अध्याय

1

वैदिक गणित
(Vedic Mathematics)

1.01 प्रस्तावना

पुरी के शंकराचार्य स्वामी भारती कृष्णतीर्थ वैदिक गणित के आद्य संशोधक एवं प्रणेता माने जाते हैं। उन्होंने श्रृंगेरी मठ में रह कर आठ वर्ष कठोर तपस्या की। साधना की उच्च कोटि की सिद्ध अवस्था में उन्होंने प्राचीन भारतीय ग्रन्थों वेद, ब्राह्मण, संहिता, वेदांग आदि में उल्लेखित गणितीय सूत्रों का अन्तः दर्शन किया और उन्हें अपनी देवभाषा संस्कृत में सूत्रबद्ध किया। स्वामी जी के द्वारा रचित वैदिक मेथेमेटिक्स इन्हीं गणितीय सोलह सूत्रों एवं तेरह उपसूत्रों पर आधारित है। ये सूत्र–उपसूत्र बड़े उपयोगी, अनेक अर्थ वाले, सर्वव्यापी तथा अत्यन्त प्रभावी हैं। इन सूत्रों द्वारा गणित विषय की अनेक शाखाओं की समस्याओं का हल बड़ी सरलता से ज्ञात किया जा सकता है।

1.02 वैदिक गणित की उपादेयता :

इन वैदिक गणितीय सूत्रों के प्रयोग से गणनाएँ छोटी एवं सरल हो जाती हैं। गणना में समय भी कम लगता है। छात्र के मानसिक विकास में सहयोगी भी है। वैदिक गणित द्वारा उपलब्ध उत्तर जांच से छात्र का आत्म विश्वास बढ़ता है। छात्र के द्वारा होने वाली त्रुटि की संभावना नगण्य रह जाती है। इन सूत्रों से छात्र में गणित के प्रति रूचि पैदा हो जाती है। परिणामस्वरुप छात्र गणित विषय में श्रेष्ठ उपलब्धियाँ प्राप्त करता है। सूत्रों आधारित विधियों के अल्प अभ्यास से छात्र लम्बी एवं जटिल गणनाओं का हल मौखिक ज्ञात कर सकता है। इसी कारण गणित जगत में वैदिक गणित को मानसगणित भी पुकारा जाता है। स्वामीजी के अनुसार वैदिक गणित अभ्यास से छात्रों की क्षमता एवं गणना गति पाँच गुनी बढ़ जाती है तथा उनकी बुद्धि एवं मेधा में अप्रत्याशित वृद्धि होती है।

वैदिक गणितीय सूत्रों, उपसूत्रों की सूची

सूत्र	उपसूत्र
1. एकाधिकेन पूर्वेण	1. आनुरुप्येण
2. निखिलम् नवतश्चरमं दशतः	2. शिष्यतेशेष संज्ञः
3. ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्	3. आद्यमाद्येनान्त्यमन्त्येन

4. परावर्त्य योजयेत्	4. केवलैः सप्तकं गुण्यात्
5. शून्यं साम्य समुच्चये	5. वेष्टनम्
6. (आनुरुप्ये) शून्यमन्यत्	6. यावदूनं तावदूनम्
7. संकलन व्यवकलनाभ्याम्	7. यावदूनंतावदूनीकृत्यवर्ग च योजयेत्
8. पूरणापूरणाभ्याम्	8. अन्त्ययोर्दशकेऽपि
9. चलन कलनाभ्याम्	9. अन्त्ययोरेव
10. यावदूनम्	10. समुच्चय गुणितः
11. व्यष्टिसमष्टिः	11. लोपस्थापनाभ्याम्
12. शेषाण्यङ्केन चरमेण	12. विलोकनम्
13. सोपान्त्य द्वयमन्त्यम्	13. गुणित समुच्चयः समुच्चयगुणितः
14. एकन्यूनेन पूर्वेण	
15. गुणित समुच्चयः	
16. गुणक समुच्चयः	

विशेष सूत्रों के अर्थ एवं अनुप्रयोग

1.03 सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण :

(क) अर्थ : सूत्र दो शब्द 'एकाधिक' और 'पूर्व' से बना है। सूत्र का अर्थ है ''पहले के अंक या संख्या का एकाधिक करने की क्रिया द्वारा।'' संख्या का एकाधिक करना हो तो उसमें एक जोड़ना अथवा उसके इकाई अंक पर एकाधिक चिह्न $(\cdot)$ लगाना जैसे –

12 का एकाधिक $=1\dot{2}=12+1=13$

संख्या के किसी अंक का एकाधिक करना हो तो उस अंक के उपर एकाधिक चिह्न $(\cdot)$ लगाना और नवीन संख्या का मान ज्ञात करना। जैसे –

1534 में अंक 3 का एकाधिक करने पर नवीन संख्या $=15\dot{3}4=1544$

पूर्व का अर्थ है ''से पहले का''। संख्या में स्थानमान की दृष्टि से किसी अंक के पूर्व अंक की ओर अथवा दी हुई संख्या के पूर्व संख्या की ओर यह संकेत करता है जैसे –

685 में अंक 5 का पूर्व अंक 8 है तथा 62×99 में 99 की पूर्व संख्या 62 है। ऊपर की सभी क्रियाएँ मौखिक सम्पन्न की जा सकती है।

(ख) अनुप्रयोग :

(i) योग संक्रिया : योग संक्रिया के सभी प्रकार के प्रश्नों में सूत्र आधारित विधि प्रभावी है।

विधि : प्रश्न में दी हुई संख्याओं को स्तम्भ रचना में ऊपर नीचे लिखिए। इकाई स्तम्भ में ऊपर से नीचे जोड़ना प्रारम्भ कीजिए। जिस अंक पर योग दस या दस से अधिक हो जाए, उस अंक के पूर्व अंक पर एकाधिक चिह्न लगाइये। इस क्रिया की आवृत्ति कीजिए। अन्त में जो शेष रहे, उस अंक को उत्तर के स्थान पर नीचे लिख दीजिए। इसी प्रकार अन्य स्तम्भों का योग कीजिए। निम्न उदाहरणों से विधि को

उदाहरण 1: योग कीजिए।

$$\begin{array}{r} 3\ 7\ 9\ 9\ 5\downarrow \\ \dot{0}\ \dot{6}\ \dot{8}\ \dot{9}\ \dot{8}\ 6 \\ \dot{7}\ \dot{5}\ \dot{4}\ 3\ 8 \\ \dot{0}\ \dot{5}\ \dot{8}\ 9\ \dot{0}\ 9 \\ \hline 2\ 4\ 1\ 3\ 2\ 8 \\ \hline \end{array}$$

संकेत

(i) प्रथम स्तम्भ में : $5+6=11$
अतः 6 के पूर्व अंक 8 पर एकाधिक,

(ii) 11 के इकाई अंक : $1+8=9$

(iii) $9+9=18$ अतः 9 के पूर्व अंक 0 पर एकाधिक तथा 18 का इकाई अंक 8 लिखा नीचे उत्तर के स्थान पर।

(iv) अन्य स्तम्भों का योग इसी प्रकार कीजिए।

उदाहरण 2: योग कीजिए।

$$\begin{array}{rrrcrrr} & \text{किमी.} & & & & \text{मी.} & \\ & 2 & 8 & & 0 & 8 & 4 \\ & \dot{3} & 2 & & \dot{3} & 6 & 5 \\ \dot{0} & 6 & \dot{5} & & 7 & \dot{2} & 5 \\ & \dot{3} & 8 & & \dot{2} & 5 & 0 \\ \hline 1 & 6 & 4 & & 4 & 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

संकेत

(i) मीटर में तीन स्तम्भ। कोई स्तम्भ खाली न रह जाय अतः 84 मी. को 084 लिखें।

(ii) अब सामान्य स्तम्भों के समान इस विधि द्वारा योग कर दीजिए।

(ii) व्यवकलन संक्रिया : वैदिक गणित में व्यवकलन संक्रिया की चार–पाँच विधियॉ हैं परन्तु इन सबमें सबसे सरल और श्रेष्ठ विधि (सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण + परम मित्र अंक) आधारित विधि है। व्यवकलन का हॉसल वाला प्रत्येक प्रश्न इस विधि से सरल किया जा सकता है। जिन दो अंकों का योग दस (= आधार) होता है, वे अंक एक दूसरे के परम मित्र अंक अथवा पूरक अंक कहलाते हैं जैसे8 का परममित्र अंक = 2, 4 का परममित्र अंक = 6, तथा $\dot{9}$ का परममित्र अंक अथवा पूरक अंक $= 0$.

विधि : जब ऊपर वाले अंक (वियोज्य) में से नीचे वाला अंक (वियोजक) नहीं घटता है तो नीचे वाले अंक का परम मित्र अंक ऊपर वाले अंक में जोड़कर योगफल उत्तर के स्थान पर नीचे लिख दीजिए तथा नीचे वाले अंक के पूर्व अंक पर एकाधिक चिह्न लगा दीजिए। इस क्रिया की आवृत्ति से शेषफल ज्ञात हो जायेगा।

यदि ऊपर का अंक नीचे वाले अंक से बड़ा अथवा बराबर है तो फिर परम मित्र अंक जोडने की आवश्यकता नहीं है। सामान्य रूप से घटाइये। विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा हैं।

उदाहरण 3: व्यवकलन कीजिए।

$$\begin{array}{r} 5\ 7\ 6\ 2\ 5 \\ -\ \dot{2}\ \dot{9}\ \dot{8}\ 4\ 3 \\ \hline 2\ 7\ 7\ 8\ 2 \\ \hline \end{array}$$

संकेत

(i) $5-3=2$ लिखा नीचे उत्तर के स्थान पर

(ii) 2 में से 4नहीं घटता अतः 4 का परम मित्र अंक 6 जोड़ा 2 में तथा योग 8 लिखा नीचे उत्तर के स्थान पर साथ ही 4 के पूर्व अंक8 पर एकाधिक चिह्न। इसी प्रकार घटाने की क्रिया पूरी कीजिए।

उदाहरण 4: व्यवकलन कीजिए।

$$\begin{array}{ccc} \text{घं.} & \text{मि.} & \text{से.} \\ 2\,4 & 1\,2 & 1\,5 \\ \dot{0}\,\dot{6} & \dot{2}\,\dot{4} & 3\,0 \\ \hline 1\,7 & 4\,7 & 4\,5 \\ \hline \end{array}$$

संकेत

(1) मापन इकाई 'समय' में स्तम्भसः आधार भिन्न भिन्न

(2) मिनट व सेकण्ड के स्तम्भ में दो आधार रहेंगे।

(क) दोनों के इकाई स्तम्भ में आधार = 10

(ख) दोनों के दहाई स्तम्भ में आधार = 6

(3) घंटे के स्तम्भ में आधार = 10

(4) मिनट व सेकण्ड के दहाई स्तम्भ में परम मित्र अंक निकालने का आधार = 6 रहेगा तथा शेष में आधार = 10 रहेगा।

टिप्पणी : दाशमिक संख्या पद्धति में सामान्यतः आधार = 10 माना जाता है।

(iii) गुणन संक्रिया :

वैदिक गणित में गुणन की भिन्न–भिन्न स्थितियों में विभिन्न सूत्र आधारित विधियॉ हैं। सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण आधारित विधि प्रभावी है तथा कुछ विशेष गुणन विधियॉ बड़ी सरल एवं आकर्षक हैं। इस विधिको नवीन पदों के परिचय के साथ स्पष्ट किया जा रहा है। संख्या के इकाई अंक को चरमं अंक तथा शेष सभी अंको को निखिलम् अंक कहा जाता है जैसे संख्या 723 का चरमं अंक $=3$ तथा सभी अंक $7, 2$ निखिलम् अंक कहलाते हैं।

सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा दो संख्याओं का गुणा बड़ी सरलता से किया जा सकता है यदि उनके चरमं अंको का योग दस या दस की घात हो और उनके शेष निखिलम् अंक परस्पर समान हों।

विधि :

(i) गुणनफल के दो पक्ष होते है वाम तथा दक्षिण।

(ii) चरमं अंको अथवा अन्तिम अंको का गुणनफल दक्षिण पक्ष में लिखा जाता है।

(iii) वाम पक्ष में शेष निखिलम् अंक × उसका एकाधिक लिखा जाता है।

(iv) चरमं अंको के योग में जितने शून्य होते हैं उसके दुगने अंक दक्षिण पक्ष में रखे जाते हैं। जैसे योग10 में एक शून्य तो दक्षिण पक्ष में दो अंक।

(v) दक्षिण पक्ष में यदि अंको की संख्या कम या अधिक हो तो अंको का समायोजन करना पड़ता है। देखिये निम्न उदाहरण –

उदाहरण 5: गुणा कीजिए। (योग =10)

संकेत

83×87
$= 8 \times 9 / 3 \times 7$
$= 7221$

(i) चरमं अंको का योग = 10

(ii) शेष निखिलम् अंक परस्पर समान = 8

(iii) दक्षिण पक्ष में दो अंक = 21

2. गुणा कीजिए (योग = 100)

संकेत

586×514
$= 5 \times 6 \;/\; 86 \times 14$
$= 30 \;/\; 1204$
$= 301204$

(i) अन्तिम अंको का योग $= 86 + 14 = 100$

(ii) शेष निखिलम् अंक परस्पर समान = 5

(iii) दक्षिण पक्ष में चार अंक = 1204

3. गुणा कीजिए (योग = 1000)

संकेत

3993×3007
$= 3 \times 4 \;/\; 993 \times 007$
$= 12 \;/\; 006951$
$= 12006951$

(i) अंन्तिम अंको का योग $= 993 + 007 = 1000$

(ii) अतः दक्षिण पक्ष में छः अंक = 006951 (दो शून्य बढ़ा कर अंक समायोजन)

4. गुणा कीजिए (योग = 1)

संकेत

$$9\frac{5}{11}\times 9\frac{6}{11}$$
$$=9\times 10 \ / \ \frac{5}{11}\times\frac{6}{11}$$
$$=90\frac{30}{121}$$

(i) भिन्न योग $=\frac{5}{11}+\frac{6}{11}=1$

(ii) शेष निखिलम् अंक परस्पर समान $=9$

5. गुणा कीजिए (योग = 1)

संकेत

$$11\cdot 7\times 11\cdot 3$$
$$=11\times 12 \ / \ \cdot 7\times\cdot 3$$
$$=132\cdot 21$$

(i) दशमलव भिन्न योग $=\cdot 7+\cdot 3=1$

(ii) शेष निखिलम् अंक परस्पर समान $=11$

टिप्पणी : सूत्र आधारित विधि द्वारा उपर्युक्त सभी प्रश्न मौखिक किये जा सकते है। उत्तर सीधा एक पंक्ति में लिखा जा सकता है।

1.04 सूत्र एक न्यूनेन पूर्वेण

(क) अर्थ : सूत्र दो शब्द 'एक न्यून' तथा 'पूर्व' से बना है। सूत्र का अर्थ है पहले के अंक या संख्या का एक न्यून होने की क्रिया द्वारा''। जिस संख्या का एक न्यून करना होता है, उसके इकाई अंक के नीचे एक बिन्दु लगा दीजिए। यह बिन्दु एक न्यून चिह्न कहलाता है जैसे57 में 7 का एक न्यून = $\underset{\cdot}{7}=7-1=6$ पिछले

सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण की भांति इस सूत्र में भी संख्या के किसी अंक का एक न्यून कर नवीन संख्या का मान ज्ञात किया जा सकता है जैसे –

124 में 1 का न्यून करने पर

नवीन संख्या $=\underset{\cdot}{1}24=024=24$

(ख) अनुप्रयोग

(i) व्यवकलन संक्रिया : (सूत्र एक न्यूनेन पूर्वेण + परम मित्र अंक)

व्यकलन का हॉसिल वाला प्रत्येक प्रश्न इस विधि से सरल किया जा सकता है।

विधि :

यदि वियोज्य अंक में से वियोजक अंक नहीं घटता है तो वियोजक अंक का परम मित्र अंक वियोज्य अंक में जोड़ कर योगफल को नीचे शेषफल के स्थान पर लिख दीजिए। इसके साथ – साथ वियोज्य अंक के पूर्व अंक के नीचे एक बिन्दु लगा दीजिए। यह बिन्दु एक न्यून चिह्न कहलाता है। इस क्रिया की आवृत्ति से अन्त में पूर्ण शेषफल ज्ञात हो जायेगा। विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण 6: व्यवकलन कीजिए।

संकेत

$$\begin{array}{rccc} & \underset{\cdot}{5} & \underset{\cdot}{6} & 0 \\ - & 3 & 7 & 4 \\ \hline & 1 & 8 & 6 \\ \hline \end{array}$$

(i) सम्पूर्ण क्रिया सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण आधारित विधि के समान है।

(ii) अन्तर इतना है कि इस क्रिया में एकाधिक चिह्न के स्थान परएक न्यून चिह्न वियोज्य अंक के पूर्व अंक के नीचे लगेगा।

उदाहरण 7: व्यवकलन कीजिए।

किग्रा.	ग्राम
$\underset{\cdot}{1}\ \underset{\cdot}{2}\ \underset{\cdot}{5}$	$0\ \underset{\cdot}{9}\ 5$
7 8	2 2 8
0 4 6	8 6 7

संकेत

(i) 95 ग्राम को 095 लिखना है।

(ii) 5+2 (8 का परम मित्र अंक) तथा 9 पर एक न्यूनेन चिह्न

(iii) 8–2 = 6

(iv) 0+8 (2 का परम मित्र अंक) तथा 5 पर एक न्यूनेन चिह्न

(v) 4+2 (8 का परम मित्र अंक) तथा 2 पर एक न्यूनेन चिह्न

(vi) 1+3 (7 का परम मित्र अंक) तथा 1 पर एक न्यूनेन चिह्न

(vii) 0

(ii) गुणन संक्रिया

दो संख्याओं के गुणन में जब एक संख्या का प्रत्येक अंक 9 होतो सूत्र एक न्यूनेन पूर्वेण द्वारा बिना गुणन किये उनका गुणनफल बड़ी सरलता से ज्ञात किया जा सकता है। सुविधा के लिए आगे अब 9 अंक वाली संख्या को गुणक तथा दूसरी संख्या को गुण्य कहा जायेगा।

विधि : गुणनफल के दो पक्ष होते हैं।

वाम पक्ष = गुण्य – 1

दक्षिण पक्ष = गुणक – वामपक्ष

अतः गुण्य × गुणक = गुण्य – 1 / गुणक – वामपक्ष

गुणन संक्रिया में निम्न तीन स्थितियाँ बनती हैं।

(1) गुणक अंक संख्या = गुण्य अंक संख्या

(2) गुणक अंक संख्या > गुण्य अंक संख्या

(3) गुणक अंक संख्या < गुण्य अंक संख्या

प्रथम स्थिति : (गुणक अंक संख्या = गुण्य अंक संख्या)

देखिये निम्न उदाहरण।

1. 8×9

वाम पक्ष $=8-1=7$

दक्षिण पक्ष $=9-7=2$

$\therefore\quad 8\times9\ =8-1\ /\ 9-7\ =72$

2. 8567×9999

$=8567-1\ /\ 9999-8566$

$=85661433$

द्वितीय स्थिति : (गुणक अंक संख्या > गुण्य अंक संख्या)

देखिये निम्न उदाहरण।

3. 68×999

$=068\times999$

$=067\ /\ 999-067$

$=67932$

4. 4523×999999

$=004523\times999999$

$=004522/995477$

$=4522995477$

टिप्पणी: (1) गुणक संख्या के जितने अंक गुण्य संख्या से अधिक होते हैं, उतने ही 9 के अंक गुणनफल के मध्य में होते हैं।

(2) शेष वाम पक्ष और दक्षिण पक्ष के क्रमानुसार अंको का योग 9 होता है। अर्थात्
वाम पक्ष का प्रथम अंक + दक्षिण पक्ष का प्रथम अंक = 9

तृतीय स्थिति : (गुणक अंक संख्या $<$ गुण्य अंक संख्या)

देखिये निम्न उदाहरण।

5. 43×9

$= 42/9 - 42$

$= 429$

$- 42$

387

6. 512×99

$= 511/99 - 511$

$= 51199$

$- 511$

50688

प्रश्नमाला 1.1

सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा योग कीजिए।

1.
```
  98765
  63217
  89522
  60543
  _____
```

2.
```
  89789
  97686
  76978
  86798
  _____
```

3.

किग्रा.	ग्राम
178	45
246	725
569	188
45	894

4.

किमी.	मी.	सेमी.
25	510	36
47	85	52
18	123	75
53	805	28

वैदिक विधि से व्यवकलन कीजिए।

5.
```
   746
 - 389
 _____
```

6.
```
   4032
 - 3543
 ______
```

7.
```
   6007
 - 1852
 ______
```

8.
```
   8317
 - 6454
 ______
```

सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा गुणा कीजिए।

9. 42×48

10. 103×107

11. 294×206

12. 413×487

सूत्र न्यूनेन पूर्वेण द्वारा गुणा कीजिए।

13. 54×99 14. 214×999

15. 47×999 16. 342×99999

17. 73×9 18. 467×99

वैदिक विधि से गुणा कीजिए।

19. $15\frac{5}{7}\times15\frac{2}{7}$ 20. $24\frac{10}{13}\times24\frac{3}{13}$

21. $4\cdot5\times4\cdot5$ 22. $9\cdot85\times9\cdot15$

1.05 विनकुलम (ऋणांक) संख्या

विनकुलम प्रयोग की संकल्पना वैदिक गणित की देन है। विनकुलम प्रयोग से गणनाएँ छोटी एवं सरल तथा कभी–कभी मौखिक भी हो जाती है। इस प्रयोग से बड़े अंक $(6,7,8,9)$ वाली संख्याएँ छोटे अंक $(0,1,2,3,4,5)$ वाली संख्याओं में बदली जाती हैं। जिससे गणनाएँ आसान हो जाती है। आजकल कम्प्यूटर में भी विनकुलम (ऋणांक) संख्याओं का प्रयोग होता है। रेखायुक्त अंक $\overline{2}, \overline{4}$ आदि विनकुलम अंक या ऋणांक कहलाते हैं। इन अंको का मान क्रमशः –2 तथा –4 होता है। यह छोटी रेखा विनकुलम रेखा या विनकुलम चिह्न कहलाती है। किसी भी सामान्य संख्या में धनात्मक अंक तथा ऋणांक एक साथ किसी भी स्थान पर हो सकते हैं।

जैसे $2\overline{3}$ अथवा $\overline{2}\ \overline{4}$ आदि। संख्या $1\overline{2}4$ को एक विनकुलम दो विनकुलम चार पुकारा जाता है।

1.06 आधार, उपाधार, विचलन

आधार :

आधार का अर्थ यहाँ संख्या आधार से है। एक से बड़ी कोई भी वास्तविक संख्या आधार का रूप ले सकती है। गणनाओं को सरल बनाने और उनका उत्तर सहज रूप में प्राप्त करने हेतु वैदिक गणित में अधिकतर 10 या 100 या 10 की किसी घात को आधार माना जाता है। हमारे यहाँ प्रचलित दाशमिक संख्या पद्धति में भी आधार दस ही होता है।

उपाधार :

उपाधार आधार का ही गुणज होता है। अधिकतर यह शून्यान्त संख्या होती है।

यदि आधार = 10 तो उपाधार =10 $\times$क, जबकि क = पूर्णसंख्या।

यदि आधार = 100 तो उपाधार =100 $\times$क, जबकि क = पूर्णसंख्या।

आधार के स्थान पर उपाधार के प्रयोग से गणनाएॅ सरल तो हो जाती हैं परन्तु उत्तर के पूर्व भाग में समायोजन करना पड़ता है। आगे आने वाले उदाहरणों से यह स्पष्ट हो जायेगा।

विचलन :

जब दी हुई संख्याओं में से आधार अथवा उपाधार घटा दिया जाये तो शेषफल विचलन कहलाता है। अतः

विचलन = संख्या – आधार अथवा **विचलन = संख्या –उपाधार**

यदि संख्या आधार या उपाधार से बड़ी होती है तो विचलन धनात्मक होता है। यदि संख्या छोटी होती है तो विचलन ऋणात्मक होता है। आधार में जितने शून्य होते हैं उतने ही अंक विचलन में रखे जाते हैं जैसे

आधार $= 10$ **के सापेक्ष संख्या** 18 **का विचलन**

$= +8$

तथा आधार $= 100$ **के सापेक्ष संख्या** 94 **का विचलन**

$= -06$

1.07 सूत्र निखिलम् नवतः चरमं दशतः

(क) अर्थ : सूत्र निखिलम् का अर्थ है, ''चरमं अंक दस में से तथा (शेष) निखिलम् अंक 9 में से''। प्राचीन भारतीय गणित में अंक 9 को परम अंक अथवा ब्रह्म अंक तथा दस को पूर्ण संख्या कहते हैं परन्तु यहाँ पर सूत्र का संकेत व्यवकलन संक्रिया से है। विनकुलम, व्यवकलन, गुणन, वर्ग, धनफल, भाग संबंधी अनेक अनुप्रयोग इस सूत्र पर आधारित हैं।

(ख) अनुप्रयोग

(i) सामान्य संख्याओं को विनकुलम संख्या में बदलना

(सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण + सूत्र निखिलम्)

जब सामान्य संख्या में प्रत्येक अंक 5 या 5 से बड़ा होता है तो निखिलम् विधि से उसे विनकुलम संख्या में बदला जा सकता है।

विधि : (1) संख्या के चरमं अंक (इकाई अंक) को 10 में से घटाइये।

(2) संख्या के शेष अंको को 9 में से घटाइये।

(3) शेषफल के प्रत्येक अंक पर विनकुलम रेखा खींचिये।

(4) शेषफल के पूर्व अंक 0 अथवा 5 से छोटे अंक पर एकाधिक चिह्न लगाइये।

विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण 8: विनकुलम् संख्या में बदलना

1. 898
$= 0898$
$= \dot{0}\bar{1}0\bar{2}$
$= 1\bar{1}0\bar{2}$

2. 18469
$= \dot{1}\bar{2}\dot{4}\bar{3}\bar{1}$
$= 2\bar{2}5\bar{3}\bar{1}$

टिप्पणी : (1) जब सामान्य संख्या के बड़े अंको के बीच में 5 से छोटा अंक आ जाता है तो विधि दुबारा प्रारम्भ कीजिए।

(2) अंक 0 पर विनकुलम रेखा नहीं खींची जाती है।

(ii) विनकुलम संख्याओं को सामान्य संख्या में बदलना

(सूत्र एक न्यूनेन पूर्वेण + सूत्र निखिलम्)

विधि : (1) चरमं अंक के धनात्मक मान को 10 में से घटाइये।

(2) शेष निखिलम् अंको के धनात्मक मानों को 9 में से घटाइये।

(3) अंत में विनकुलम रेखा विहीन अंक का एक न्यून कीजिए।

(4) आवश्यकतानुसार उपर्युक्त क्रियाओं की आवृत्ति कीजिए।

विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण 9: सामान्य् संख्या में बदलिये।

1. $2\bar{4}\bar{3}$
$= \dot{2}57$
$= 157$

2. $6\bar{2}\bar{4}5\bar{3}\bar{2}$
$= \dot{6}76\dot{5}68$
$= 576468$

(iii) दो संख्याओं का गुणन : (सूत्र निखिलम् – आधार)

जब दो संख्याएँ आधार = 10 या 100 या 10 की किसी घात के निकट होती हैं तो उनका गुणनफल सूत्र निखिलम् – आधार द्वारा बड़ी सरलता से ज्ञात किया जा सकता है।

विधि : (1) संख्याओं के अनुसार उनका निकटतम आधार 10 या 100 चुनिये।

(2) आधार के सापेक्ष विचलनों को उनकी संख्या के सामने लिखिए।

(3) तिरछी रेखा से गुणनफल स्थान के दो भाग कीजिए।

(4) दक्षिण पक्ष में विचलनों का गुणनफल लिखिए।

(5) बॉये पक्ष में एक संख्या + दूसरी संख्या का विचलन लिखिए।

(6) आधार में जितने शून्य् उतने ही अंक दक्षिण पक्ष में रखिये। अंक संख्या की कमी 0 लिखकर पूरी कीजिए। यदि अंक अधिक हो तो बांये पक्ष में जोड़िये।

(7) विचलनों का गुणनफल यदि ऋणात्मक हो तो बांये पक्ष से एक आदि लेकर इसे धनात्मक रुप में बदलिये। स्मरण रहे कि बांये पक्ष से आये एक का मान दक्षिण पक्ष में आधार के बराबर हो जाता है। विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण 10: निखिलम् (आधार) विधि से गुणा कीजिए।

1. 12×14, आधार $= 10$

$$\begin{array}{ll} =12 & +2 \\ \underline{\;14} & \underline{+4\;} \end{array}$$

$= 14 + 2 / 2 \times 4$

$= 168$

संकेत

(i) विचलन $= +2, +4$

(ii) बायें पक्ष में $12 + 4$ या $14 + 2$ लेते हैं।

(iii) दक्षिण पक्ष में विचलनों का गुणन $= 8$ (एक अंक)

2. 92×87, आधार $= 100$

$$\begin{array}{ll} =92 & -08 \\ \underline{\;87} & \underline{-13\;} \end{array}$$

$= 92 - 13 / (-08)(-13)$

$= 79 / {}_{1}04 = 8004$

संकेत

(i) विचलन $= -08, -13$

(ii) दक्षिण पक्ष में दो अंक

अतः 104 का 1 अंक बांये पक्ष में

3. 7×18, आधार $= 10$

$$\begin{array}{ll} =7 & -3 \\ \underline{\;18} & \underline{+8\;} \end{array}$$

$= 7 + 8 / (-3) \times 8$

$= 15 / -24$

$= 15 - 3 / 30 - 24$

$= 12 / 30 - 24$

$= 126$

संकेत

(i) गुणनफल $= 15 / -24$

(ii) बांये पक्ष से 3 दक्षिण पक्ष में लाइये

(iii) दक्षिण पक्ष में 3 का स्थानीयमान $= 30$

4. 1007×1012

$= 1007 \quad +007$

$\quad 1012 \quad +012$

$= 1012 + 7/084$

$= 1019084$

संकेत

(i) आधार = 1000

(ii) दक्षिण पक्ष में तीन अंक अतः 84 से पूर्व 0 लिखा।

(iv) दो संख्याओं का गुणन

(सूत्र निखिलम् – उपाधार)

किसी प्रश्न में विचलन इतने बड़े प्राप्त हो जाते हैं कि उनका गुणा करना ही कठिन हो जाता है। ऐसी स्थिति में उपाधार की संकल्पना की जाती है।

उपाधार अंक का गुणनफल के बांये पक्ष से गुणा किया जाता है। दाहिना पक्ष पूर्व समान रहता है।

विधि निम्न उदाहरणों से स्पष्ट की जा रही है।

उदाहरण 11: निखिलम् उपाधार विधि से गुणा कीजिए।

1. 32×33

$= 32 \quad +2$

$\quad 33 \quad +3$

$= 35 \times 3/6$

$= 1056$

संकेत

(i) आधार = 10, उपाधार $= 10 \times 3 = 30$, आधार अंक =3

(ii) उपाधार से विचलन $= +2$ तथा $+3$

(iii) बांये पक्ष में उपाधार अंक 3 का गुणा $= 105$

2. 54×56

$= 54 \quad +4$

$\quad 56 \quad +6$

$= 60 \times 5/{}_{2}4$

$= 300/{}_{2}4$

$= 3024$

संकेत

(i) उपाधार $= 10 \times 5$, आधार अंक =5

(ii) बांये पक्ष में उपाधार अंक 5 का गुणा $= 60 \times 5 = 300$

(iii) उसके बाद दक्षिण पक्ष का समायोजन करना चाहिये।

3. 54×56

$= 54 \quad +4$

$\quad 56 \quad +6$

$= 60 \times \frac{1}{2} \Big/ 24$

$= 3024$

संकेत

(i) आधार = 100,

उपाधार $= 100 \times \frac{1}{2} = 50$

(ii) उपाधार से विचलन $= +4$ तथा $+6$

(iii) उपाधार अंक $= \frac{1}{2}$

(iv) दक्षिण पक्ष में दो अंक

4. 206×212

$$= 206 \quad +06$$
$$\;\; 212 \quad +12$$
$$= 218 \times 2/72$$
$$= 43672$$

संकेत

(i) आधार $= 100$,

उपाधार $= 100 \times 2$

(ii) उपाधार अंक $= 2$

(iii) विचलन $= +06$ तथा $+12$

(v) तीन संख्याओं का गुणन : (सूत्र निखिलम् – आधार)

गुणन संक्रिया के तीन खण्ड होते हैं।

प्रथम खण्ड = कोई एक संख्या + शेष दो संख्याओं के विचलन

मध्य खण्ड = दो–दो विचलनों के गुणनफलों का योग

तृतीय खण्ड = तीनों विचलनों का गुणन

सूत्र आधारित विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण 12: सूत्र निखिलम् – आधार द्वारा गुणा कीजिए।

1. $91 \times 93 \times 96$, आधार $= 100$

संख्या	विचलन
91	–09
93	–07
96	–04

$$= 93 - 09 - 04/36 + 28 + 63/(-9)(-4)(-7)$$

या

91-07-04

या

96-09-07

$$= 80/{}_{1}27/(-252)$$
$$= 81/27 - 3/300 - 252$$
$$= 81/24/48$$
$$= 812448$$

संकेत

(i) विचलन $= -09, -07, -04$

(ii) तृतीय खण्ड में $(-09)(-07)(-04) = -252$

(iii) मध्य खण्ड $= (-09)(-04) + (-07)(-04) + (-09)(-07) = 127$

(iv) मध्यखण्ड से 3 लिया तृतीय खण्ड में

(v) तृतीय खण्ड में 3 का स्थानीयमान $= 300$

$\therefore\; 300 - 252 = 48$

(vi) मध्य खण्ड में 24 तथा 1 प्रथम खण्ड में जोड़ा $80 + 1$

2. $103 \times 105 \times 106$, आधार $= 100$

संख्या	विचलन
103	+03
105	+05
106	+06

$$= 106 + 03 + 05/15 + 30 + 18/90$$
$$= 114/63/90$$
$$= 1146390$$

संकेत

(i) आधार $= 100$

(ii) विचलन $+03, +05, +06$

(iii) शेष प्रक्रिया उपर्युक्तानुसार

3. $12 \times 13 \times 15$, आधार = 10

संख्या	विचलन
12	+02
13	+03
15	+05

$= 12+3+5/6+15+10/30$

$= 20/_3 1/_3 0$

$= 2340$

संकेत

(i) आधार = 10

(ii) विचलन = +2, +3, +5

(iii) शेष प्रक्रिया उपर्युक्तानुसार

टिप्पणी : आधार में जितने शून्य, उतने ही अंक तृतीय खण्ड एवं मध्य खण्ड में रखिये।

(vi) तीन संख्याओं का गुणन

(सूत्र निखिलम् – उपाधार)

निखिलम् उपाधार विधि में प्रथम खण्ड में $(\text{उपाधार अंक})^2$ का तथा मध्य खण्ड में (उपाधार अंक) का गुणन किया जाता है। आधार विधि तथा उपाधार विधि में यही अन्तर है। विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण 13: निखिलम् उपाधार विधि से गुणा कीजिए।

1. $21 \times 24 \times 25$

संख्या	विचलन
21	+1
24	+4
25	+5

$= 2^2(21+4+5)/2(4+20+5)/1 \times 4 \times 5$

$= 4 \times 30/2 \times 29/20$

$= 120/_5 8/_2 0$

$= 12600$

संकेत

(i) आधार = 10, उपाधार = 10×2

(ii) विचलन = +1, +4, +5

(iii) मध्य व तृतीय खण्ड में एक–एक अंक

2. $502 \times 503 \times 504$

संख्या	विचलन
502	+02
503	+03
504	+04

$= 5^2(502+03+04)/5(6+12+8)/2 \times 3 \times 4$

$= 25 \times 509/5 \times 26/24$

$= 12725/130/24$

$= 127263024$

संकेत

(i) आधार = 100, उपाधार = 100×5

(ii) उपाधार अंक = 5

(vii) भाग संक्रिया : (सूत्र निखिलम्)

जब भाजक में प्रत्येक अंक 5 से बड़ा हो तो सूत्र निखिलम् आधारित विधि बड़ी सुविधाजनक रहती है।

प्रश्न लिखने की विधि

दो खड़ी रेखाएँ खींचकर निर्धारित स्थान के तीन खण्ड बनाइये। बांयी ओर से प्रथम खण्ड में भाजक और उसके नीचे उसकी पूरक संख्या लिखिए। आधार में जितने शून्य हैं भाज्य के इतने ही अंक इकाई अंक की तरफ से तीसरे खण्ड में लिखिए। भाज्य के शेष अंक मध्य खण्ड में लिखिए।

निखिलम् विधि :

बांयी ओर से भाज्य के प्रथम अंक को नीचे योगफल के स्थान पर लिखिए। पूरक संख्या से इस अंक का गुणा कर गुणनफल को मध्य खण्ड के ही दूसरे अंक के नीचे लिखिए। पूरक संख्या में दो अंक हों तो गुणनफल को तीसरे अंक के नीचे भी लिखिए। केवल दूसरे स्थान के नीचे ऊपर के अंकों को जोड़िये और योगफल के स्थान पर लिखिए। अभी तीसरे स्थान के अंकों को नहीं जोड़ना है। योग में लिखे दूसरे अंक का फिर पूरक संख्या से गुणा कर गुणनफल को भाज्य के तीसरे अंक के नीचे लिखिए और जोड़िये। इस प्रक्रिया की आवृत्ति करते रहिये जब तक कि गुणनफल के अंक तृतीय खण्ड के इकाई अंक के नीचे तक न लिख जाये। अन्त में फिर जोड़िये।

मध्य खण्ड का नीचे लिखा योगफल = भागफल

तथा तृतीय खण्ड के नीचे लिखा योगफल = शेषफल होता है।

यदि प्राप्त शेषफल भाजक से बड़ा हो तो उसमें से भाजक घटाकर संशोधित भागफल आर शेषफल प्राप्त कीजिए।

विधि निम्न उदाहरणों से स्पष्ट की जा रही है।

उदाहरण 14:(i) $311 \div 8$, आधार $= 10$

खण्ड

प्रथम	मध्य		तृतीय
8	3	1	1
2		6	–
			14
	3	7	15
		+1	–8
	3	8	7

संकेत

(i) भागफल $= 37$, शेषफल $= 15$

(ii) शेषफल $>$ भाजक

अतः संशोधन आवश्यक।

संशोधित भागफल $= 38$

संशोधित शेषफल $= 7$

(ii) $10025 \div 88$, आधार $= 100$

8	8	1	0	0	2	5
1	2		1	2	–	–
				1	2	–
					3	6
		1	1	3	8	1

संकेत

(i) पूरक संख्या $= 100 - 88 = 12$

(ii) मध्य खण्ड का 1 नीचे लिखा $1 \times 12 = 2$ के अंक मध्य खण्ड में आगे के अंकों के नीचे दर्शाये अनुसार लिखें

(iii) $0 + 1 = 1$ मध्य खण्ड में नीचे लिखें

(iv) $1 \times 12 = 12$ मध्य एवं तृतीय खण्ड में दर्शायें अनुसार लिखे।

(v) $0 + 2 + 1 = 3$ मध्य खण्ड में नीचे लिखें

(vi) $3 \times 12 = 36$ दर्शायें अनुसार लिखे

(vii) योग करें

(viii) भागफल $= 113$

(ix) शेषफल $= 81$

(viii) वर्ग संक्रिया : (सूत्र निखिलम् आधार – उपाधार)

सूत्र निखिलम् आधार–उपाधार आधारित विधियों द्वारा दो संख्याओं का गुणन हम पीछे सीख चुके हैं। [देखिये 1.07 (ख) अनुप्रयोग (iii) व (iv)] जब दोनों संख्याएँ परस्पर समान हो तो यही वर्ग संक्रिया है। निम्न विधियों द्वारा संख्याओं का वर्ग ज्ञात किया जा रहा है।

आधार विधि : सूत्रः– (संख्या)^2 = संख्या + विचलन / (विचलन)^2

1. $17^2 = 17 \times 17$, आधार $= 10$, विचलन $= +7$

निखिलम आधार विधि

$= 17 + 7$

$ 17 + 7$

$17 + 7 / 49$

$= 24/_4 9 = 289$

अथवा

सूत्र विधि

$17^2 = 17 + 7/7^2$

$= 24/_4 9$

$= 289$

2. $98^2 = 98 \times 98$, आधार $= 100$, विचलन $= -02$

$= 98 - 02/(-02)^2$

$= 9604$

3. $104^2 = 104 + 04/(04)^2$

$= 10816$

4. $115^2 = 115 + 15/15^2$

$= 130/_2 25$

$= 13225$

उपाधार विधि : सूत्रः– $(\text{संख्या})^2 = \text{उपाधार अंक}(\text{संख्या} + \text{विचलन})/(\text{विचलन})^2$

5. $23^2 = 23 \times 23$, आधार $= 10$, उपाधार $= 10 \times 2$, विचलन $= +3$

निखिलम उपाधार विधि अथवा सूत्रविधि–

संख्या विचलन

$= 23 \quad +3$

$ 23 \quad +3$

$= 2(23 + 3)/3^2$

$= 529$

सूत्रविधि–

$23^2 = 2(23 + 3)/3^2 = 529$

6. 64^2, आधार $= 10$, उपाधार $= 10 \times 6$, विचलन $= +04$

$= 6(64 + 4)/4^2$

$= 408/_1 6$

$= 4096$

7. 308^2, आधार $=100$, उपाधार $=100\times3$, विचलन $=+08$

$=3(308+08)/(08)^2$

$=94864$

(ix) घनफल :

(सूत्र निखिलम् आधार – उपाधार)

सूत्र निखिलम् आधार – उपाधार आधारित विधियों द्वारा तीन संख्याओं का गुणन हम पढ़ चुके हैं। [देखिये अनुच्छेद 1.07. (ख) अनुप्रयोग (v) तथा (vi)] । तीनों संख्याएँ परस्पर समान होने पर उपर्युक्त विधियों द्वारा घनफल ज्ञात किया जा सकता है।

आधार विधि :

सूत्र : घनफल = संख्या $+2\times$ विचलन $/\ 3\times(\text{विचलन})^2\ /\ (\text{विचलन})^3$

1. 12^3, आधार $=10$, विचलन $=+2$

$=12+2\times(2)\ /\ 3\times(2)^2\ /\ (2)^3$

$=16\ /\ 12\ /\ 8=1728$

2. 105^3, आधार $=100$, विचलन $=+05$

$=105+2\times(05)\ /\ 3\times(05)^2\ /\ (05)^3$

$=115\ /\ 75\ /\ {}_1 25=1157625$

3. 98^3, आधार $=100$, विचलन $=-02$ (इसमें विचलन ऋणात्मक है)

$=98+2\times(-02)\ /\ 3\times(-02)^2\ /\ (-02)^3$

$=94\ /\ 12\ /\ -08$ (द्वितीय खण्ड में 12 से 1 तृतीय खण्ड में लिया)

(तृतीय खण्ड में 1 का मान 100 है, $\because$ यहाँ आधार 100 है)

$=941192$

उपाधार विधि :

सूत्र : घनफल $=(\text{उपाधार अंक})^2$ (संख्या $+2\times$ विचलन) $/$ उपाधार अंक $\times3\times(\text{विचलन})^2\ /\ (\text{विचलन})^3$

4. 35^3 आधार $=10$, उपाधार अंक $=3$, विचलन $=5$

$=3^2(35+2\times5)\ /\ 3\times3\times(5)^2\ /\ 5^3$

$=9\times45\ /\ 9\times25\ /\ 125$

$=405\ /\ {}_{22}5\ /\ {}_{12}5=42875$

5. 497^3

$$=5^2\left\{497+2\times(-03)\right\}\Big/\,5\times3\times(-03)^2\Big/\,(-03)^3$$

$$=25\times491\Big/\,5\times27\Big/-27$$

$$=12275\Big/_{1}35\Big/(-27)$$

$$=12276\Big/\,34\Big/\,100-27$$

$$=122763473$$

प्रश्नमाला 1.2

विनकुलम संख्या में बदलिये।

1. 89
2. 878
3. 9687
4. 6578

सामान्य संख्या में बदलिये।

5. $3\bar{2}1$
6. $2\bar{4}\bar{3}\bar{2}$
7. $4\bar{3}0\bar{2}$
8. $450\bar{4}\bar{9}$

सूत्र निखिलम् द्वारा गुणा कीजिए।

9. 102×107
10. 94×92
11. 72×73
12. 203×204
13. $11\times12\times13$
14. $97\times98\times99$
15. $102\times103\times104$
16. $99\times101\times103$

निम्न का वर्ग ज्ञात कीजिए :

17. 103
18. 95
19. 204
20. 225

निम्न का धनफल ज्ञात कीजिए :

21. 15
22. 91
23. 32
24. 208

निखिलम विधि से भाग दीजिए :

25. $1245\div97$
26. $311\div8$
27. $1013\div88$

1.08 सूत्र ऊर्ध्व तिर्यग्भ्याम्

सूत्र ऊर्ध्व तिर्यग्भ्याम् द्वारा गुणन का कोई भी प्रश्न अभ्यास के पश्चात् मौखिक हल किया जा सकता है। केवल उत्तर लिखने की सुविधा चाहिये। सूत्र प्रयोग बांयी अथवा दाहिनी दोनों तरफ से किया जा सकता है।

(क) अर्थ :

सूत्र दो शब्दों से बना है 'ऊर्ध्व' तथा 'तिर्यक'। ऊर्ध्व का अर्थ है 'ठीक ऊपर' या 'सीधा' या 'खड़ा'। इसका संकेत है ↑ या ↕ और इसकी क्रिया है ''ऊपर नीचे लिखे अंको का गुणन''। शब्द तिर्यक का अर्थ है 'तिरछा'। इसका संकेत है ↗ या ↖ या ⤫ और इसकी क्रिया है 'तिरछे लिखे अंको का गुणन'।

(ख) अनुप्रयोग

(i) गुणन संक्रिया

विधि : प्रश्न में दिये हुए अंको से सर्वप्रथम समूह रचना की जाती है। किसी संख्या में यदि कुछ अंक कम हो तो उससे पहले उतने ही शून्य लगा कर दोनों संख्याओं की अंक संख्या समान कर लीजिए। इन स्तम्भों से समूह रचना की जाती है।

$$\boxed{\text{समूह संख्या} = \text{स्तम्भ संख्या} \times 2 - 1 = \text{विषम संख्या}}$$

इन समूहों में संकेत लगा कर, संकेतानुसार गुणा किया जाता है। अंत में समूहसः गुणनफलों को एक विशेष पद्वति से उनके क्रमानुसार लिख कर जोड़ दिया जाता है। यही अभीष्ट गुणनफल है।

टिप्पणी : किसी भी समूह में संकेतों की कुल संख्या उसके स्तम्भ संख्या के समान होती है। ये सभी संकेत एक उभयनिष्ठ बिन्दु से निकलते हैं। समस्थान पर बने समूह में सभी संकेत तिर्यक जोड़े में होते हैं। विषय स्थान पर स्थित में समूह में ऊर्ध्व संकेत केवल एक ही होता है जो प्रथम तथा अन्तिमसमूह में लगता है अथवा किसी समूह के मध्य स्तम्भ में लगता है। शेष संकेत तिर्यक जोड़े में होते हैं। मध्य समूह सबसे बड़ा और प्रश्न के समान होता है। विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

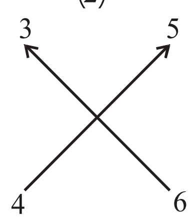
उदाहरण : निम्न समूहों में संकेत लगाकर गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(1)

$= 6 \times 9$
$= 54$

ऊर्ध्व

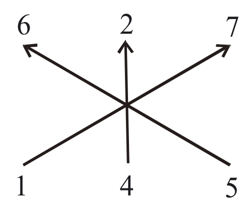
(2)



$= 6 \times 3 + 4 \times 5$
$= 38$

तिर्यक जोड़ा

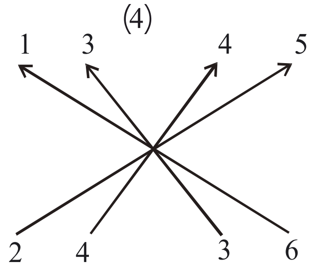
(3)



$= 5 \times 6 + 1 \times 7 + 4 \times 2$
$= 45$

तिर्यक जोड़ा + ऊर्ध्व

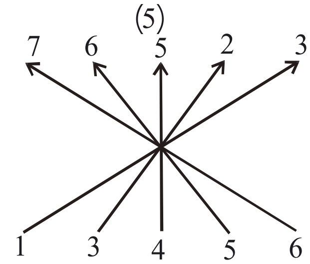
(4)



$= (6 \times 1 + 2 \times 5)$
$+ (4 \times 4 + 3 \times 3)$
$= 41$

दो तिर्यक जोड़े

(5)



$= (6 \times 7 + 1 \times 3)$
$+ (5 \times 6 + 3 \times 2)$
$+ 4 \times 5$
$= 101$

दो तिर्यक जोड़े + ऊर्ध्व

सूत्र ऊर्ध्व तिर्यक से गुणा कीजिए।

समूह बनेंगे = 5

$$\begin{array}{cccccc} & & & 1 & 4 & 7 \\ & & \times & 0 & 2 & 8 \\ \hline =0 & 2 & 6 & 6 & 6 \\ & 1 & 4 & 5 & \\ \hline = & 4 & 1 & 1 & 6 \end{array}$$

V	IV	III	II	I
1	14	147	47	7
0	02	028	28	8
= 0	= 2	= 16	= 46	= 56

उपरोक्त, पाँचों गुणनफलों का योग निम्न प्रकार किया जाता है।

(i) 56 के 6 को प्रथम पंक्ति में इकाई स्थान पर तथा 5 को II पंक्ति के दहाई स्थान पर लिखे।

(ii) 46 के 6 को प्रथम पंक्ति में दहाई स्थान पर तथा 4 को II पंक्ति में सेंकड़ें के स्थान पर लिखे।

(iii) इसी प्रकार 16, 2, 0 को I पंक्ति तथा II पंक्ति में दर्शाये अनुसार संख्या समायोजित कर सब पदों का योग करे।

(ii) वर्ग संक्रिया :

(सूत्र ऊर्ध्व तिर्यग्भ्याम् आधारित द्वन्द योग विधि)

सूत्र ऊर्ध्व तिर्यग्भ्याम् आधारित द्वन्द योग विधि द्वारा किसी भी संख्या का वर्ग एक पंक्ति में लिखा जा सकता है। द्वन्द के लिये 'D' संकेत का प्रयोग किया गया है।

(1) 3 के लिये, $D = 3^2 = 9$

(2) 42 के लिये, $D = 2 \times (4 \times 2) = 16$

(3) 623 के लिये, $D = 2 \times (6 \times 3) + 2^2 = 40$

(4) 7235 के लिये, $D = 2 \times (7 \times 5) + 2(2 \times 3) = 82$

निम्न उदाहरणों से अनुप्रयोग स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण 15: (1) $635^2 = 6$ का द्वन्द / 63 का द्वन्द / 635 का द्वन्द / 35 का द्वन्द / 5 का द्वन्द

या $635^2 = 6^2 \,/\, 2\times6\times3 \,/\, 2\times6\times5+3^2 \,/\, 2\times3\times5 \,/\, 5^2$

$= 36 \,/\, 36 \,/\, 69 \,/\, 30 \,/\, 25$

$= 36 \,/\, {}_{3}6 \,/\, {}_{6}9 \,/\, {}_{3}0 \,/\, {}_{2}5$

$= 403225$

(2) $53214^2 = 25 \,/\, 30 \,/\, 29 \,/\, 22 \,/\, 50 \,/\, 28 \,/\, 17 \,/\, 8 \,/\, 16$

$= 2831729796$

(iii) वर्गमूल :

(सूत्र ऊर्ध्व तिर्यग्भ्याम् आधारित द्वन्द योग विधि)

यह संक्रिया उपर्युक्त संक्रिया की विलोम है।

सूत्र आधारित विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण 16:

(1) 6889 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

	6 8	8 9
16		4 0
	8	3

अतः वर्गमूल $=83$

संकेत

(i) $68-8^2=4$, नया भाज्य $=48$, भाजक $=8\times2=16$

(ii) $48\div16$, भागफल अंक $=3$, शेषफल $=0$

(iii) नया भाज्य $=09$

(iv) अन्तिम शेषफल $=9-3^2=0$

(2) 169744 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

	1 6	9 7 4 4
8		0 1 0 0
	4	1 2

अतः वर्गमूल $=412$

संकेत

(i) $16-4^2=0$, नयाभाज्य $=09$, भाजक $=4\times2=8$

(ii) $9\div8$, भागफल अंक $=1$, शेषफल $=1$,

(iii) नयाभाज्य $=17$, संशोधित भाज्य $=17-1^2=16$

(iv) $16\div8$, भागफल अंक $=2$, शेषफल $=0$.

(v) अन्तिम शेषफल $=04-2\times1\times2=0$ तथा $04-2^2=0$

(3) 10329796 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

	1 0	3 2 9 7 9 6
6		1 1 2 1 0 1
	3	2 1 4

अतः वर्गमूल $=3214$

संकेत :

(i) $10-3^2=1$, नयाभाज्य $=13$, भाजक $=3\times2=6$

(ii) $13\div6$, भागफल अंक $=2$, शेषफल $=1$

(iii) नया भाज्य $=12$, संशोधित भाज्य $=12-2^2=8$

(iv) $8\div6$, भागफल अंक $=1$, शेषफल $=2$

(v) नया भाज्य $=29$, संशोधित भाज्य $=29-2\times1\times2=25$

(vi) $25\div6$, भागफल अंक $=4$, शेषफल $=1$

(vii) नया भाज्य $=17$, अन्तिम शेषफल ज्ञात करना है।

(viii) $17-\left(2\times4\times2+1^2\right)=0$ लिखा 9 से पहले।

(ix) $9-2\times1\times4=1$ लिखा 6 से पहले।

(x) $16-4^2=0=$ अन्तिम शेषफल।

(iv) भाग संक्रिया : (ध्वजांक विधि)

सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् आधारित सर्व व्यापक विधि द्वारा भाग संक्रिया का कोई भी बड़े से बड़ा प्रश्न न्यूनतम गणनाओं से हल किया जा सकता है। भाजक को सुविधानुसार दो भागों में विभाजित किया जाता है। मुख्यांक तथा ध्वजांक।

अर्थ :

(i) ध्वजांक : भाजक के इकाई अंक अथवा इकाई युक्त कई अंक जो घातांक के स्थान पर लिखे जाते हैं ध्वजांक कहलाते है।

(ii) मुख्यांक : भाजक का शेषफल जो आधार स्थान पर लिखा जाता है और वास्तविक भाग संक्रिया सम्पन्न करता है मुख्यांक कहलाता है।

विधि :

(1) भाग संक्रिया के स्थान को तीन खण्डों में विभाजित करना

(2) प्रथम खण्ड में आधार स्थान पर मुख्यांक तथा घातांक स्थान पर ध्वजांक लिखना।

(3) ध्वजांक अंक संख्या के समान भाज्य के उतने ही अंक (इकाई से लेकर) तृतीय खण्ड में तथा शेष अंक मध्य खण्ड में लिखना।

शेष विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण 17:

(1) $23754 \div 74$ (ध्वजांक विधि)

$$
\begin{array}{r|ccc|l}
4 & 2\,3 & 7 & 5 & 4 \\
7 & & 2 & 1 & 0 \\
\hline
 & 3 & 2 & 1 & 4-1\times 4=0
\end{array}
$$

संकेत :

(i) $23 \div 7$, भागफल $\text{अंक}_1 = 3$, लिखा क्षितिज रेखा के नीचे तथा शेषफल $= 2$ लिखा 7 से पहले और नीचे।

(ii) नया भाज्य $= 27$,
संशोधित भाज्य = नया भाज्य – भागफल अंक × ध्वजांक $= 27 - 3 \times 4 = 15$

(iii) $15 \div 7$, भागफल $\text{अंक}_2 = 2$, शेषफल $=1$ संकेत (i) के अनुसार लिखे।

(iv) संशोधित भाज्य $= 15 - 2 \times 4 = 7$

(v) $7 \div 7$, भागफल $\text{अंक}_3 = 1$, शेषफल $= 0$ लिखे व्यवस्था अनुसार।

(vi) अन्तिम शेषफल $= 04 - 1 \times 4 = 0$ [तृतीय खण्ड आने पर]

$\therefore$ भागफल $= 321$, शेषफल $= 0$

(2) $21112 \div 812$ (ध्वजांक विधि)

$$
\begin{array}{r|ccc|l}
1\,2 & 2 & 1 & 1 & 1\,2 \\
8 & & 5 & & 1 \\
\hline
 & & 2 & 6 & 112-100-12=0
\end{array}
$$

संकेत :

(i) $21 \div 8$, भागफल $\text{अंक}_1 = 2$, शेषफल $= 5$

(ii) नया भाज्य $= 51$, संशोधित भाज्य $= 51 - 2 \times 1 = 49$

(iii) $49 \div 8$, भागफल $\text{अंक}_2 = 6$, शेषफल $=1$

(iv) संशोधित भाज्य अथवा अन्तिम शेषफल

$$= 112 - (6\times 1 + 2\times 2)10 - 6\times 2$$
$$= 112 - 100 - 12 = 0$$

अतः भागफल $= 26$, शेषफल $= 0$

टिप्पणी : (1) $\begin{array}{lcc} \text{ध्वजांक} & 1 & 2 \\ \text{भागफल} & 2 & 6 \end{array}$ से बने तीन समूह

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1\;2 & 2 \\ 2 & 2\;6 & 6 \\ 1\times 2 & (6\times 1+2\times 2) & 6\times 2 \\ =2 & =10 & =12 \end{array}$$

(2) (i) प्रथम समूह का गुणनफल $=2$ जो 51 में से घटाया गया है।

(ii) मध्य समूह का गुणनफल $=10\times 10=100$ घटाया गया 112 में से।

(iii) तृतीय समूह का गुणनफल $=12$ भी घटाया गया 112 में से।

1.09 सूत्र परावर्त्य योजयेत्

सूत्र का प्रयोग अनेक क्षेत्रों में होता है जैसे समीकरणों का हल, जादू के वर्गों की रचना आदि।

(क) अर्थ :

सूत्र परावर्त्य योजयेत् का अर्थ है ''पक्षान्तरण कर उपयोग करें'' अथवा ''विलोम संक्रिया का प्रयोग करें''। जैसे पक्षान्तरण होते ही चिह्न $(+)$ का $(-)$, $(-)$ का $(+)$, $(\times)$ का $(\div)$, तथा $(\div)$ का $(\times)$ चिह्न हो जाता है। इसी प्रकार जादू के वर्ग में अन्तिम पंक्ति अथवा स्तम्भ में अंक रचना के बाद पुनः पहली पंक्ति या स्तम्भ में अंक रचना प्रारम्भ हो जाती है।

(ख) अनुप्रयोग :

भाग संक्रिया :

जब भाजक आधार =10 या 10 की घात के निकट होता है तथा उसका पहला अंक 1 होता है तो परावर्त्य योजयेत् सूत्र आधारित भाग संक्रिया सुविधाजनक होती है। जब भाजक का पहला 1 अंक नहीं होता परन्तु उसे 1 में समायोजित किया जा सकता है तब भी यह विधि प्रभावी है।

विधि :

(1) भाजक में से उसके निकटतम आधार को घटा कर विचलन ज्ञात कीजिए। विचलन में यदि 5 से बड़े अंक हों तो उन्हे विनकुलम प्रयोग से छोटे अंको में बदल दीजिए। अब विचलन के प्रत्येक अंक का चिह्न बदल दीजिए।

(2) (i) भाग संक्रिया के निर्धारित स्थान को तीन खण्डों मे ंविभाजित करें।

(ii) बांयी ओर से पहले खण्ड में भाजक, उसके नीचे विचलन तथा विचलन के नीचे उसके परिवर्तित अंक लिखे। अभ्यास होने पर परिवर्तित अंक सीधे भाजक के नीचे लिखे जा सकते हैं।

(iii) विचलन अंक संख्या अथवा आधार की शून्य अंक संख्या केसमान भाज्य के अंक तृतीय खण्ड में तथा भाज्य के शेष अंक मध्य खण्ड में लिखें।

(iv) आगे की क्रिया निखिलम् विधि के समान है।

विधि निम्न उदाहरणों से स्पष्ट की जा रही है।

उदाहरण 18:

(1) $1358 \div 113$, आधार $= 100$

	प्रथम खण्ड	मध्य खण्ड	तृतीय खण्ड
भाजक =	1 1 3	1 3	5 8
विचलन =	1 3	−1	−3 −
परिवर्तित अंक =	−1 −3		−2 −6
		1 2	0 2

संकेत : (i) मध्य खण्ड का 1 लिखा नीचे योग के स्थान पर।

(ii) यह अंक 1× परिवर्तित अंक 1− 3 लिखे 3 व 5 के नीचे।

(iii) 3−1 = 2 पुनः गुणनफल – 2– 6 लिखे 5 व 8 के नीचे।

योग करने पर भागफल = 12, शेषफल =02

(2) $395166 \div 1321$, आधार $= 1000$

	1 3 2 1	3 9 5	1 6 6
परिवर्तित अंक =	$\bar{3}$ $\bar{2}$ $\bar{1}$	$\bar{9}$ $\bar{6}$	$\bar{3}$ – –
		0	0 0 –
			3 2 1
		3 0 $\bar{1}$	1 8 7

भागफल $30\bar{1} = 299$

शेषफल $= 187$

प्रश्नमाला 1.3

सूत्र ऊर्ध्व तिर्यग्भ्याम् द्वारा गुणा कीजिए।

1. 486×26
2. 403×218
3. 906×246
4. 744×314

द्वन्द्व योग विधि द्वारा वर्ग ज्ञात कीजिए।

5. 44
6. 368
7. 1234
8. 2781

द्वन्द्व योग से वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

9. 23409
10. 189225
11. 389376
12. 1156

ध्वजांक विधि से भाग दीजिए।

13. $4532 \div 112$
14. $1234 \div 42$
15. $98765 \div 87$
16. $2101532 \div 879$

सूत्र परावर्त्य आधारित विधि से भाग दीजिए।

17. $1154 \div 103$ 18. $1358 \div 113$

19. $1432 \div 88$ 20. $14885 \div 123$

उत्तर जाँचने की विधियाँ

किसी भी संक्रियां से प्राप्त उत्तर की जांच करने के लिए दो विधियां प्रचलित हैं –

(क) नवांक विधि (ख) एकादशांक विधि

(क) नवांक विधि :

नवांक विधि में अंक 9 को आधार मान कर किसी संख्या का बीजांक ज्ञात किया जाता है। संख्या के अंकों अथवा अंको के योग में से 9 घटाने पर जो अंक बचता है वह इस संख्या का बीजांक कहलाता है। जैसे 947 का बीजांक = 2

विभिन्न संक्रियाओं में नवांक विधि का प्रयोग निम्न उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण 19:

(1) योग संक्रिया से प्राप्त उत्तर की जाँच :

	बीजांक
5 3 8 9	7
6 4 7 2	1
5 9 3 6	5
4 1 6 8	1
2 1 9 6 5	5

संकेत

(i) पंक्ति सः बीजांको का योग

$= 7 + 1 + 5 + 1 = 5$

(ii) योग का बीजांक

$= 2 + 1 + 9 + 6 + 5 = 5$

दोनो समान, अतः उत्तर सही।

(2) व्यवकलन संक्रिया से प्राप्त उत्तर की जाँच :

$$\begin{array}{r} 8\,1\,3\,4 \\ -\,5\,6\,7\,8 \\ \hline 2\,4\,5\,6 \\ \hline \end{array}$$

संकेत

(i) वियोज्य का बीजांक $= 7$ $\quad = 16$

(ii) वियोजक का बीजांक $= 8$ या $\quad -8$

(iii) शेषफल का बीजांक $= 8$ $\quad = 8$

दोनो समान, अतः उत्तर सही।

(३) गुणन संक्रिया से प्राप्त उत्तर की जाँच

$73 \times 77 = 5621$

(i) गुण्य का बीजांक $= 7 + 3 = 10 = 1$

(ii) गुणक का बीजांक $= 7 + 7 = 14 = 5$

(iii) दोनों बीजांको के गुणन का बीजांक $= 1 \times 5 = 5$

(iv) गुणनफल का बीजांक $= 5 + 6 + 2 + 1 = 5$

क्योंकि बांये पक्ष का गुणक =दक्षिण पक्ष का बीजांक अतः उत्तर सही है।

(4) भाग संक्रिया से प्राप्त उत्तर की जाँच

$4283 \div 7$, भागफल $= 611$, शेषफल $= 6$

हमें सिद्ध करना हैं कि

भाज्य का बीजांक = भाजक का बीजांक $\times$ भागफल का बीजांक

+ शेषफल का बीजांक

या $8 = 7 \times 8 + 6$

$= 62$

$= 8$

अतः उत्तर सही।

टिप्पणी:1. यदि प्रश्न की किसी पंक्ति अथवा स्तम्भ के अंकों का स्थान परस्पर बदल जाय तो भी बीजांक वही आता है और नवांक विधि से गलती की पकड़ नहीं हो पाती है।

2. वैदिक गणित में एक ही प्रश्न का उत्तर ज्ञात करने की अनेक विधियाँ हैं। एकदशांक विधि से भी उत्तर का सत्यापन किया जा सकता है।

(ख) एकादशांक विधि :

किसी संख्या के विषम स्थानों के अंको और समस्थानों के अंको के योगों का अन्तर उस संख्या का बीजांक कहलाता है। जैसे संख्या 63254 का

बीजांक $= 4 - 5 + 2 - 3 + 6 = 4$

विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है :

(i) योग संक्रिया **पंक्ति सः बीजांक**

63254	$4 - 5 + 2 - 3 + 6 = 4$
54327	$7 - 2 + 3 - 4 + 5 = 9$
89325	$5 - 2 + 3 - 9 + 8 = 5$
206906	$18 = 8 - 1 = 7$

योग का बीजांक $= 6 - 0 + 9 - 6 + 0 - 2 = 7$

दोनों परस्पर समान, अतः उत्तर सही।

(ii) व्यवकलन संक्रिया पंक्ति सः बीजांक

7348	$8 - 4 + 3 - 7 = 0$
-5249	$9 - 4 + 2 - 5 = 2$
2099	$\therefore$ अन्तर $= 0 - 2 = -2$

शेषफल का बीजांक $= 9 - 9 + 0 - 2 = -2$

अतः उत्तर सही।

(iii) गुणन संक्रिया

$54 \times 56 = 3024$

हल :	54 का बीजांक	$= 4 - 5 = -1$
	56 का बीजांक	$= 6 - 5 = +1$
	दोनों बीजांको का गुणनफल	$= -1$
	गुणनफल का बीजांक	$= 4 - 2 + 0 - 3$ $= -1$

अतः उत्तर सही।

(iv) भाग संक्रिया

$6789 \div 12$, भागफल = 565, शेषफल = 9

भाज्य का बीजांक	$= 9 - 8 + 7 - 6$	$= 2$
भागफल का बीजांक	$= 5 - 6 + 5$	$= 4$
भाजक का बीजांक	$= 2 - 1$	$= 1$
शेषफल का बीजांक	$= 9$	$= 9$

सूत्र : $2 = 4 \times 1 + 9$
$= 13$
$= 2$

अतः उत्तर सही है।

❑ ❑ ❑

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 1.1

1.	312047	2.	351251
3.	1039 किग्रा, 852 ग्राम.	4.	144 किमी. 524 मी.
5.	357	6.	489
7.	4155	8.	1863
9.	2016	10.	11021
11.	60564	12.	201131
13.	5346	14.	213786
15.	46953	16.	34199658
17.	657	18.	46233
19.	$240\frac{10}{49}$	20.	$600\frac{30}{169}$
21.	$20 \cdot 25$	22.	$90 \cdot 1275$

प्रश्नमाला 1.2

1.	$1\bar{1}\bar{1}$	2.	$1\bar{1}\bar{2}\bar{2}$
3.	$10\bar{3}\bar{1}\bar{3}$	4.	$1\bar{3}\bar{4}\bar{2}\bar{2}$
5.	281	6.	1568
7.	3698	8.	44951
9	10914	10.	8648
11.	5256	12.	41412
13.	1716	14.	941094
15.	1092624	16.	1029897
17.	10609	18.	9025
19.	41616	20.	50625
21.	3375	22.	753571
23.	32768	24.	8998912

	25.	26.	27.
भागफल $\rightarrow$	12	38	11
शेषफल $\rightarrow$	8	7	45

प्रश्नमाला 1.3

1.	12636	2.	87854
3.	222876	4.	233616
5.	1936	6.	135424
7.	1522756	8.	7733961
9.	153	10.	435
11.	624	12.	34

भागफल →	13.	40	14.	29	15.	1135	16.	2390
शेषफल →		52		16		20		722
भागफल →	17.	11	18.	12	19.	16	20.	121
शेषफल →		21		2		24		2

❑