - 60$

या  $3h - h = 20 + 60$

या  $2h = 80$

$\therefore h = 40$  मीटर

अतः  $BC = BD - CD$   
 $= 40 - 20 = 20$  मीटर

पुनः समकोण  $\triangle BAC$  में

$$\sin 30^\circ = \frac{BC}{AB}$$

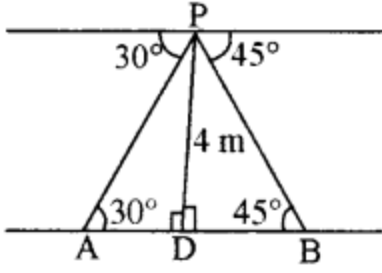
$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{20}{AB}$$

$$\Rightarrow AB = 40 \text{ मीटर}$$

अतः A से बादल की दूरी 40 मीटर है।

**प्रश्न 22.** एक नदी के पुल के एक बिन्दु से नदी के सम्मुख किनारों के अवनमन कोण क्रमशः  $30^\circ$  और  $45^\circ$  हैं। यदि पुल किनारों से 4 मीटर की ऊँचाई पर हो, तो नदी की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

**हल:** माना आकृति में A और B नदी के सम्मुख किनारों के बिन्दुओं को प्रकट करते हैं। जिससे कि AB नदी की चौड़ाई है। 4 m की ऊँचाई पर बने पुल पर एक बिन्दु P है अर्थात् DP = 4 m है। हम नदी की चौड़ाई ज्ञात करना चाहते हैं जो कि  $\triangle APB$  की भुजा AB की लम्बाई है।



अब  $AB = AD + DB$

समकोण  $\triangle APD$  में  $\angle A = 30^\circ$

अतः  $\tan 30^\circ = \frac{PD}{AD}$

अर्थात्  $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{AD}$  या  $AD = 4\sqrt{3}$  m

अतः समकोण  $\triangle PBD$  में  $\angle B = 45^\circ$  है।  $\therefore BD = PD = 4$  m

अब  $AB = BD + AD = 4 + 4\sqrt{3} = 4(1 + \sqrt{3})$  m

अतः नदी की चौड़ाई  $= 4(1 + \sqrt{3})$  m

$= 4(1 + 1.732)m = 4 \times 2.732$  मीटर

$= 10.928$  मीटर  $= 10.92$  मीटर

अतः नदी की चौड़ाई 10.92 मीटर है। उत्तर

**प्रश्न 23.** एक व्यक्ति एक जहाज के डैक जो पानी की सतह से 10 मीटर ऊँचा है, पर खड़ा है। यदि वह पहाड़ी के शिखर का उन्नयन कोण  $60^\circ$  तथा पहाड़ी के आधार का अवनमन कोण  $30^\circ$  देखता हो, तो जहाज से पहाड़ी की दूरी तथा पहाड़ी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

**हल:** माना कि एक पानी के जहाज के डैक, जो जल स्तर से 10 मीटर ऊँचा है, के ऊपर बिन्दु B से एक व्यक्ति एक पहाड़ी EC के शिखर बिन्दु C और पाद बिन्दु E के उन्नयन तथा अवनमन कोण क्रमशः  $60^\circ$  और  $30^\circ$  पाता है।

अतः हमें यहाँ पहाड़ी की ऊँचाई CE तथा जहाज से पहाड़ी की दूरी AE ज्ञात करनी है।  
समकोण  $\triangle CBD$  में

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{BD}$$

या  $\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h}{x}$   
[ $\because BD = AE = x$ ]

या  $h = \sqrt{3}x$  .....(i)  
अब समकोण  $\triangle BDE$  में

$$\tan 30^\circ = \frac{DE}{BD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{x}$$

$$[\because AB = DE = 10 \text{ मी.}]$$

या  $x = 10\sqrt{3}$  मीटर

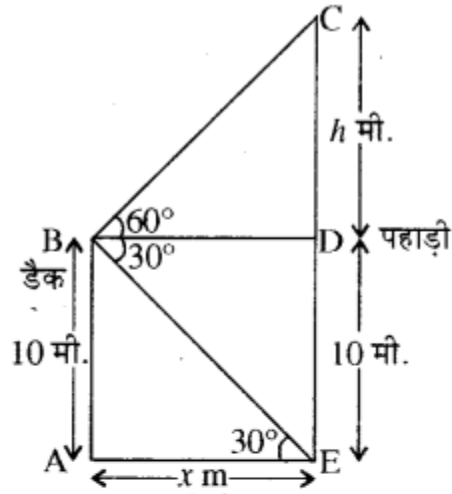
समीकरण (i) में  $x$  का यह मान प्रतिस्थापित करने पर

$$h = \sqrt{3} \times 10\sqrt{3} = 30 \text{ मीटर}$$

अतः पहाड़ी की ऊँचाई (CE) =  $10 + h = 10 + 30 = 40$  मीटर

और जहाज से पहाड़ी की दूरी =  $10\sqrt{3}$  मीटर

अतः जहाज से पहाड़ी की दूरी  $10\sqrt{3}$  मीटर तथा पहाड़ी की ऊँचाई 40 मीटर है। उत्तर



प्रश्न 24. एक 12 मीटर ऊँचा पेड़ तेज हवा से इस प्रकार टूट जाता है कि उसका शीर्ष जमीन को छूने लगता है और जमीन के साथ  $60^\circ$  का कोण बनाता है। ज्ञात करें कि तेज हवा से पेड़ जमीन से कितनी ऊँचाई से टूटा है। ( $\sqrt{3} = 1.732$ )

हल: माना कि 12 मीटर ऊँचा पेड़ BD, C बिन्दु से टूटा है।

अतः लटके हुए भाग AC की लम्बाई =  $(12 - h)$  मीटर

अब समकोण  $\triangle ABC$  से

$$\sin 60^\circ = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{या } \sin 60^\circ = \frac{h}{12-h}$$

$$\text{या } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{12-h}$$

$$\text{या } 2h = \sqrt{3}(12-h)$$

$$\text{या } 2h = 12\sqrt{3} - \sqrt{3}h$$

$$\text{या } h(2 + \sqrt{3}) = 12\sqrt{3}$$

$$\text{या } h = \frac{12\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$$

$$= \frac{12\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{4 - 3} = 12\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})$$

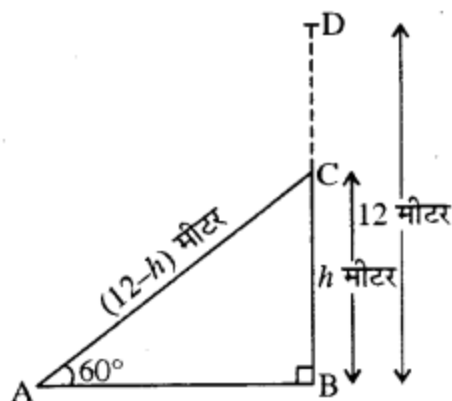
$$h = 24\sqrt{3} - 12\sqrt{3} \times \sqrt{3}$$

$$= 24\sqrt{3} - 36$$

$$= 24 \times 1.732 - 36$$

$$h = 41.569 - 36.000 = 5.569 \text{ मीटर}$$

अतः पेड़ 5.569 मीटर की ऊँचाई से टूटा है। उत्तर



**प्रश्न 25.** एक राजमार्ग एक मीनार के नीचे से होकर गुजरता है। एक आदमी मीनार के शिखर से एक कार को अवनमन कोण  $30^\circ$  पर देखता है। वह कार एक समान गति से मीनार के नजदीक आ रही है। 6 सेकण्ड के पश्चात् कार का अवनमन कोण  $60^\circ$  हो जाता है। कार कितने समय में मीनार के नीचे से गुजर जायेगी ?

**हल:** माना कि  $CD = h$  m मीनार क्षतिज स्तर की ऊँचाई है तथा 'A' कार की प्रारम्भिक स्थिति है और छः सेकण्ड के बाद कार B पर पहुँच जाती है। A और B पर कार के अवनमन कोण क्रमशः  $30^\circ$  और  $60^\circ$  हैं।  
पुनः माना कि कार की चाल  $v$  मीटर प्रति सेकण्ड है।

$\therefore$  दूरी = चाल  $\times$  समय

AB = कार द्वारा 6 सेकण्ड में तय की गई दूरी

AB =  $6v$  मीटर

तथा कार द्वारा मीनार तक पहुँचने में लिया गया समय 'n' सेकण्ड है।



∴ BC = nv मीटर

समकोण  $\triangle ACD$  में,

$$\frac{CD}{AC} = \tan 30^\circ$$

या,  $\frac{h}{6v + nv} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

या,  $h = \frac{6v + nv}{\sqrt{3}}$  .....(i)

तथा समकोण  $\triangle BCD$  में,

$$\frac{CD}{BC} = \tan 60^\circ$$

या,  $\frac{h}{nv} = \sqrt{3}$

या,  $h = nv (\sqrt{3})$  .... (ii)

समीकरण (i) और (ii) से,

$$\frac{6v + nv}{\sqrt{3}} = nv (\sqrt{3})$$

या,  $6v + nv = nv (\sqrt{3} \times \sqrt{3})$

या,  $6v + nv = 3nv$  या  $6v = 2nv$

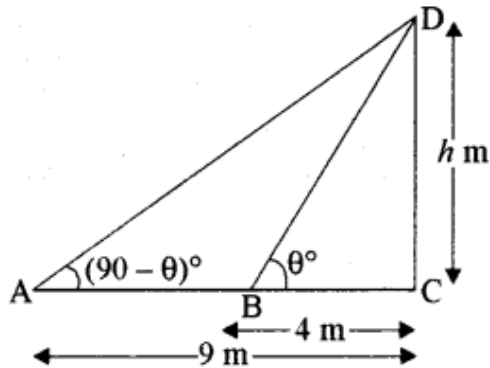
या,  $n = \frac{6v}{2v} = 3$

अतः मीनार के पाद तक पहुँचने में कार द्वारा लिया गया समय = 3 सेकण्ड

उत्तर

प्रश्न 26. मीनार के आधार से और एक सरल रेखा में 4 मीटर तथा 9 मीटर की दूरी पर स्थित दो बिन्दुओं से मीनार के शिखरे के उन्नयन कोण पूरक कोण हैं। सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई 6 मीटर है।

हल: माना कि  $CD = h$  m मीनार की ऊँचाई है और B, A अभीष्ट बिन्दु हैं जो मीनार से क्रमशः 4 m और 9 m की दूरी पर हैं।



समकोण त्रिभुज BCD में

$$\tan \theta = \frac{CD}{BC}$$

या,  $\tan \theta = \frac{h}{4}$  .....(i)

साथ ही समकोण त्रिभुज ACD में,

$$\tan (90 - \theta) = \frac{CD}{AC}$$

या,  $\cot \theta = \frac{h}{9}$  .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) का गुणा करने पर

$$\tan \theta \cdot \cot \theta = \frac{h}{4} \times \frac{h}{9}$$

या,  $\tan \theta \cdot \frac{1}{\tan \theta} = \frac{h^2}{36}$

या,  $\frac{1}{1} = \frac{h^2}{36}$

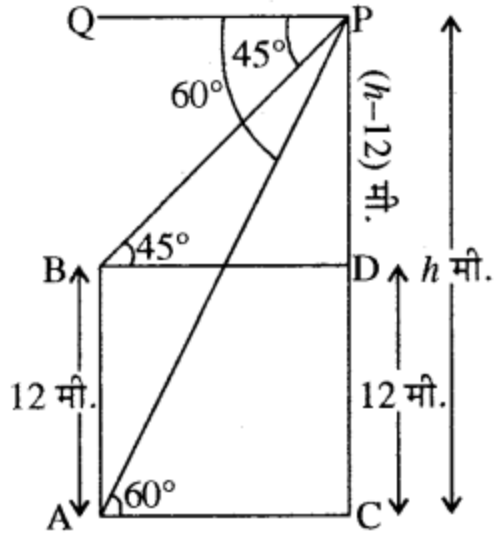
$\therefore h^2 = 36$  या  $h = 6$  मीटर

अतः मीनार की ऊँचाई 6 मीटर है। उत्तर

**प्रश्न 27.** सड़क के एक ओर एक मीनार तथा दूसरी ओर एक मकान स्थित है। मीनार के शिखर से मकान की छत और आधार के अवनमन कोण क्रमशः  $45^\circ$  व  $60^\circ$  हों और यदि मकान की ऊँचाई 12 मीटर हो, तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। ( $\sqrt{3} = 1.732$ )

**हल:** चित्रानुसार आकृति में माना PC मीनार की ऊँचाई को तथा AB, 12 मीटर ऊँचे मकान को प्रकट करते हैं। हमें मीनार की ऊँचाई ज्ञात करनी है।

PB समान्तर रेखाओं PQ तथा BD की एक तिर्यक छेदी रेखा है। अतः  $\angle QPB$  और  $\angle PBD$  एकान्तर कोण हैं 12 मी. और इसलिए बराबर हैं। अतः  $\angle PBD = 45^\circ$ , इसी प्रकार  $\angle PAC = 60^\circ$   
अब  $\triangle ACP$  से



$$\tan 60^\circ = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{PC}{AC} = \frac{h}{AC}$$

या,  $\tan 60^\circ = \frac{h}{AC}$

या,  $\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h}{AC}$

$\therefore AC = \frac{h}{\sqrt{3}}$  .....(i)

तथा  $\triangle BDP$  से

$$\tan 45^\circ = \frac{h-12}{BD}$$

या,  $\frac{1}{1} = \frac{h-12}{BD}$

या,  $BD = h - 12$

या,  $AC = h - 12$  [ $\because AC = BD$ ] .....(ii)

अब समीकरण (i) व (ii) से

$$\frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{h-12}{1}$$

या,  $h = \sqrt{3}h - 12\sqrt{3}$

या,  $\sqrt{3}h - h = 12\sqrt{3}$

या,  $h(\sqrt{3} - 1) = 12\sqrt{3}$

$$h = \frac{12\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-1)}$$

अंश तथा हर में  $(\sqrt{3}+1)$  से गुणा करने पर

$$\begin{aligned} \text{या, } h &= \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} \\ &= \frac{12\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{3-1} \end{aligned}$$

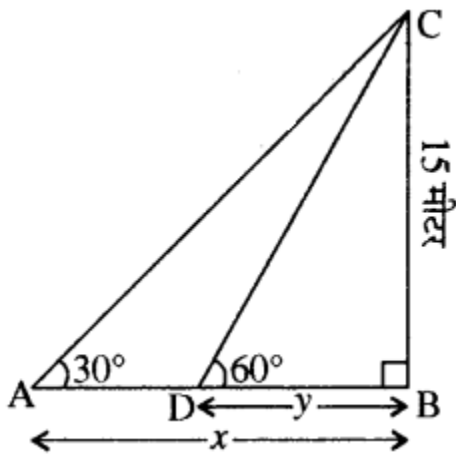
$$\begin{aligned} \text{या, } h &= \frac{12\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2} = 6\sqrt{3}(\sqrt{3}+1) \\ &= 6 \times 3 + 6\sqrt{3} \\ &= 18 + 6 \times 1.732 \\ &= 18 + 10.392 \\ h &= 28.392 \text{ मीटर} \end{aligned}$$

अतः मीनार की ऊँचाई 28.392 मीटर है। उत्तर

प्रश्न 28. यदि सूर्य का उन्नयन कोण  $30^\circ$  से  $60^\circ$  में परिवर्तित हो जाता है, तो इन दोनों उन्नयन कोणों पर 15 मीटर ऊँचे खम्भे की छाया की लम्बाई में अन्तर ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि 15 मीटर लम्बे खम्भे की छाया की। लम्बाई उन्नयन कोण  $30^\circ$  होने पर  $x$  मीटर तथा उन्नयन कोण  $60^\circ$  होने पर  $y$  मीटर है।

अतः  $\triangle ABC$  से



$$\tan 30^\circ = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{CB}{AB}$$

$$\Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{15}{x}$$

$$\text{या, } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{15}{x}$$

$$\begin{aligned} \text{या, } x &= 15\sqrt{3} \text{ मीटर} \\ &= 15 \times 1.732 = 25.98 \text{ मीटर} \end{aligned} \quad \dots(i)$$

पुनः  $\triangle DBC$  से

$$\tan \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{CB}{DB}$$

$$\text{या, } \tan 60^\circ = \frac{15}{y}$$

$$\text{या, } \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{15}{y}$$

$$\begin{aligned} \text{या, } y &= \frac{15}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{15}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$y = 5\sqrt{3}$$

$$y = 5 \times 1.732 = 8.66 \text{ मीटर} \quad \dots(ii)$$

$$\begin{aligned} \text{अतः लम्बाइयों में अन्तर} &= x - y = 25.98 - 8.66 \text{ मीटर} \\ &= 17.32 \text{ मीटर} \end{aligned}$$

अतः लम्बाइयों में 17.32 मीटर का अन्तर होगा। उत्तर

## Additional Questions

### अन्य महत्त्वपूर्ण प्रश्न

#### वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. 10 मीटर ऊँचे एक वृक्ष की छाया 103 मीटर लम्बी हो, तो सूर्य का उन्नतांश कोण है-

- (A)  $90^\circ$  (B)  $60^\circ$  (C)  $45^\circ$  (D)  $30^\circ$

प्रश्न 2. किसी मीनार की छाया उसकी ऊँचाई के बराबर हो तो सूर्य का उन्नयन कोण

- (A)  $90^\circ$  (B)  $60^\circ$  (C)  $45^\circ$  (D)  $30^\circ$

प्रश्न 3. यदि किसी वृक्ष की छाया उसकी ऊँचाई की  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  गुना हो, तो सूर्य का उन्नयन कोण है

- (A)  $90^\circ$  (B)  $60^\circ$  (C)  $45^\circ$  (D)  $30^\circ$

प्रश्न 4. एक पहाड़ी का ढलान क्षैतिज से  $30^\circ$  कोण बनाता है। यदि शिखर तक पहुँचने में 500 मीटर चलना पड़ता है, तो पहाड़ी की ऊँचाई है-

- (A)  $500\sqrt{3}$  मीटर (B)  $\frac{500}{\sqrt{3}}$  (C) 500 मीटर (D)  $\frac{250}{\sqrt{3}}$  मीटर

प्रश्न 5. यदि एक मीनार की ऊँचाई उसकी छाया से 3 गुनी है तो सूर्य का उन्नतांश कोण है

- (A)  $30^\circ$  (B)  $45^\circ$  (C)  $75^\circ$  (D)  $60^\circ$

प्रश्न 6. 50 मीटर ऊँचे एक प्रकाश स्तम्भ के शिखर से किसी नाव का अवनमन कोण  $60^\circ$  है। नाव की प्रकाश स्तम्भ से दूरी होगी-

- (A)  $50\sqrt{3}$  मीटर (B)  $\frac{50}{\sqrt{3}}$  मीटर (C)  $50 \times 3$  मीटर (D) 50 मीटर

प्रश्न 7. एक मीनार के आधार से 60 मी. की दूरी पर एक बिन्दु से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण  $45^\circ$  है तो मीनार की ऊँचाई है

- (A) 30 मी.                      (B)  $30\sqrt{3}$  मी.                      (C) 60 मी.                      (D)  $60\sqrt{3}$  मी.

प्रश्न 8. यदि सूर्य का उन्नतांश कोण  $45^\circ$  हो तो 12 मीटर ऊँचे एक वृक्ष की पड़ने वाली छाया की लम्बाई होगी-

- (A) 6 मीटर                      (B) 9 मीटर                      (C) 12 मीटर                      (D)  $12\sqrt{2}$  मीटर

प्रश्न 9. आँधी से टूटे एक वृक्ष का ऊपरी सिरा भूमि से  $30^\circ$  का कोण बनाता है। यदि उसका शीर्ष भूमि पर जड़ से 25 मीटर की दूरी पर गिरा हो तो वृक्ष के शेष भाग की ऊँचाई होगी-

- (A)  $25\sqrt{3}$  मीटर                      (B)  $\frac{25}{\sqrt{3}}$  मीटर                      (C) 25 मीटर                      (D)  $\frac{\sqrt{3}}{25}$  मीटर

प्रश्न 10. 10 मीटर ऊँची मीनार की परछाई क्या होगी जबकि सूर्य का उन्नतांश कोण  $30^\circ$  हो?

- (A) 1730 मीटर                      (B) 17.32 मीटर                      (C) 173.2 मीटर                      (D) 7320 मीटर

उत्तर-तालिका 1. (D) 2. (C) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 6. (B) 7. (C) 8. (C) 9. (B) 10. (B)

### अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. 3 मीटर ऊँचे खम्भे की परछाई की लम्बाई 3 मीटर है। उस समय सूर्य का उन्नयन कोण ज्ञात कीजिये।

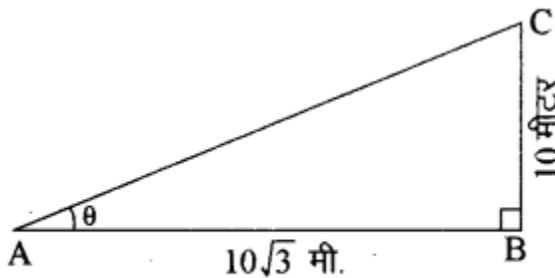
हल:  $\tan \theta = \frac{3}{3} = 1$   
 $\therefore \theta = 45^\circ$  उत्तर

प्रश्न 2. दी गई आकृति में कोण  $\theta$  का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{10}{10\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$\therefore \theta = 30^\circ$  उत्तर



प्रश्न 3. चित्र के अनुसार 'x' का मान लिखिए

$$AB = x,$$

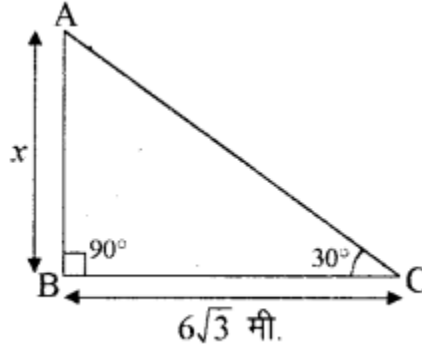
$$BC = 6\sqrt{3} \text{ मीटर}$$

$$\text{ताथा } \angle C = 30^\circ$$

हल:

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{6\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} \text{अतः } x &= 6\sqrt{3} \times \tan 30^\circ \\ &= 6\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= 6 \text{ मीटर उत्तर} \end{aligned}$$



प्रश्न 4. सूर्य के उन्नयन कोण में वृद्धि ( $0^\circ$  से  $90^\circ$  तक) होने से किसी स्तम्भ की परछाई की लम्बाई में क्या परिवर्तन होता है? लिखिए।

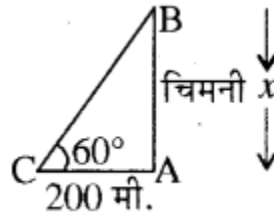
उत्तर: परछाई की लम्बाई कम होती जाएगी।

प्रश्न 5. एक चिमनी के आधार से 200 मीटर दूरी पर से उसके शिखर का उन्नयन कोण  $60^\circ$  है। चिमनी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\tan 60^\circ = \frac{x}{200} \text{ या } x = 200 \times \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \text{अतः } x &= 200 \times 1.732 \\ &= 346.4 \text{ मीटर उत्तर} \end{aligned}$$



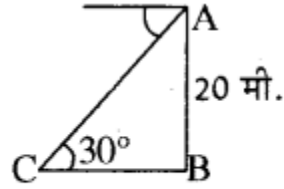
प्रश्न 6. 20 मीटर ऊँचे नदी के पुल से एक नाव का अवनमन कोण  $30^\circ$  है। नाव को पुल के नीचे जाने में कितनी दूरी चलना होगा?



हल:

$$\tan 30^\circ = \frac{20}{x} \quad \left( \because \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{20}{x} \quad \text{या } x = 20\sqrt{3} \text{ मीटर उत्तर}$$

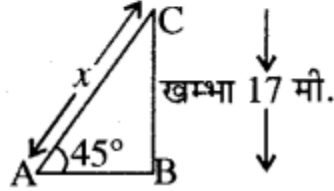


प्रश्न 7. टेलीफोन के खम्भे की भूमि से ऊँचाई 17 मीटर है। उसके ऊपरी सिरे से बंधा हुआ तार भूमि से  $45^\circ$  का कोण बनाता है। तार की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल:

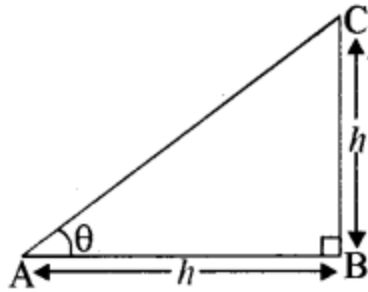
$$\sin 45^\circ = \frac{17}{x} \quad \left( \because \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{17}{x} \quad \text{या } x = 17\sqrt{2} = 17 \times 1.414 \\ &= 24.04 \text{ मीटर उत्तर} \end{aligned}$$



प्रश्न: 8. यदि एक मीनार की परछाई की लम्बाई मीनार की ऊँचाई के बराबर हो तो सूर्य का उन्नयन कोण ज्ञात कीजिए। (माध्य. शिक्षा बोर्ड, मॉडल पेपर, 2017-18)

हल: माना मीनार की ऊँचाई = h इकाई है।  
तब प्रश्नानुसार मीनार की परछाई की लम्बाई = h इकाई है।  
माना सूर्य का उन्नयन कोण =  $\theta$  है।



$$\therefore \tan \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{h}{h} = 1$$

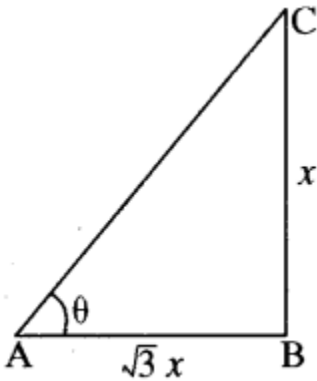
$$\tan \theta = 1 = \tan 45^\circ$$

तब  $\theta = 45^\circ$  उत्तर

प्रश्न 9. यदि एक ऊर्ध्वाधर छड़ की लम्बाई तथा इसकी छाया की लम्बाई का अनुपात  $1 : \sqrt{3}$  हो, तो सूर्य का उन्नयन कोण ज्ञात कीजिये।। (माध्य. शिक्षा बोर्ड, 2018)

हल: माना छड़ की लम्बाई =  $x$  इकाई है।

तब इसकी छाया =  $\sqrt{3}x$  इकाई होगी।



$$\therefore \tan \theta = \frac{BC}{AB}$$

$$\tan \theta = \frac{x}{\sqrt{3}x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \theta = 30^\circ$$

अतः सूर्य का उन्नयन कोण  $30^\circ$  होगा। उत्तर

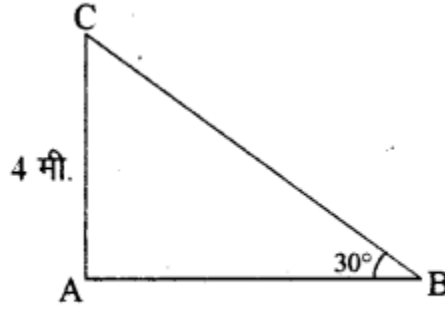
## लघूत्तरात्मक प्रश्न-

प्रश्न 1. एक वृक्ष पृथ्वी से 4 मीटर की ऊँचाई से टूटकर इस प्रकार गिरता है कि इसका ऊपरी सिरा पृथ्वी से  $30^\circ$  का कोण बनाता है। वृक्ष की कुल ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ BC पेड़ का टूटा हुआ भाग है।

$$\text{अतः } \sin 30^\circ = \frac{AC}{BC}$$

$$\begin{aligned} BC &= \frac{AC}{\sin 30^\circ} \\ &= \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8 \text{ मीटर} \end{aligned}$$



अतः वृक्ष की कुल ऊँचाई  $(AC + BC) = 4 + 8 = 12$  मीटर उत्तर

प्रश्न 2. एक मकान की छत से मैदान में पड़े एक पत्थर का अवनमन कोण  $60^\circ$  है। यदि पत्थर से छत की तिरछी दूरी  $4\sqrt{3}$  मीटर हो तो मकान की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ  $AC = 4\sqrt{3}$  मीटर

माना  $AB = x$  मीटर

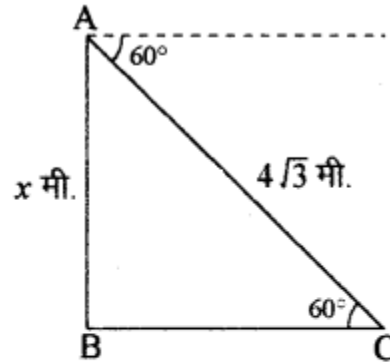
$$\therefore \sin \theta = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$$

$$\therefore \sin 60^\circ = \frac{x}{4\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{4\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} \text{अतः } x &= \frac{4\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{2} \\ &= 2 \times 3 = 6 \text{ मीटर} \end{aligned}$$

अतः मकान की ऊँचाई = 6 मीटर उत्तर



प्रश्न 3. एक स्तम्भ के ऊपरी सिरे का उन्नयन कोण आधार तल के एक बिन्दु पर  $60^\circ$  है। यदि यह बिन्दु स्तम्भ के आधार बिन्दु से  $10\sqrt{3}$  मीटर की दूरी पर हो तो स्तम्भ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

**हल:** माना AB एक स्तम्भ है, जिसके आधार से  $10\sqrt{3}$  मीटर की दूरी पर स्थित बिन्दु C से स्तम्भ के शिखर का उन्नयन कोण  $60^\circ$  माना स्तम्भ AB की ऊँचाई  $h$  मीटर है। समकोण  $\triangle ABC$  में,

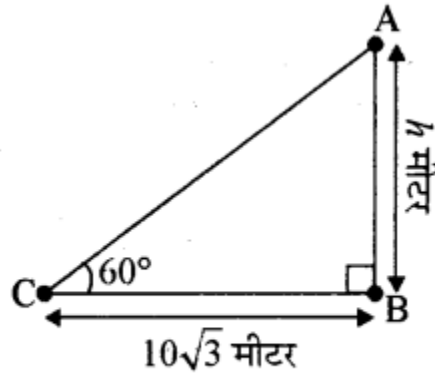
$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{10\sqrt{3}}$$

या  $h = 10\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

या  $h = 10 \times 3 = 30$

अतः स्तम्भ AB की ऊँचाई = 30 मीटर है। उत्तर



**प्रश्न 4.** 50 मीटर ऊँचे पुल से किसी नाव का अवनमन कोण  $30^\circ$  है। नाव की पुल से क्षैतिज दूरी ज्ञात कीजिए।

**हल:** माना नाव की पुल से क्षैतिज दूरी  $x$  मीटर है। दिया हुआ है-अवनमन कोण  $30^\circ$  है।

यहाँ  $PQ = 50$  मीटर

$\angle XPO = \angle POQ = 30^\circ$  (एकान्तर कोण)

समकोण  $\triangle PQO$  में

$$\therefore \tan 30^\circ = \frac{PQ}{OQ}$$

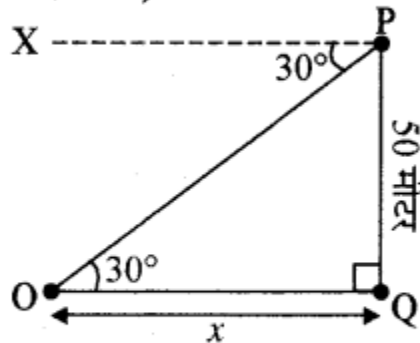
$$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{50}{x}$$

या  $x = 50\sqrt{3}$

$$= 50 \times 1.732 (\because \sqrt{3} = 1.732)$$

या  $x = 86.60$

अतः नाव की पुल से क्षैतिज दूरी 86.60 मीटर है। उत्तर



**प्रश्न 5.** किसी मीनार के आधार से  $a$  और  $b$  दूरी पर एक ही रेखा पर स्थित दो बिन्दु क्रमशः C व D से देखने पर मीनार के शिखर के उन्नयन कोण एक-दूसरे के पूरक हैं। सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई  $\sqrt{ab}$  है।

हल: माना मीनार की ऊँचाई  $AB = h$  मीटर तथा  $C$  व  $D$  बिन्दु इस प्रकार हैं कि  $BC = a$ ,  $BD = b$

यदि  $\angle ACB = \theta$  तो  $\angle ADB = 90^\circ - \theta$

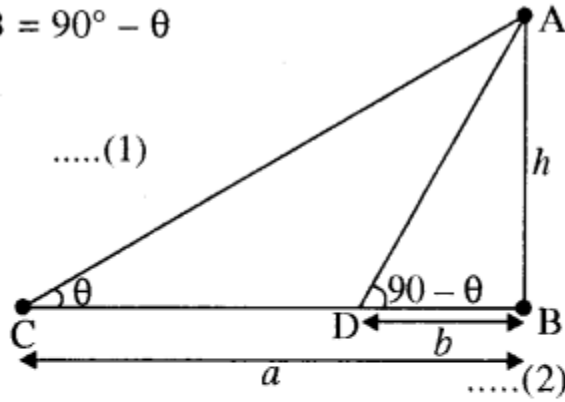
समकोण  $\triangle ABC$  में

$$\tan \theta = \frac{AB}{BC} = \frac{h}{a} \quad \dots(1)$$

पुनः समकोण  $\triangle ABD$  में,

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{AB}{BD}$$

$$\text{या} \quad \cot \theta = \frac{h}{b}$$



समीकरण (1) व (2) का गुणा करने पर

$$\tan \theta \times \cot \theta = \frac{h}{a} \times \frac{h}{b}$$

$$\text{या} \quad 1 = \frac{h^2}{ab} \Rightarrow h^2 = ab$$

$$\text{या} \quad h = \sqrt{ab}$$

प्रश्न 6. एक स्तम्भ के आधार से 40 मीटर दूर स्थित बिन्दु पर स्तम्भ के ऊपरी सिरे का उन्नयन कोण  $60^\circ$  है। स्तम्भ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि स्तम्भ की ऊँचाई  $h$  मीटर है।

समकोण त्रिभुज  $ABC$  से

$$\tan \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{AB}{BC}$$

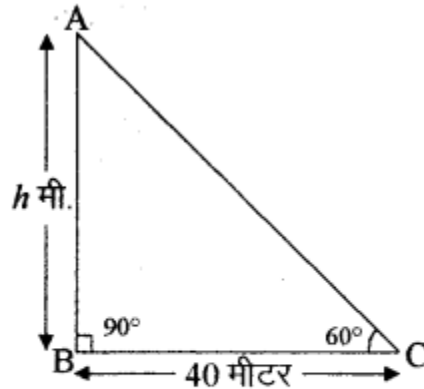
$$\text{या} \quad \tan 60^\circ = \frac{h}{40}$$

$$\text{या} \quad \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h}{40}$$

$$\begin{aligned} \text{या} \quad h &= 40 \times \sqrt{3} \\ &= 40 \times 1.732 \\ &= 69.280 \end{aligned}$$

$$\therefore h = 69.28 \text{ मीटर}$$

अतः स्तम्भ की ऊँचाई = 69.28 मीटर उत्तर



प्रश्न 7. एक सीढ़ी ऊर्ध्वाधर दीवार के सहारे इस प्रकार टिकी है कि इसका नीचे का सिरा क्षैतिज भूमि पर दीवार से 3 मीटर दूर है। यदि सीढ़ी भूमि से  $60^\circ$  का कोण बनाए तो सीढ़ी दीवार पर कितनी ऊँचाई तक पहुँचती है? सीढ़ी की लम्बाई भी ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि सीढ़ी AC दीवार AB पर h ऊँचाई तक पहुँचती है।  
अब समकोण त्रिभुज ABC से

$$\tan \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\text{या, } \tan 60^\circ = \frac{h}{3}$$

$$\text{या, } \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h}{3}$$

$$\therefore h = 3 \times \sqrt{3} \\ = 3 \times 1.732 = 5.196 \text{ मीटर}$$

$$\therefore h = 5.196 \text{ मीटर}$$

अतः सीढ़ी दीवार पर  $h = 5.196$  मीटर ऊँचाई तक पहुँचती है। उत्तर  
सीढ़ी की लम्बाई के लिए—माना कि सीढ़ी की लम्बाई  $x$  मीटर है। अतः  
समकोण त्रिभुज ABC से

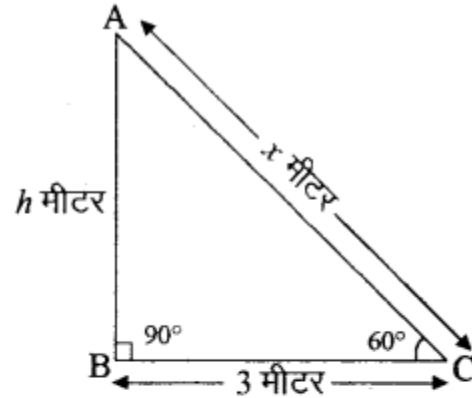
$$\cos \theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{या } \cos 60^\circ = \frac{3}{x}$$

$$\text{या } \frac{1}{2} = \frac{3}{x}$$

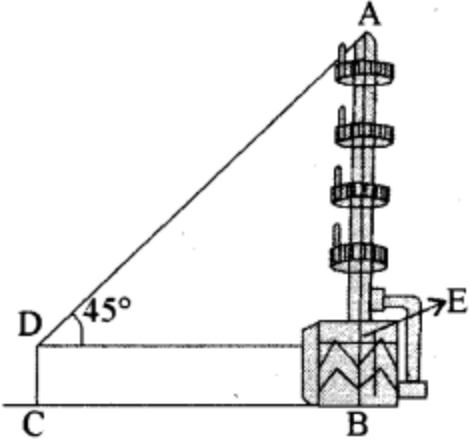
$$\therefore x = 6 \text{ मीटर}$$

अतः सीढ़ी की लम्बाई = 6 मीटर होगी। उत्तर



प्रश्न 8. 1.5 m लम्बा एक प्रेक्षक एक चिमनी से 28.5 m की दूरी पर है। उसकी आँखों से चिमनी के शिखर का उन्नयन कोण  $45^\circ$  है। चिमनी की ऊँचाई बताइए।

हल: यहाँ AB चिमनी है, CD प्रेक्षक है और  $\angle ADE$  उन्नयन कोण है। (देखिए आकृति)। यहाँ ADE एक त्रिभुज DA है जिसमें कोण E समकोण है और हमें चिमनी की ऊँचाई ज्ञात करनी है।



यहाँ  $AB = AE + BE = (AE + 1.5) \text{ m}$  [ $\because BE = CD = 1.5 \text{ m}$ ]

और  $DE = CB = 28.5 \text{ m}$ .

AE ज्ञात करने के लिए हमें एक ऐसा त्रिकोणमिति अनुपात लेना चाहिए जिसमें AE और DE दोनों हों अतः

$$\tan 45^\circ = \frac{AE}{DE}$$

$$\text{अर्थात् } 1 = \frac{AE}{28.5}$$

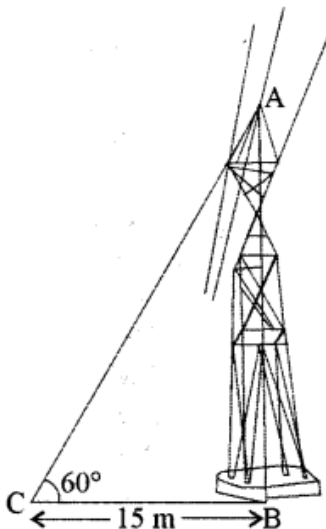
इसलिए  $AE = 28.5$

अतः चिमनी की ऊँचाई  $(AB) = (28.5 + 1.5) \text{ m} = 30 \text{ m}$  उत्तर

**प्रश्न 9.** धरती पर एक मीनार ऊर्ध्वाधर खड़ी है। धरती के एक बिन्दु से, जो मीनार के पाद-बिन्दु से 15 m दूर है, मीनार के शिखर का उन्नयन कोण  $60^\circ$  है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

**हल:** चित्र में AB मीनार को निरूपित करता है, CB मीनार से बिन्दु की दूरी है और  $\angle ACB$  उन्नयन कोण है। हम मीनार की ऊँचाई अर्थात् AB ज्ञात करना चाहते हैं और, यहाँ ACB एक त्रिभुज है जो B पर समकोण है।

अब हम त्रिकोणमितीय अनुपात  $\tan 60^\circ$  (या  $\cot 60^\circ$ ) लेते हैं, क्योंकि इस अनुपात में AB और BC दोनों होते हैं।



$$\therefore \tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$$

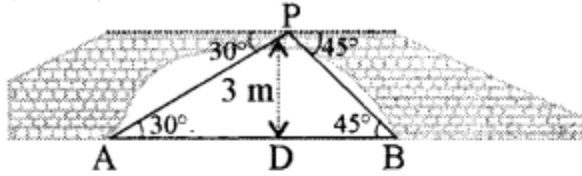
$$\text{अर्थात् } \sqrt{3} = \frac{AB}{15}$$

$$\text{अर्थात् } AB = 15\sqrt{3}$$

अतः मीनार की ऊँचाई =  $15\sqrt{3}$  m उत्तर

**प्रश्न 10.** एक नदी के पुल के एक बिन्दु से नदी के सम्मुख किनारों के अवनमन कोण क्रमशः  $30^\circ$  और  $45^\circ$  हैं। यदि पुल किनारों से 3m की ऊँचाई पर हो तो नदी की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

**हल:** आकृति में, A और B नदी के सम्मुख किनारों के बिन्दुओं को प्रकट करते हैं, जिससे कि AB नदी की चौड़ाई है। 3 m की ऊँचाई पर बने पुल पर एक बिन्दु P है अर्थात् DP = 3 m है। हम नदी की चौड़ाई ज्ञात करना चाहते हैं जो कि  $\triangle APB$  की भुजा AB की लम्बाई है।



$$\text{अब } AB = AD + DB$$

समकोण  $\triangle APD$  में,  $\angle A = 30^\circ$

$$\text{अतः } \tan 30^\circ = \frac{PD}{AD}$$

$$\text{अर्थात् } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{AD} \text{ या } AD = 3\sqrt{3} \text{ m}$$

अतः समकोण  $\triangle PBD$  में,  $\angle B = 45^\circ$  है। इसलिए  $BD = PD = 3 \text{ m}$

$$\begin{aligned} \text{अब } AB &= BD + AD = 3 + 3\sqrt{3} \\ &= 3(1 + \sqrt{3}) \text{ m} \end{aligned}$$

इसलिए नदी की चौड़ाई =  $3(\sqrt{3} + 1) \text{ m}$  उत्तर

**प्रश्न 11.** 10 मी. ऊँचे भवन के शिखर से एक टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण  $60^\circ$  है और उसके पाद का अवनमन कोण  $45^\circ$  है। टॉवर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

**हल:** माना कि टॉवर की ऊँचाई h मी. है। टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण  $60^\circ$  तथा पाद का अवनमन कोण  $45^\circ$  है। चित्र में भवन AB की ऊँचाई 10 मीटर है। अब  $\triangle ABD$  में



$$\frac{BD}{AB} = \cot 45^\circ$$

या,  $\frac{BD}{10} = 1$

या,  $BD = 10$  मी. ....(i)

अब समकोण  $\triangle AEC$  में

$$\frac{AE}{EC} = \cot 60^\circ$$

या,  $\frac{AE}{h-10} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

या,  $AE = \frac{h-10}{\sqrt{3}}$  ....(ii)

परन्तु  $BD = AE$

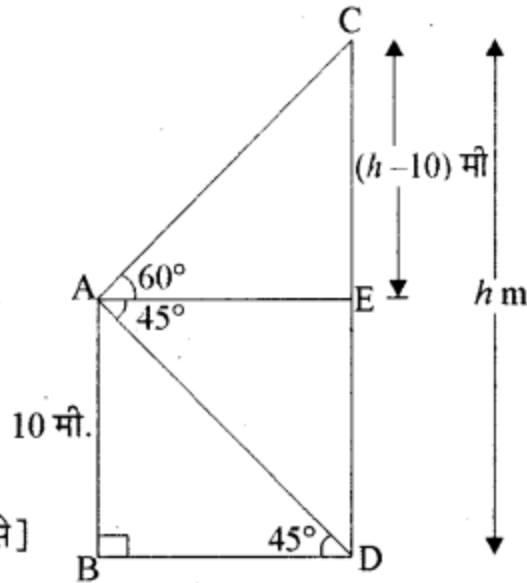
$$\therefore 10 = \frac{h-10}{\sqrt{3}}$$

[समीकरण (i) और (ii) के प्रयोग से]

या,  $10\sqrt{3} = h - 10$

या,  $h = 10\sqrt{3} + 10 = 10(\sqrt{3} + 1)$  मी.

अतः टॉवर की ऊँचाई =  $10(\sqrt{3} + 1)$  मी. उत्तर



प्रश्न 12. एक मीनार के आधार से 9 मीटर तथा 25 मीटर दूरी पर एक ही रेखा पर स्थित दो बिन्दुओं से देखने पर मीनार के शिखर के उन्नयन कोण परस्पर पूरक हैं। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। (माध्य. शिक्षा बोर्ड, 2018)

हल: माना मीनार की ऊँचाई  $AB = h$  मीटर

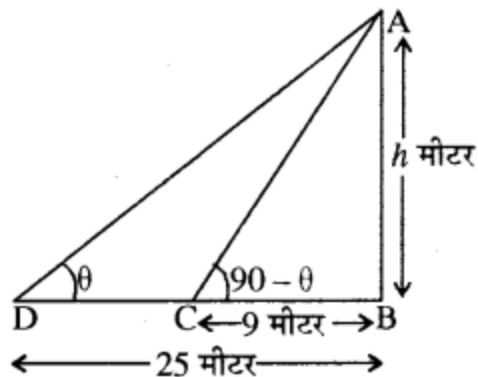
तथा C व D बिन्दु इस प्रकार हैं कि

$BC = 9$  मीटर,  $BD = 25$  मीटर

यदि  $\angle ADB = \theta$

तो  $\angle ACB = 90^\circ - \theta$

समकोण  $\triangle ABD$  में



$$\tan \theta = \frac{AB}{BD} = \frac{h}{25} \quad \dots(1)$$

पुनः समकोण  $\Delta ABC$  में,

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{AB}{BC}$$

$$\text{या} \quad \cot \theta = \frac{h}{9} \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) व समीकरण (2) को गुणा करने पर

$$\tan \theta \times \cot \theta = \frac{h}{25} \times \frac{h}{9}$$

$$\text{या} \quad 1 = \frac{h^2}{225} \Rightarrow h^2 = 225$$

$$\text{या} \quad h = \sqrt{225} = 15 \text{ मीटर}$$

अतः मीनार की ऊँचाई = 15 मीटर उत्तर

## निबन्धात्मक प्रश्न

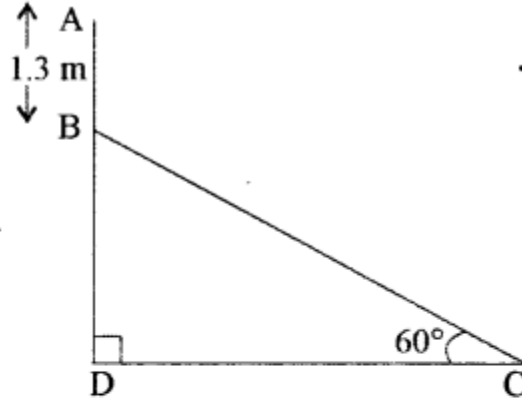
प्रश्न 1. एक बिजली मिस्त्री को एक 5 m ऊँचे खम्भे पर आ गई खराबी की मरम्मत करनी है। मरम्मत का काम करने के लिये उसे खम्भे के शिखर से 1.3 m नीचे एक बिन्दु तक पहुँचना है। यहाँ पर पहुँचने के लिये प्रयुक्त सीढ़ी की लम्बाई कितनी होनी चाहिये जिससे कि क्षैतिज से  $60^\circ$  के कोण से झुकने पर वह अपेक्षित स्थिति तक पहुँच जाये ? और यह भी बताइये कि खम्भे का पाद-बिन्दु कितनी दूरी पर सीढ़ी के पाद-बिन्दु से होना चाहिये ?

हल: बिजली मिस्त्री को खम्भे AD पर बिन्दु B तक पहुँचना है।

अतः  $BD = AD - AB$

$$= 5 - 1.3 = 3.7 \text{ m}$$

यहाँ पर BC सीढ़ी की लम्बाई को प्रकट करती है। हमें इसकी लम्बाई अर्थात् समकोण त्रिभुज BDC का कर्ण ज्ञात करना है।



$$\sin 60^\circ = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{BD}{BC}$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3.7}{BC}$$

$$\therefore \quad BC = \frac{3.7 \times 2}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3.7 \times 2}{1.732} \simeq 4.28 \text{ m (लगभग)}$$

अर्थात् सीढ़ी की लम्बाई 4.28 m होनी चाहिये। उत्तर

$$\text{अब } \cot 60^\circ = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{DC}{BD}$$

$$\text{अर्थात् } DC = \frac{BD}{\sqrt{3}} = \frac{3.7}{\sqrt{3}}$$

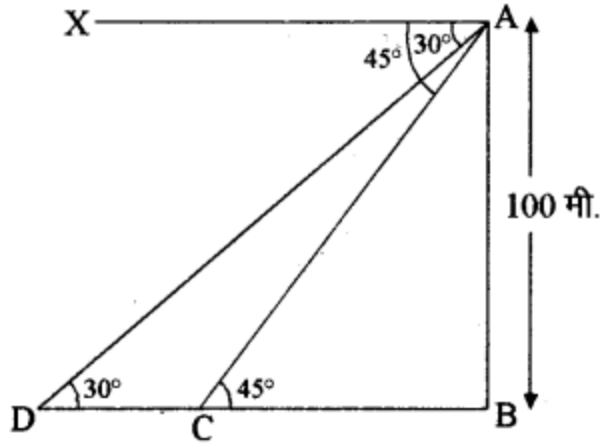
$$DC = \frac{3.7}{1.732} = 2.14 \text{ m (लगभग)}$$

अतः उसे सीढ़ी के पाद को खम्भे से 2.14 m की दूरी पर रखना चाहिये।

उत्तर

**प्रश्न 2.** 100 मीटर ऊँचे एक प्रकाश स्तम्भ की चोटी से एक प्रेक्षक समुद्र में एक जहाज को ठीक अपनी ओर आते हुए देखता है। यदि जहाज का अवनमन कोण  $30^\circ$  से बदलकरे  $45^\circ$  हो जाता है तो प्रेक्षक की इस अवधि में जहाज द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

**हल:** माना AB एक प्रकाश स्तम्भ है जिसकी ऊँचाई 100 मीटर है। माना जहाज D से C बिन्दु पर आ जाता है।



तब  $\angle XAD = 30^\circ = \angle ADB$

तथा  $\angle XAC = 45^\circ = \angle ACB$

समकोण त्रिभुज ABC में

$$\tan 45^\circ = \frac{100}{BC}$$

$$BC = \frac{100}{1}$$

$$= 100 \text{ मीटर}$$

$$\therefore BD = (CD + 100)$$

पुनः समकोण  $\triangle ABD$  में

$$\tan 30^\circ = \frac{100}{DB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{100}{(CD + 100)}$$

$$\Rightarrow (CD + 100) = \sqrt{3} (100)$$

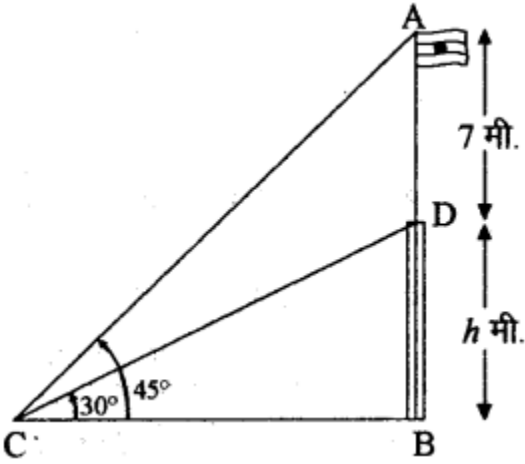
$$\Rightarrow CD = 100\sqrt{3} - 100 = 100(\sqrt{3} - 1) = 100(1.732 - 1)$$

$$\Rightarrow CD = 100 \times 0.732 = 73.2 \text{ मीटर}$$

अतः जहाज द्वारा तय की गई दूरी = 73.2 मीटर उत्तर

प्रश्न 3. क्षैतिज तल पर स्थित मीनार ऊर्ध्वाधर खड़ी है और उसके शिखर पर 7 मीटर लम्बाई का एक ध्वज दण्ड लगा है। तल पर स्थित किसी बिन्दु से ध्वज दण्ड के आधार और ऊपरी सिरे के उन्नयन कोण क्रमशः  $30^\circ$  और  $45^\circ$  हैं। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना मीनार की ऊँचाई  $BD = h$  मीटर है।  
 तथा ध्वज दण्ड की लम्बाई  $AD = 7$  मीटर है।  
 समकोण  $\triangle ABC$  से



$$\frac{AB}{BC} = \tan 45^\circ$$

या  $\frac{h+7}{BC} = 1$

$\therefore BC = (h + 7)$  मीटर .....(i)

तथा समकोण  $\triangle DBC$  से

$$\frac{DB}{BC} = \tan 30^\circ$$

या  $\frac{h}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore BC = h\sqrt{3}$  .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) की तुलना करने पर

$$h\sqrt{3} = h + 7$$

या  $h(\sqrt{3} - 1) = 7$

$$\Rightarrow h = \frac{7}{\sqrt{3}-1} = \frac{7}{1.732-1} = \frac{7}{0.732}$$

$$h = \frac{7000}{732} = 9.56 \text{ मीटर}$$

$\therefore$  मीनार की ऊँचाई = 9.56 मीटर उत्तर

प्रश्न 4. 4000 मीटर की ऊँचाई पर उड़ते हुए वायुयान के ठीक नीचे जिस क्षण दूसरा वायुयान आता है, उसी क्षण क्षैतिज तल पर किसी बिन्दु से इन वायुयानों के उन्नयन कोण क्रमशः  $60^\circ$  और  $45^\circ$  हैं। उस क्षण पर दोनों वायुयानों के बीच की ऊर्ध्वाधर की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि पहले हवाई जहाज (वायुयान) की ऊँचाई AC तथा दूसरे वायुयान की ऊँचाई BC = h मीटर है।

माना CD = x मीटर

समकोण त्रिभुज ACD से

$$\frac{AC}{CD} = \tan 60^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{4000}{x} = \sqrt{3}$$

$$\therefore 4000 = \sqrt{3}x \quad \dots(i)$$

पुनः समकोण त्रिभुज BCD से

$$\frac{h}{x} = \tan 45^\circ$$

$$\Rightarrow h = x \cdot 1$$

$$\Rightarrow h = x$$

समीकरण (i) तथा (ii) से

$$h\sqrt{3} = 4000 \text{ मीटर}$$

$$h\sqrt{3} = 4000 \text{ मीटर}$$

$$\Rightarrow h = \frac{4000}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \text{ मीटर (अंश तथा हर में } \sqrt{3} \text{ से गुणा करने पर)}$$

$$= \frac{4000 \times \sqrt{3}}{3} \text{ मीटर}$$

दोनों वायुयानों के बीच लम्बवत् दूरी

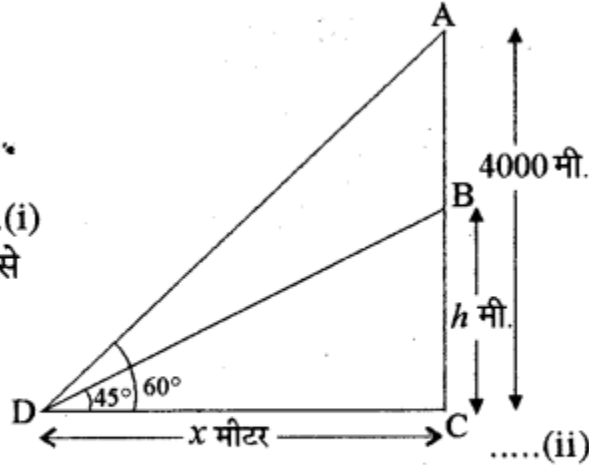
$$= 4000 - \frac{4000\sqrt{3}}{3} = \frac{4000 \times 3 - 4000\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{4000(3 - \sqrt{3})}{3} = \frac{4000 \times (3 - 1.73)}{3}$$

$$= \frac{4000 \times 1.27}{3} = 4000 \times 0.4233 = 1693.33 \text{ मीटर}$$

उस क्षण पर दोनों वायुयानों के बीच की ऊर्ध्वाधर की दूरी

$$= 1693.33 \text{ मीटर उत्तर}$$



प्रश्न 5. एक मीनार क्षैतिज तल पर खड़ी है। सूर्य के उन्नतांश कोण  $30^\circ$  पर मीनार की छाया, सूर्य के उन्नतांश  $60^\circ$  पर मीनार की छाया से 45 मीटर अधिक है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना मीनार की ऊँचाई  $AB = h$  मीटर है। अब  $BD$  मीनार की छाया है जबकि सूर्य का उन्नतांश कोण  $30^\circ$  है तथा  $BC$  भी मीनार की छाया है जबकि सूर्य का उन्नतांश कोण  $60^\circ$  है।  
यहाँ  $DC = 45$  मीटर तथा माना  $BC = x$  मीटर है।

$\therefore BD = 45 + x$  मीटर

अब समकोण  $\triangle ABD$  से

$$\frac{AB}{BD} = \tan 30^\circ$$

या  $\frac{h}{45+x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \sqrt{3}h = 45 + x$

$\Rightarrow x = (h\sqrt{3} - 45)$  मीटर  
.....(i)

पुनः समकोण त्रिभुज  $ABC$  से

$$\frac{h}{x} = \tan 60^\circ$$

या  $x = \frac{h}{\sqrt{3}}$  .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) की समानता या तुलना करने पर

$$h\sqrt{3} - 45 = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

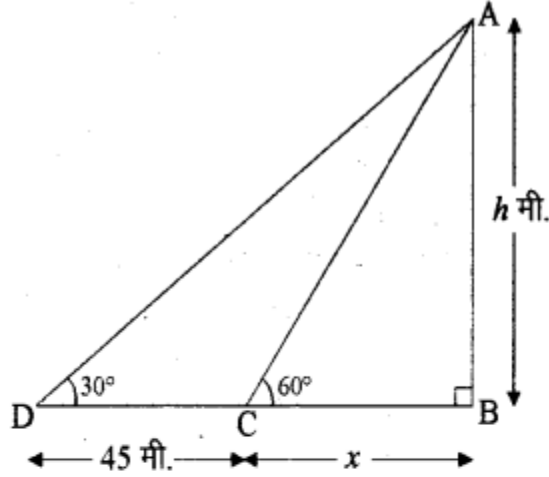
या  $3h - 45\sqrt{3} = h$

या  $2h = 45\sqrt{3}$

या  $h = 22.5 \times 1.732$

अर्थात्  $= 38.97$  मीटर

अतः मीनार की ऊँचाई = 38.97 मीटर उत्तर



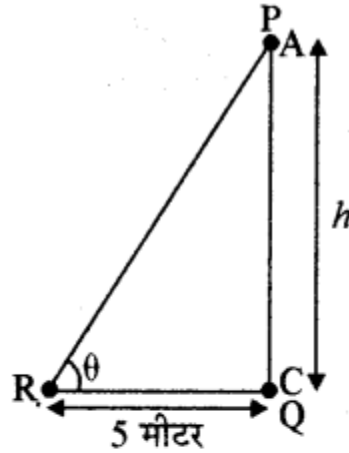
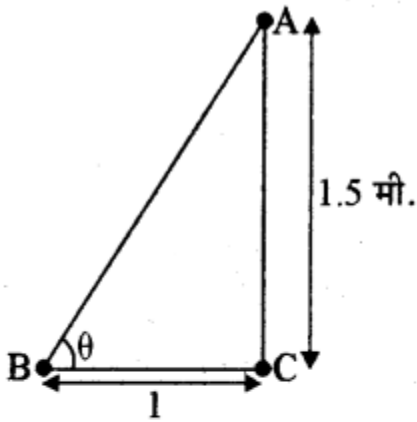
प्रश्न 6. एक समतल जमीन पर 1.5 मीटर लम्बे छात्र की छाया की लम्बाई 1 मीटर है तथा उसी समय एक मीनार की छाया की लम्बाई 5 मीटर है। तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: दिया हुआ है-  
छात्र की लम्बाई AC = 1.5 मीटर  
छात्र की छाया BC = 1 मीटर  
समकोण  $\triangle ACB$  में,

$$\tan \theta = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan \theta = \frac{1.5}{1}$$

या  $\tan \theta = 1.5$  .....(i)



अब दिया हुआ है कि  
मीनार की छाया की लम्बाई BC = 5 मीटर है।

माना मीनार की ऊँचाई PQ = h

समकोण  $\triangle PQR$  में,

या,  $\tan \theta = \frac{PQ}{QR}$

या,  $\frac{h}{5} = 1.5$  [ $\because \tan \theta = 1.5$ , समीकरण (1) से]

या,  $h = 5 \times 1.5$

या,  $h = 7.5$

अतः मीनार की ऊँचाई = 7.5 मीटर है। उत्तर

प्रश्न 7. 100 मीटर चौड़ी एक नदी के मध्य में एक छोटा टापू है। इस टापू पर एक ऊँचा वृक्ष है। नदी के विपरीत किनारों पर दो बिन्दु P व Q इस प्रकार स्थित हैं कि P, Q और वृक्ष एक रेखा में हैं। यदि P और Q से वृक्ष की चोटी का उन्नयने कोण  $30^\circ$  और  $45^\circ$  हो, तो वृक्ष की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



हल: माना OA वृक्ष है जिसकी ऊँचाई h मीटर है।  
आकृति में, PQ = 100 मीटर

$\angle APO = 30^\circ$  और  $\angle AQO = 45^\circ$  है।

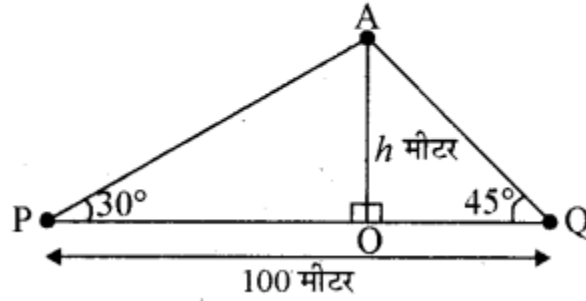
अब समकोण  $\triangle POA$  और  $\triangle QOA$  में

$$\tan 30^\circ = \frac{OA}{OP}$$

और  $\tan 45^\circ = \frac{OA}{OQ}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{OP}$$

और  $1 = \frac{h}{OQ}$



$$OP = h\sqrt{3} \text{ और } OQ = h$$

$\therefore$  आकृति से  $PQ = OP + OQ$

$$100 = h\sqrt{3} + h$$

$$100 = h(\sqrt{3} + 1)$$

$$\therefore h = \frac{100}{\sqrt{3} + 1} = \frac{100}{(\sqrt{3} + 1)} \times \left( \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} \right)$$

[अंश तथा हर में  $(\sqrt{3} - 1)$  से गुणा व भाग करने पर]

$$h = \frac{100(\sqrt{3} - 1)}{2}$$

$$h = 50(\sqrt{3} - 1)$$

$$h = 50(1.732 - 1) \quad (\because \sqrt{3} = 1.732)$$

$$h = 50 \times 0.732$$

$$h = 36.6 \text{ मीटर}$$

अतः वृक्ष की ऊँचाई 36.6 मीटर है। उत्तर

प्रश्न 8. एक कार एक सीधी सड़क पर चल रही है जो एक मीनार की ओर जाती है। मीनार से 500 मीटर की दूरी पर कार के ड्राइवर ने मीनार के शिखर का उन्नयन कोण  $30^\circ$  पाया। 10 सेकण्ड तक कार को मीनार की ओर चलाने के बाद ड्राइवर ने मीनार के शिखर को उन्नयन कोण  $60^\circ$  पाया। कार की चाल ज्ञात कीजिए।

हल: माना मीनार की ऊँचाई  $AB = h$  मीटर और 10 सेकण्ड में कार द्वारा तय दूरी (DC) =  $x$  मीटर है।

$$BD = 500 \text{ मीटर}$$

$$\therefore BC = (500 - x) \text{ मीटर}$$

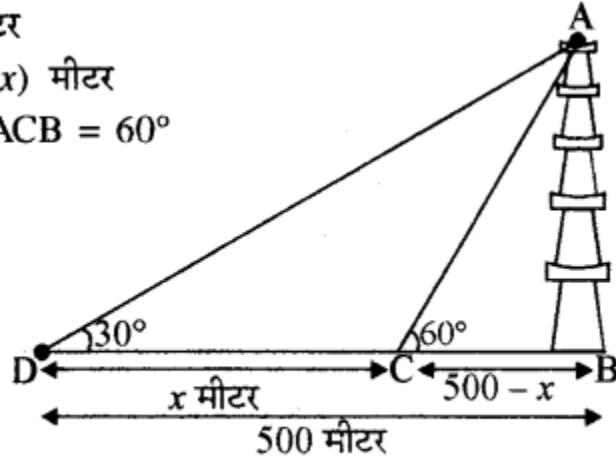
$$\angle ADC = 30^\circ, \angle ACB = 60^\circ$$

समकोण  $\triangle ABD$  में

$$\frac{AB}{BD} = \tan 30^\circ$$

$$\frac{h}{500} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow h = \frac{500}{\sqrt{3}}$$



.....(1)

पुनः समकोण  $\triangle ABC$  में

$$\frac{AB}{BC} = \tan 60^\circ$$

$$\text{या } \frac{h}{500 - x} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h = (500 - x)\sqrt{3} \quad \text{.....(2)}$$

समीकरण (1) व (2) से

$$\frac{500}{\sqrt{3}} = (500 - x)\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 500 = (500 - x)\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$$

$$\text{या } 500 = (500 - x)3$$

$$\text{या } 500 = 1500 - 3x$$

$$\text{या } 3x = 1500 - 500 = 1000$$

$$\text{या } x = \frac{1000}{3}$$

$$10 \text{ सेकण्ड में कार द्वारा तय दूरी} = \frac{1000}{3} \text{ मीटर}$$

$$\therefore 1 \text{ मिनट में कार द्वारा तय दूरी} = \frac{1000 \times 60}{3 \times 10} = 2000 \text{ मीटर}$$

$$= 2 \text{ किलोमीटर}$$

अतः कार की चाल = 2 किलोमीटर/मिनट उत्तर

प्रश्न 9. एक 80 मीटर चौड़ी सड़क के दोनों ओर आमने-सामने समान लम्बाई के दो खम्भे लगे हुए हैं। इन दोनों खम्भों के मध्य सड़क के एक बिन्दु से खम्भों के शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः  $60^\circ$  व  $30^\circ$  हैं। खम्भों की ऊँचाई तथा खम्भों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: माना BC व DE दो समान ऊँचाई के खम्भे हैं, जिनकी ऊँचाई h मीटर है। इन खम्भों के मध्य सड़क BD पर एक बिन्दु से खम्भों के शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः  $60^\circ$  व  $30^\circ$  हैं।

अतः  $\angle CAB = 60^\circ$  और  $\angle EAD = 30^\circ$ ,

BC = DE = h मी., BD = 80 मीटर

माना AD = x मीटर

$\therefore AB = BD - AD = (80 - x)$  मीटर

समकोण  $\triangle ADE$  में

$\tan 30^\circ = \frac{DE}{AD}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x}$$

$$\therefore h = \frac{x}{\sqrt{3}} \quad \dots(1)$$

पुनः समकोण  $\triangle ABC$  में,

$$\tan 60^\circ = \frac{BC}{AB}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{(80 - x)}$$

$$\Rightarrow h = (80 - x)\sqrt{3} \text{ मीटर} \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) व समीकरण (2) से

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}(80 - x)$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}(80 - x)$$

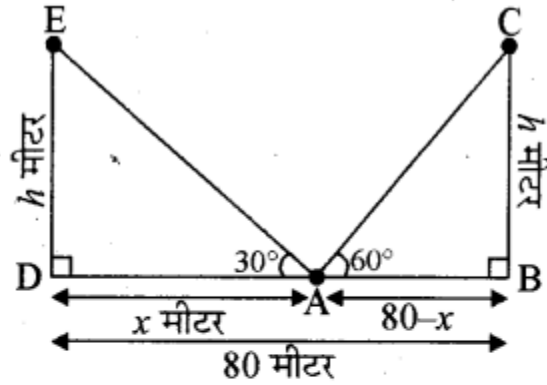
$$\Rightarrow x = 3(80 - x)$$

$$\Rightarrow x = 240 - 3x$$

$$\Rightarrow x + 3x = 240$$

$$\Rightarrow 4x = 240$$

$$\Rightarrow x = \frac{240}{4} = 60 \text{ मीटर}$$



समीकरण (1) से

$$h = \frac{60}{\sqrt{3}} = \frac{60}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{60\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow h = 20\sqrt{3} \text{ मीटर}$$

अतः खम्भों की ऊँचाई ( $h$ ) =  $20\sqrt{3}$  मीटर एवं बिन्दु की खम्भों से दूरी 20 मीटर व 60 मीटर है। उत्तर

प्रश्न 10. एक झील के पानी की सतह से  $h$  मीटर ऊँचाई पर स्थित एक बिन्दु से एक बादल का उन्नयन कोण  $\beta$  है तथा झील के पानी में उसकी छाया का अवनमन कोण  $\alpha$  है। सिद्ध कीजिए कि पानी के तल से बादल की ऊँचाई  $\frac{h(\tan\beta + \tan\alpha)}{\tan\beta - \tan\alpha}$  मीटर है।

हल: माना झील की सतह AB है तथा प्रेक्षण बिन्दु P है।

दिया है- AP =  $h$  मीटर

माना बादल की स्थिति C है तथा C' झील में बादल की छाया है।

$\therefore CB = C'B$

माना PM बिन्दु P से CB पर लम्ब है।

दिया हुआ है कि

$\angle CPM = \alpha$

तथा  $\angle MPC' = \beta$

माना कि CM =  $x$  मीटर

स्पष्ट है कि CB = CM + MB = CM + PA =  $x + h$

$\Delta CMP$  में,

$$\tan \alpha = \frac{CM}{PM}$$

या

$$\tan \alpha = \frac{x}{AB}$$

( $\because PM = AB$ )

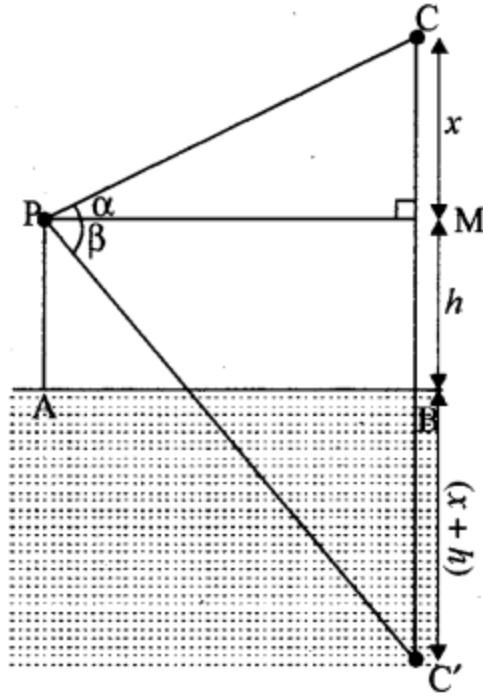
या

$$AB = \frac{x}{\tan \alpha}$$

$\therefore$

$$AB = x \cot \alpha$$

.....(1)



$$\Delta PMC' \text{ में, } \tan \beta = \frac{C'M}{PM} = \frac{x+2h}{AB}$$

$$AB = \frac{(x+2h)}{\tan \beta}$$

$$\therefore AB = (x+2h)\cot \beta \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) व समीकरण (2) के मान बराबर करने पर

$$x \cot \alpha = (x+2h)\cot \beta$$

$$x \cot \alpha = x \cot \beta + 2h \cot \beta$$

$$x \cot \alpha - x \cot \beta = 2h \cot \beta$$

$$x(\cot \alpha - \cot \beta) = 2h \cot \beta$$

$$\text{या } x \left( \frac{1}{\tan \alpha} - \frac{1}{\tan \beta} \right) = \frac{2h}{\tan \beta}$$

$$\text{या } x \left[ \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{\tan \alpha \tan \beta} \right] = \frac{2h}{\tan \beta}$$

$$\text{या } x = \frac{2h \tan \alpha \tan \beta}{(\tan \beta - \tan \alpha) \cdot \tan \beta}$$

$$\text{या } x = \frac{2h \tan \alpha}{(\tan \beta - \tan \alpha)}$$

अतः बादल की ऊँचाई  $CB = x + h$

$$= \frac{2h \tan \alpha}{\tan \beta - \tan \alpha} + h$$

$$= \frac{2h \tan \alpha + h(\tan \beta - \tan \alpha)}{(\tan \beta - \tan \alpha)}$$

$$= \frac{h(2 \tan \alpha + \tan \beta - \tan \alpha)}{(\tan \beta - \tan \alpha)}$$

$$= \frac{h(\tan \alpha + \tan \beta)}{(\tan \beta - \tan \alpha)} \text{ मीटर ( इतिसिद्धम् )}$$

प्रश्न 11. 100 मीटर ऊँची एक मीनार की चोटी और उसके आधार से, एक चट्टान की चोटी के उन्नयन कोण क्रमशः  $30^\circ$  और  $45^\circ$  हैं। चट्टान की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

**हल:** माना चट्टान की ऊँचाई AB है तथा वह (h + 100) मीटर है और मीनार की ऊँचाई CD है तथा वह 100 मीटर है।

$$\therefore \angle ADE = 30^\circ$$

तथा  $\angle ACB = 45^\circ$   
समकोण त्रिभुज AED से

$$\frac{h}{DE} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore DE = \sqrt{3}h \dots (i)$$

तथा समकोण त्रिभुज ABC से

$$\frac{h+100}{BC} = \tan 45^\circ$$

$$\text{या } \frac{h+100}{DE} = 1$$

$$[\because DE = BC]$$

$$h + 100 = DE$$

$$h + 100 = \sqrt{3}h$$

$$\therefore DE = \sqrt{3}h \text{ समी. (i) से}$$

$$h(\sqrt{3} - 1) = 100$$

$$\Rightarrow h = \frac{100}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$$

[अंश तथा हर में  $(\sqrt{3} + 1)$  से गुणा करने पर]

$$= \frac{100(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{100(\sqrt{3}+1)}{2}$$

$$= 50(1.732 + 1)$$

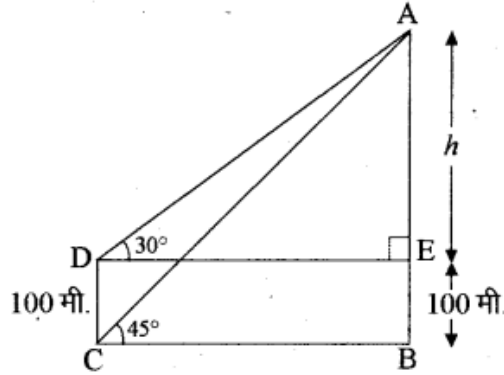
$$= 50 \times 2.732$$

$$\Rightarrow h = 136.60 \text{ मीटर}$$

$$\text{अतः चट्टान की ऊँचाई} = h + 100$$

$$= 136.60 + 100$$

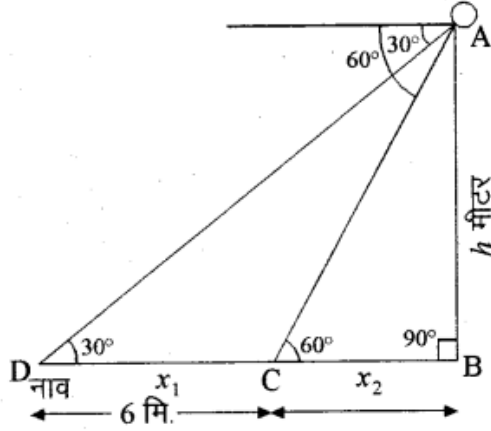
$$= 236.60 \text{ मीटर उत्तर}$$



**प्रश्न 12.** पहाड़ी पर खड़ा एक व्यक्ति एक नाव को देखता है, जिसका उस समय अवनमन कोण  $30^\circ$  है और यह नाव समुद्र के किनारे उस व्यक्ति के ठीक नीचे के स्थान की ओर आ रही है। नाव समान चाल से आ रही है। 6 मिनट पश्चात् उसका अवनमन कोण  $60^\circ$  हो जाता है। पहाड़ी की ऊँचाई और नाव को किनारे तक पहुँचने में लगने वाला समय ज्ञात कीजिए।

**हल:** माना पहाड़ी की ऊँचाई h मीटर अर्थात् चित्रानुसार AB है तथा प्रेक्षक व्यक्ति A बिन्दु पर खड़ा है। एक नाव D बिन्दु की ओर से 6 मिनट में बिन्दु C पर पहुँचती है। माना।

$$DC = x_1, CB = x_2$$



अब समकोण त्रिभुज ABC से

$$\frac{h}{x_2} = \tan 60^\circ$$

$$\Rightarrow h = x_2 \cdot \sqrt{3}$$

.....(i)

पुनः समकोण त्रिभुज ABD से

$$\frac{h}{x_1 + x_2} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow h = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{3}}$$

.....(ii)

समीकरण (i) व (ii) से

$$x_2 \sqrt{3} = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x_2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = x_1 + x_2$$

$$\Rightarrow 3x_2 = x_1 + x_2$$

$$\text{या } 2x_2 = x_1$$

$$\text{या } x_2 = \frac{x_1}{2}$$

लेकिन दिया गया है कि  $x_1$  दूरी तय करने में 6 मिनट लगते हैं।

$$\therefore x_2 \text{ दूरी तय करने में समय} = \frac{1}{2} \times 6 = 3 \text{ मिनट}$$

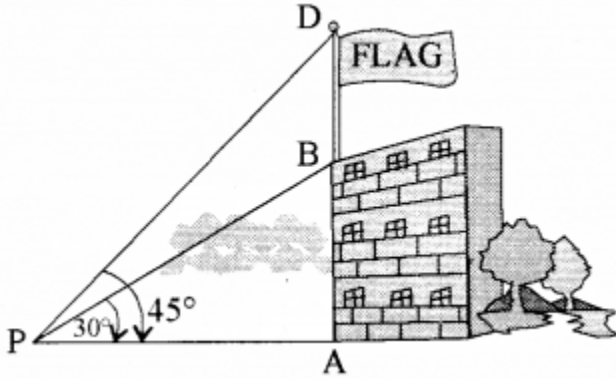
$$\Rightarrow \text{बिन्दु D से B तक पहुँचने में लगा समय} = 6 + 3 = 9 \text{ मिनट उत्तर}$$

प्रश्न 13. भूमि के एक बिन्दु P से एक 10 m ऊँचे भवन के शिखर का उन्नयन कोण  $30^\circ$  है। भवन के शिखर पर एक ध्वज को लहराया गया है और P से ध्वज के शिखर का उन्नयन कोण  $45^\circ$  है।



ध्वजदंड की लम्बाई और बिन्दु P से भवन की दूरी ज्ञात कीजिए। ( यहाँ आप  $\sqrt{3} = 1.732$  ले सकते हैं।)

**हल:** आकृति में, AB भवन की ऊँचाई है, BD ध्वजदंड प्रकट करता है और P दिया हुआ बिन्दु प्रकट करता है। यहाँ पर दो समकोण त्रिभुज PAB और PAD हैं। हमें ध्वजदण्ड की लम्बाई अर्थात् DB और बिन्दु P से भवन की दूरी अर्थात् PA ज्ञात करना है।  
समकोण  $\Delta PAB$  में



$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{AP}$$

$$\text{अर्थात् } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{AP}$$

$$\therefore AP = 10\sqrt{3}$$

अर्थात् P से भवन की दूरी  $10\sqrt{3} \text{ m} = 17.32 \text{ m}$

माना  $DB = x \text{ m}$  है तब  $AD = (10 + x) \text{ m}$

अब समकोण  $\Delta PAD$  में

$$\tan 45^\circ = \frac{AD}{AP} = \frac{10 + x}{10\sqrt{3}}$$

$$\therefore 1 = \frac{10 + x}{10\sqrt{3}} \text{ या } 10\sqrt{3} = 10 + x \Rightarrow 10\sqrt{3} - 10 = x$$

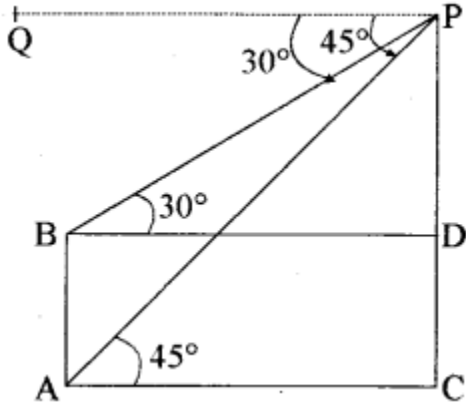
$$\begin{aligned} \text{अर्थात् } x &= 10(\sqrt{3} - 1) = 10(1.732 - 1) \\ &= 10 \times 0.732 = 7.32 \text{ m} \end{aligned}$$

अतः ध्वजदंड की लम्बाई = 7.32 m है। उत्तर

**प्रश्न 14.** एक बहुमंजिला भवन के शिखर से देखने पर एक 8 m ऊँचे भवन के शिखर और तल के अवनमन कोण क्रमशः  $30^\circ$  और  $45^\circ$  हैं। बहुमंजिला भवन की ऊँचाई और दो भवनों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

**हल:** आकृति में PC बहुमंजिला भवन को और AB, 8 m उँचे भवन को प्रकट करता है। हम बहुमंजिला भवन की उँचाई, अर्थात् PC और दो भवनों के बीच की दूरी अर्थात् AC ज्ञात करना चाहते हैं।

PB समान्तर रेखाओं PQ और BD की एक तिर्यक-छेदी रेखा है। अतः  $\angle QPB$  और  $\angle PBD$  एकान्तर कोण हैं। और इसलिए बराबर हैं। अतः  $\angle PBD = 30^\circ$ , इसी प्रकार  $\angle PAC = 45^\circ$   
समकोण  $\triangle PBD$  में,



$$\frac{PD}{BD} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

या,  $BD = PD\sqrt{3}$  .....(i)

समकोण  $\triangle PAC$  में,  $\frac{PC}{AC} = \tan 45^\circ = 1$

अर्थात्  $PC = AC$   
और  $PC = PD + DC$

$\therefore PD + DC = AC$

$\therefore AC = BD$  और  $DC = AB = 8 \text{ m}$ ,

$\therefore BD = PD + 8$  .....(ii)

समीकरण (i) तथा (ii) से

$$PD + 8 = PD\sqrt{3}$$

$\Rightarrow 8 = PD\sqrt{3} - PD$

$\Rightarrow 8 = PD(\sqrt{3} - 1)$

अतः  $PD = \frac{8}{\sqrt{3} - 1}$

अंश तथा हर में  $(\sqrt{3} + 1)$  से गुणा करने पर

$$\begin{aligned}
 PD &= \frac{8(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} \\
 &= \frac{8(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{8(\sqrt{3}+1)}{2} \\
 &= 4(\sqrt{3}+1) \text{ m}
 \end{aligned}$$

अतः बहुमंजिला भवन की ऊँचाई  $PC = PD + DC = PD + AB$   
 $[\because DC = AB]$

$$\begin{aligned}
 &= 4(\sqrt{3}+1) + 8 \quad [\because AB = 8 \text{ m है}] \\
 &= 4\sqrt{3} + 4 + 8 = 4\sqrt{3} + 12 \\
 &= 4(3 + \sqrt{3}) \text{ m उत्तर}
 \end{aligned}$$

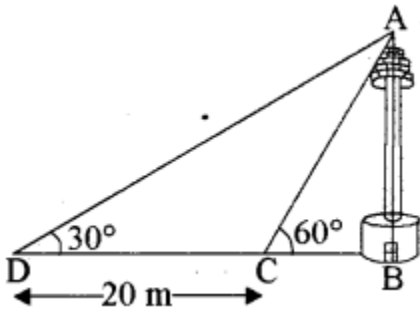
दो भवनों के बीच की दूरी =  $AC$  है।

लेकिन  $AC = PC$  है।

अतः दो भवनों के बीच की दूरी =  $4(3 + \sqrt{3}) \text{ m}$  उत्तर

अतः बहुमंजिला भवन की ऊँचाई और दो भवनों के बीच की दूरी आपस में बराबर है।

प्रश्न 15. एक नहर के एक तट पर एक टीवी टॉवर ऊर्ध्वाधरतः खड़ा है। टॉवर के ठीक सामने दूसरे तट के एक अन्य बिन्दु से टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण  $60^\circ$  है। इसी तट पर इस बिन्दु से 20 m दूर, और इस बिन्दु को मीनार के पाद से मिलाने वाली रेखा पर स्थित एक अन्य बिन्दु से टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण  $30^\circ$  है। (देखिए आकृति)। टॉवर की ऊँचाई और नहर की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।



हल: माना कि  $BC = x$  m नहर की चौड़ाई है और  $CD = h$  m टीवी टॉवर की ऊँचाई है। भिन्न-भिन्न स्थितियों में टॉवर के शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः  $30^\circ$  और  $60^\circ$  हैं। समकोण ABCD में,

$$\frac{CD}{BC} = \tan 60^\circ$$

$$\text{या, } \frac{h}{x} = \sqrt{3}$$

$$\text{या, } h = \sqrt{3}x \quad \dots\dots(i)$$

तथा समकोण  $\triangle ACD$  में,

$$\frac{CD}{AC} = \tan 30^\circ$$

$$\text{या, } \frac{h}{20+x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{या, } h = \frac{20+x}{\sqrt{3}} \quad \dots\dots(ii)$$

समीकरण (i) और (ii) से,

$$\sqrt{3}x = \frac{20+x}{\sqrt{3}}$$

$$\text{या, } \sqrt{3}(\sqrt{3}x) = 20+x$$

$$\text{या, } 3x = 20+x$$

$$\text{या, } 2x = 20$$

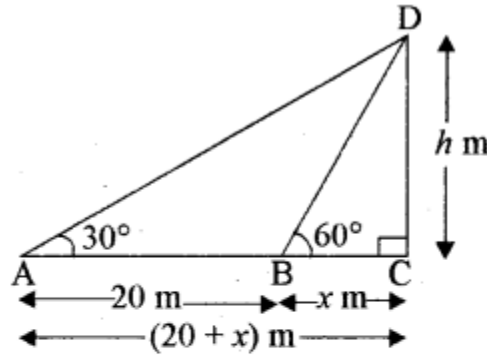
$$\text{या, } x = \frac{20}{2} = 10$$

$x$  का मान समीकरण (i) में प्रतिस्थापित करने पर

$$\begin{aligned} h &= 10(\sqrt{3}) \\ &= 10 \times 1.732 \\ h &= 17.32 \text{ m} \end{aligned}$$

अतः टीवी टॉवर की ऊँचाई 17.32 m है और नहर की चौड़ाई 10 m है।

उत्तर

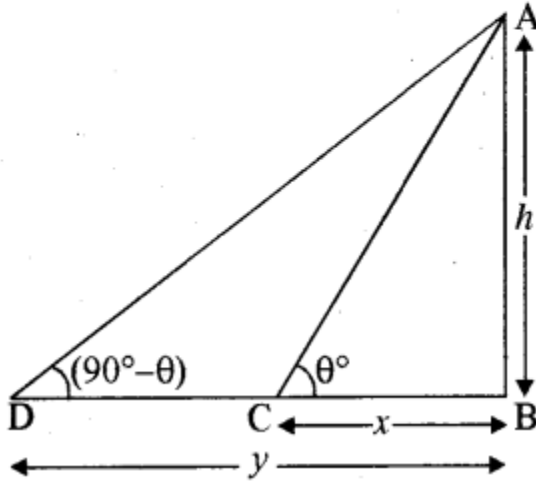


प्रश्न 16. किसी मीनार के आधार से  $x$  और  $y$  दूरी पर एक ही रेखा पर स्थित दो बिन्दुओं क्रमशः C व D से देखने पर मीनार के शिखर के उन्नयन कोण एक-दूसरे के पूरक हैं। सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई  $\sqrt{xy}$  है। ( माध्य, शिक्षा बोर्ड, मॉडल पेपर, 2017-18 )

**हल:** माना AB एक मीनार है, जिसकी ऊँचाई  $h$  इकाई है।  
मीनार के आधार से  $x$  तथा  $y$  दूरी पर बिन्दु क्रमशः C तथा D हैं, जिन पर मीनार के शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः  $\theta^\circ$  और  $(90^\circ - \theta)$  हैं।

समकोण  $\triangle ABC$  में  $\tan \theta = \frac{h}{x}$  .....(1)

समकोण  $\triangle ABD$  में  $\tan (90^\circ - \theta) = \frac{h}{y}$



अर्थात्  $\cot \theta = \frac{h}{y}$  .....(2)

समीकरण (1) तथा (2) का आपस में गुणा करने पर

$$\tan \theta \times \cot \theta = \frac{h}{x} \times \frac{h}{y}$$

$\Rightarrow 1 = \frac{h^2}{xy} \quad \because \tan \theta \times \cot \theta = 1$

या  $h^2 = xy$

$$h = \sqrt{xy}$$

अतः मीनार की ऊँचाई  $h = \sqrt{xy}$  इतिसिद्धम्