पाठ 1
वर्ग एवं वर्गमूल

आइए सीखें

- दी गई संख्या का वर्ग ज्ञात करना।
- पूर्ण वर्ग संख्याओं का वर्गमूल गुणनखण्ड द्वारा ज्ञात करना।
- भाग विधि द्वारा निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात करना : (i) धनात्मक पूर्णांक जो पूर्ण वर्ग हो। (ii) दशमलव पूर्ण वर्ग संख्याओं का
- ऐसी संख्याएँ जो पूर्ण वर्ग नहीं हैं उनका भाग विधि द्वारा दशमलव के दो या तीन स्थानों तक वर्गमूल ज्ञात करना।
- वर्गमूल पर आधारित सरल शाब्दिक प्रश्नों को हल करना।

1.1 वर्ग (Square)

पूर्व की कक्षाओं में हम प्राकृत संख्याओं के बारे में जान चुके हैं।

प्राकृत संख्याओं का स्वयं से गुणा करने पर हम देखते हैं कि

$2 \times 2 = 2^2 = 4$

$3 \times 3 = 3^2 = 9$

$4 \times 4 = 4^2 = 16$

हम जानते हैं कि जिस प्रकार $2 + 2 + 2$ को संक्षेप में 2×3 लिखते हैं, उसी प्रकार 2×2 को 2^2 लिखते हैं, तथा इसे 2 की घात 2 या 2 का वर्ग पढ़ते हैं।

इसी प्रकार $3 \times 3 = 3^2$ को 3 की घात 2 या 3 का वर्ग पढ़ते हैं।

अर्थात् ''जब किसी संख्या का घातांक 2 होता है, तो प्राप्त होने वाली संख्या वर्ग **(Square)** कहलाती हैं।''

उदाहरण : 4 को $2 \times 2 = 2^2$ या 2 का वर्ग कहते हैं।

अत: 4 एक वर्ग संख्या हैं।

इसी प्रकार 9, 3 का वर्ग हैं, 16, 4 का वर्ग है।

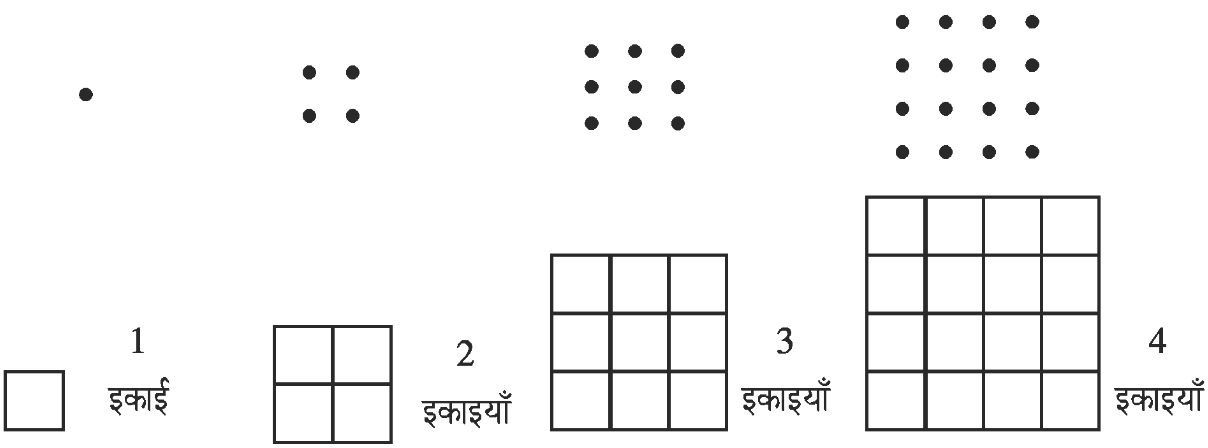
सारणी अ में 1 से 20 तक की प्राकृत संख्याओं के वर्ग दिए गए हैं।

सारणी (अ)

संख्या	वर्ग	संख्या	वर्ग
1	1	11	121
2	4	12	144
3	9	13	169
4	16	14	196
5	25	15	225
6	36	16	256
7	49	17	289
8	64	18	324
9	81	19	361
10	100	20	400

सारणी 'अ' में वर्ग के स्तम्भ के नीचे लिखी संख्याएँ 1, 4, 9, ... 361, 400 आदि पूर्ण वर्ग संख्याएँ (Perfect Square) कहलाती हैं।

इन पूर्ण वर्ग संख्याओं 1, 4, 9, 16 .... को ज्यामितीय वर्गों द्वारा निरूपित किया जा सकता है। जैसे कि चित्र में दिखाया गया है :



$= 1 \times 1$	$= 2 \times 2$	$= 3 \times 3$	$= 4 \times 4$
= 1 वर्ग इकाई	= 4 वर्ग इकाइयाँ	= 9 वर्ग इकाइयाँ	= 16 वर्ग इकाइयाँ

गतिविधि : 1 से 100 तक की पूर्ण वर्ग संख्याएँ ज्ञात कीजिए। सारणी 'ब' में 101 से 400 के बीच की सभी वर्ग संख्याएँ दी गई हैं :

सारणी ब

पूर्ण वर्ग	तुल्य संख्या
121	11^2
144	12^2
169	13^2
196	14^2
225	15^2
256	16^2
289	17^2
324	18^2
361	19^2
400	20^2

अभाज्य गुणनखण्डों की सहायता से किसी वर्ग संख्या को ज्ञात करना :

उदाहरण 1. क्या 900 पूर्ण वर्ग हैं?

हल :

$$900 = 2\times2 \times 5\times5 \times 3\times3$$

$$\begin{array}{r|r} 2 & 900 \\ \hline 2 & 450 \\ \hline 5 & 225 \\ \hline 5 & 45 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

हम देखते हैं कि 900 के अभाज्य गुणनखण्डों के जोड़े बन जाते हैं तथा कोई भी गुणनखण्ड अकेला नहीं बचता है।

$\therefore$ 900 पूर्ण वर्ग है। जोड़े में से एक-एक अंक लेने पर $2 \times 3 \times 5 = 30$ आता है इसलिए यह 30 का वर्ग है।

उदाहरण 2. क्या 125 पूर्ण वर्ग है?

हल : $125 = 5 \times 5 \times 5$

125 के अभाज्य गुणनखण्डों में समान संख्याओं के जोड़े बनाने का प्रयास करते हैं।

$$\begin{array}{r|r} 5 & 125 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline & 5 \end{array}$$

$5 \times 5 \times 5$ यहाँ 5 का एक जोड़ा बनने के बाद 5 का एक गुणनखण्ड शेष रहता है। अत: हम कह सकते हैं कि 125 पूर्ण वर्ग नहीं है।

प्राकृत संख्याओं के गुणधर्म

सारणी (अ) का अवलोकन कीजिए :

1. प्रथम दस प्राकृत संख्याओं के वर्गों के इकाई के स्थान पर अंक 0, 1, 4, 5, 6 व 9 ही आते हैं। अत: हम कह सकते हैं कि इनके अलावा जिन संख्याओं के इकाई के अंक 2, 3, 7 या 8 हैं वे संख्याएँ पूर्ण वर्ग नहीं होती हैं।
2. जिस संख्या के इकाई के स्थान पर शून्य है। उसका पूर्ण वर्ग होना या न होना तुरन्त निर्धारित किया जा सकता है जैसे 100 वर्ग हैं 10 का। जबकि 45000 पूर्ण वर्ग नहीं है, क्योंकि शून्य के पूरे जोड़े नहीं बनते।

   अत: यदि किसी पूर्ण वर्ग संख्या के अंत में शून्यों के पूरे जोड़े बनते हैं तो वह संख्या पूर्ण वर्ग होती है।
3. प्राकृत संख्याएँ दो प्रकार की होती हैं। (सम और विषम)

   सम संख्याएँ 2 की अपवर्त्य प्राकृत संख्याएँ होती हैं। जैसे 2, 4, 6, 8, 10 ..... तथा जो प्राकृत संख्याएँ 2 की अपवर्त्य नहीं होती हैं वे विषम संख्याएँ कहलाती हैं, जैसे 1, 3, 5, 7, 9 ......

   उदाहरणार्थ $2^2 = 4$, $4^2 = 16$, $6^2 = 36$, $8^2 = 64$ इत्यादि। सम संख्याएँ हैं।

   अत: सम संख्याओं के वर्ग सदैव सम होते हैं।

   इसी प्रकार विषम संख्याओं के वर्ग सदैव विषम होते हैं।

   $1^2 = 1,\ 3^2 = 9,\ 5^2 = 25,\ 7^2 = 49,$ .... सभी विषम संख्याएँ हैं।

वर्ग ज्ञात करने की कुछ विशेष विधियाँ

(1) **सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण** अंक 9 से बनी संख्याएँ जैसे 9, 99, 999 ..... आदि का वर्ग इस सूत्र के प्रयोग से सरलता से कर सकते हैं।

उदाहरण 3 : 99^2 ज्ञात कीजिए।

हल : 99×99

$$\begin{array}{c|c} 98 & 01 \end{array}$$

1.	उत्तर का बायां भाग 99 का एकन्यून = 98
2.	उत्तर का दायां भाग 99 – 98 = 01

$= 9801$

उदाहरण 4 : 999^2 ज्ञात कीजिए

हल : (1) 999 का एकन्यून = 998 बायाँ भाग

(2) 999 – 998 = 001 दायाँ भाग

999^2 का हल अवलोकन मात्र से सीधे लिखा जा सकता है।

$999^2 = 998001$

प्रश्नावली 1.1

सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण के प्रयोग से हल कीजिए

1. 9999^2 2. 99999^2

3. 999999^2 4. 9999999^2

(2) सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण जिन संख्याओं की इकाई में 5 होता है उनका वर्ग इस विधि द्वारा सरलता से कर सकते हैं।

उदाहरण: 5. 85^2

हल : 85^2 = 85 × 85

72 | 25

$85^2 = 7225$

1. उत्तर का बायां भाग
दहाई का अंक × दहाई के अंक का एकाधिक
= 8 × 9
= 72
2. उत्तर का दायां भाग
= 5 × 5
= 25

उदाहरण 6. 105^2

हल : 105^2

105 × 105

(10 × 11) | 5 × 5

= 110 | 25

अत: $105^2 = 11025$

प्रश्नावली 1.2

सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण के प्रयोग से हल कीजिए

1. 25^2, 2. 35^2, 3. 45^2, 4. 55^2, 5. 65^2, 6. 75^2, 7. 95^2, 8. 115^2

(3) **सूत्र** ''यावदूनम तावदूर्नं। कृत्य वर्गम् च योजयेव्'' इसे निम्नलिखित प्रकार से पढ़ सकते हैं

''यावत्- ऊनं तावत् ऊनी कृत्य वर्गम् च योजयेत्''

अर्थ जितना कम है उतना कम कर, वर्ग करके मिला दें। अर्थात् दी हुई संख्या आधार (10, 100, 1000 ..... आदि) से जितनी कम है उतना और कम करके वर्ग का बायां भाग प्राप्त करते हैं तथा दायां भाग प्राप्त करने के लिए दी हुई संख्या आधार से जितनी कम है उतने विचलन का वर्ग करते हैं।

उदाहरण 7 : 7 और 97 तथा 989 का वर्ग ज्ञात कीजिए।

(1) $7^2 = 7 - 3 \mid (-3)^2$

हल : $= 49$

$$\boxed{\text{संख्या}^2 = \text{संख्या} \pm \text{विचलन} \mid (\pm \text{विचलन})^2}$$

7 आधार संख्या 10 के पास है। आधार 10 से 7 का विचलन –3 है। उत्तर के बांये भाग में $7 - 3 = 4$ तथा दांये भाग में $(-3)^2 = 9$

(2) 97^2 ज्ञात कीजिए।

हल : $\boxed{\text{संख्या}^2 = \text{संख्या} \pm \text{विचलन} \mid (\pm \text{विचलन})^2}$

$97^2 = (97 - 3) \mid (-3)^2$

$= 9409$

1. 97, आधार संख्या 100 के निकट है।
2. आधार से विचलन –3 है।
3. वर्ग करने में दांये भाग में उतने ही अंक रखते हैं जितने आधार में शून्य होते हैं।
   अत: यहाँ $(-3)^2 = 9$ होने पर दांये भाग में 09 रखा गया है।

(3) 989^2 ज्ञात कीजिए।

हल : $\boxed{\text{संख्या}^2 = \text{संख्या} \pm \text{विचलन} \mid (\pm \text{विचलन})^2}$

$989^2 = 989 - 11 \mid (-11)^2$

$= 978 \mid 121$

$= 978121$

1. 989 का आधार 1000 है।
2. संख्या का आधार से विचलन –11 है।
3. संख्या 989 के आधार 1000 में तीन शून्य हैं अत: दायें भाग में तीन अंक रहेंगे अत: दायीं ओर 121 लिखेंगे।

यदि संख्या आधार के निकट तथा आधार (10,100, 1000 .... आदि) से बड़ी भी हो तो संख्या का वर्ग सरलता से ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 8 : 12, 115 तथा 1012 का वर्ग ज्ञात कीजिए।

हल 1. 12^2

सूत्र : $\boxed{\text{संख्या}^2 = \text{संख्या} \pm \text{विचलन} \mid (\pm \text{विचलन})^2}$

यदि संख्या आधार से बड़ी है तो विचलन धनात्मक लेते हैं।

$12^2 = (12+2) \mid (2)$
$= 144$

1. 12 का आधार 10 है।
2. विचलन + 2 है।

2. $\mathbf{115^2}$ ज्ञात कीजिए।

$115^2 = (115 + 15) \mid 15^2$
$= 130 \;{}_2|25$
$= 13225$

1. 115 का आधार 100 है।
2. आधार से विचलन +15 है।
3. $15^2 = 225$ है। आधार 100 में दो शून्य हैं अत: दांये 25 रखेंगे तथा 2 को बांये जोड़ देंगे।

3. $\mathbf{1012^2}$

हल : $1012^2 = (1012 + 12) \mid 12^2$
$= 1024144$

जांच : (संख्या के बीजांक)^2 का बीजांक = उत्तर में प्राप्त संख्या का बीजांक
1. 1012 का बीजांक 4 अब $4^2 = 16$ का बीजांक = 7
2. प्राप्त उत्तर 1024144 का बीजांक = 7
दोनों बीजांक बराबर हैं अत: उत्तर सही है।

प्रश्नावली 1.3

सूत्र ''यावत् ऊनम् तावत् ऊनी कृत्य वर्गम् च योजयेत्'' का प्रयोग कर सीधे एक पंक्ति में हल कीजिए तथा उत्तर की जाँच भी कीजिए।

1. 12^2, 2. 13^2, 3. 14^2, 4. 98^2, 5. 96^2, 6. 94^2, 7. 102^2, 8. 104^2, 9. 106^2, 10. 109^2, 11. 111^2, 12. 1002^2, 13. 1004^2, 14. 1025^2

द्वन्द्वयोग की गणना विधि

(1) एक अंक की संख्या का द्वन्द्वयोग उस संख्या का वर्ग होता है। जैसे 2 का द्वन्द्वयोग = $2^2 = 4$

(2) दो अंकों की संख्या का द्वन्द्वयोग दोनों अंकों को गुणा कर दो गुना करने पर मिलता है। जैसे 13 का द्वन्द्वयोग = $2 \times (1 \times 3) = 6$

(3) तीन अंकों की संख्या का द्वन्द्वयोग पहले और अंतिम अंक को गुणा कर दो गुना करने और उसमें बीच के अंक का वर्ग जोड़ने से प्राप्त होता है। जैसे 145 का द्वन्द्वयोग = $2 \times (1 \times 5) + 4^2 = 10 + 16 = 26$

(4) चार अंकों की संख्या का द्वन्द्वयोग मालूम करना हो तो पहले और चौथे के द्वन्द्वयोग में दूसरे और

तीसरे अंक का द्वन्द्वयोग अर्थात उनके गुणा का दुगुना जोड़े।

जैसे 1346 का द्वन्द्वयोग $= 2 \times (1 \times 6) + 2 \times (3 \times 4) = 36$

(5) पांच अंकों की संख्या का द्वन्द्वयोग

= पहले और पांचवें अंक की संख्याओं का द्वन्द्वयोग।

+ दूसरे और चौथे अंक की संख्याओं का द्वन्द्वयोग।

+ तीसरे स्थान की संख्या का द्वन्द्वयोग अर्थात वर्ग।

इसी प्रकार और बड़ी संख्याओं का द्वन्द्वयोग ज्ञात किया जा सकता है।

द्वन्द्वयोग से वर्ग ज्ञात करना

(क) जिस संख्या का वर्ग मालूम करना है उसमें दाहिनी ओर से एक-एक बढ़ती हुई और फिर एक-एक घटती हुई संख्या में अंक लेकर समूह बनाते हैं। जैसे :

31 के अंक समूह = 3, 31, 1

465 के अंक समूह = 4, 46, 465, 65, 5

2346 के अंक समूह = 2, 23, 234, 2346, 346, 46, 6

ध्यान दें कि किसी संख्या के वर्ग हेतु द्वन्द्वयोग के लिए बनाए अंक समूहों की गिनती दी हुई संख्या में अंकों की गिनती के दो गुने से एक कम होती है।

(ख) ऊपर लिखे अनुसार समूह बना ले। जितने समूह है वर्गमूल में उतने ही खण्ड होंगे और प्रत्येक खण्ड में उस खण्ड के संगत के समूह का द्वन्द्वयोग लिखें। यह काम दाहिनी या बाई ओर से हो सकता है।

उदाहरण 9. 31 का वर्ग द्वन्द्वयोग से ज्ञात करे।

क्रिया : पहला चरण 31 के अंक समूह 3, 31, 1

दूसरा चरण इनके द्वन्द्वयोग ज्ञात करे।

3 का $3^2 = 9$

31 का $2 \times 3 \times 1 = 6$

1 का 1

तीसरे चरण में उत्तर लिखे $3^2 / 2 \times (3 \times 1) / 1^2 = 961$

अभ्यास होने पर पहला और दूसरा चरण मौखिक करें।

उदाहरण 10. 64 का वर्ग करें

(समूह 6, 64, 4)

$64^2 = 6^2 / 2 \times 6 \times 4 / 4^2$

$= 40\ {}_4/9\ \ {}_1/6$

$= 4096$

उदाहरण 11. 345 का वर्ग करें

(समूह 3, 34, 345, 45, 5)

$345^2 = 3^2 / 2 \times 3 \times 4 / 2 \times 3 \times 5 + 4^2 / 2 \times 4 \times 5 / 5^2$

$= 9/_{2}4/_{4}6/_{4}0/_{2}5$

$= 119025$

45 का द्वन्द्वयोग $2 \times 4 \times 5 = 40$ से 2 जोड़ने पर 42 का 2, हाथ में 4, 345 का द्वन्द्वयोग $30 + 16 = 46$ में 4 जोड़ने पर 50 का 0, हाथ में 5, 34 का द्वन्द्वयोग 24 में 5 जोड़ने पर 29 का 9, हाथ में 2, 3 का द्वन्द्वयोग 9, इसमें 2 जोड़ने पर 11, उत्तर 119025

उदाहरण 12 1403^2 ज्ञात करे।

क्रिया : $1403^2 = 1^2 / 2(1\times4) / 0+4^2 / 2(1\times3)+0 / 2(4\times3) + 0/0/3^2$

$= 18_{1}66_{2}409 = 1968409$

उदाहरण 13 34106 का वर्ग द्वन्द्वयोग विधि से ज्ञात करें।

$34106^2 = 9/_{2}4/2\ (3 \times 1) + 4^2/2\ (3 \times 0 + 4 \times 1)/2(3 \times 6 + 4 \times 0)$

$+ 1^2/2\ (4 \times 6 + 0 \times 1)/2\ (1 \times 6)/2 \times 0 \times 6/6^2$

$= 9_{2}4_{2}2 \quad 8_{3}7_{4}8_{1}2 \quad 0_{3}6$

$= 1\ 16\ 32\ 19\ 236$

प्रश्नावली 1.4

1. निम्नलिखित में से कौन सी संख्याएँ पूर्ण वर्ग है?

   (a) 1, 2, 4, 5, 7, 9 (b) 11, 12, 15, 16, 32, 34, 36

2. निम्नलिखित पूर्ण वर्गों में से सम संख्याओं का वर्ग कौन सा है?

   9, 25, 121, 144, 225, 256, 400, 1296, 6591

3. निम्नलिखित में से कौन सी संख्याएँ पूर्ण वर्ग हैं?

   81, 100, 1000, 330550

4. निम्नलिखित में से कौन सी संख्याएँ पूर्ण वर्ग हैं?

   8, 196, 343, 900

1.2 वर्गमूल (Square Root) : हम जान चुके हैं कि 4, 25, 36 .... पूर्ण वर्ग है। अत: $2^2 = 4$ अर्थात 2 का वर्ग 4 है, इसके विपरीत हम यह भी कह सकते हैं कि संख्या 2, 4 का वर्गमूल है।

इसी प्रकार चूंकि $5^2 = 25$, इसलिए 25 का वर्गमूल 5 है।

अत: किसी संख्या 'a' का वर्गमूल वह संख्या होती है, जिसे इसी संख्या से गुणा करने पर संख्या 'a' प्राप्त होती है।

यदि $n = y \times y$ तो हम कहते हैं कि संख्या y संख्या n का एक वर्गमूल है। दूसरे शब्दों में दी गई संख्या n का वर्गमूल वह संख्या है जिसका उसी के साथ गुणा करने पर गुणनफल n प्राप्त हो।

वर्गमूल का संकेत $\sqrt{\ }$ होता है।

उदाहरण 14 : 25 के वर्गमूल को हम $\sqrt{25}$ लिखते हैं। अत: $\sqrt{25} = \sqrt{5 \times 5} = 5$ या $5 = \sqrt{25}$

इसी प्रकार $\sqrt{9} = \sqrt{3 \times 3} = 3, \sqrt{64} = \sqrt{8 \times 8} = 8$ तथा $\sqrt{100} = \sqrt{10 \times 10} = 10$

सारणी (स)

N	N^2	y	$\sqrt{y}$
1	1	1	1
2	4	4	2
3	9	9	3
4	16	16	4
5	25	25	5
6	36	36	6
7	49	49	7
8	64	64	8
9	81	81	9
10	100	100	10

अब सारणी (स) का अवलोकन करने पर

हम कह सकते हैं कि

(1) सम पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल सम होता है।

(2) विषम पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल विषम होता है।

आइए अब हम संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात करने की विधियों पर विचार करें।

1.3 गुणनखण्ड विधि (अभाज्य गुणनखण्ड विधि) द्वारा वर्गमूल :

हम निम्नलिखित गुणनखण्डों पर विचार करेंगे :

$6 = 2 \times 3$ $\quad 6^2 = 6 \times 6 = 2 \times 3 \times 2 \times 3 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$8 = 2 \times 2 \times 2$ $\quad 8^2 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$12 = 2 \times 2 \times 3$ $\quad 12^2 = (2 \times 2 \times 3) \times (2 \times 2 \times 3) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

हम देखते हैं कि,

(i) यदि संख्या p, संख्या n का एक अभाज्य गुणनखण्ड हैं, तो $p \times p$ संख्या n^2 का एक गुणनखण्ड है।

(ii) यदि p एक अभाज्य संख्या है और $p \times p$, n^2 का एक गुणनखण्ड है, तो p, n का एक गुणनखण्ड है।

(iii) n^2 के अभाज्य गुणनखण्डों के ऐसे युग्म बनाए जा सकते हैं, जिनमें प्रत्येक युग्म के दोनों गुणनखण्ड समान हों।

इन उदाहरणों के आधार पर पूर्ण वर्ग संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात करने की विधि निम्नानुसार होगी :

चरण 1 दी गई संख्या के सभी संभव अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

चरण 2 दो-दो समान अभाज्य गुणनखण्डों की जोड़ी बनाइए।

चरण 3 प्रत्येक जोड़े में से एक-एक गुणनखण्ड, लेकर उनका आपस में गुणा कीजिए।

चरण 4 प्राप्त गुणनफल ही, दी गई संख्या का अभीष्ट वर्गमूल होगा।

उदाहरण 15 : 4900 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल :

2	4900
2	2450
5	1225
5	245
7	49
7	7
	1

$$4900 = 49 \times 100 = 7 \times 7 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2$$

$$\therefore \sqrt{4900} = \sqrt{2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7} = 2 \times 5 \times 7 = 70$$

उदाहरण 16: क्या संख्या 8820 पूर्ण वर्ग है? यदि नहीं, तो वह लघुत्तम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 8820 को गुणा करने पर गुणनफल पूर्ण वर्ग बन जाए।

2	8820
2	4410
5	2205
3	441
3	147
7	49
	7

हल : $8820 = 2 \times 2 \times 5 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7$

यहाँ हम देखते हैं कि अभाज्य संख्या 5 युग्म रूप में उपस्थित नहीं है। अत: 8820 पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है।

यदि संख्या 8820 को 5 से गुणा करें,

तो $8820 \times 5 = 44100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7$

अब प्रत्येक अभाज्य संख्या युग्म रूप में उपस्थित है इसलिए संख्या $8820 \times 5 = 44100$ पूर्ण वर्ग संख्या है। अत: वह अभीष्ट लघुतम संख्या 5 है। अर्थात् 5 से गुणा करने पर 8820 पूर्ण वर्ग होगा।

उदाहरण 17: वह लघुत्तम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 3645 को भाग करने पर एक पूर्ण वर्ग प्राप्त हो। भागफल का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।

3	3645
3	1215
3	405
3	135
3	45
3	15
	5

हल : $3645 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$

यहाँ अभाज्य संख्या 5 युग्म रूप में उपस्थित नहीं हैं। इसलिए 3645 पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है। अब यदि इस संख्या के गुणनखण्डों में से 5 हटा दिया जाए अर्थात संख्या को 5 से विभाजित किया जाए तो प्राप्त भागफल के अभाज्य गुणनखण्ड युग्म रूप में होंगे-

$3645 \div 5 = 729 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

अत: अभिष्ट लघुत्तम संख्या 5 है, अर्थात् 5 का भाग देने पर संख्या 3645 पूर्ण वर्ग होगी और भागफल का वर्गमूल $3 \times 3 \times 3 = 27$ है।

प्रश्नावली 1.5

1. गुणनखण्ड विधि द्वारा जाँच कीजिए कि क्या निम्नलिखित संख्याएँ पूर्ण वर्ग हैं?

   (i) 121 (ii) 408 (iii) 257 (iv) 1225

2. अभाज्य गुणनखण्ड द्वारा निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

   (i) 81 (ii) 625 (iii) 1764 (iv) 4096 (v) 1000000 (vi) 47089 (vii) 298116

3. निम्नलिखित संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्ड लिखिए तत्पश्चात् इनके वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

(i) 5929 (ii) 9604 (iii) 7056 (iv) 7744

4. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक के लिए वह लघुत्तम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे गुणा करने पर एक पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो जाए। इस प्रकार प्राप्त पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।

(i) 180 (ii) 2352 (iii) 9408 (iv) 1458 (v) 2028 (vi) 1008

5. निम्नलिखित में से प्रत्येक संख्या के लिए वह लघुत्तम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे भाग करने पर एक पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो जाए। इस प्रकार प्राप्त संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।

(i) 1100 (ii) 2800 (iii) 45056 (iv) 3645 (v) 16200

6. एक माध्यमिक विद्यालय में छात्रों से 2304 रुपये भोजन शुल्क एकत्र हुआ। प्रत्येक छात्र से उतने रुपये लिए गए जितने कि विद्यालय में छात्र थे। विद्यालय में छात्रों की संख्या ज्ञात कीजिए।

1.4 परिमेय संख्या का वर्गमूल

हम पूर्ण वर्ग संख्याओं के वर्गमूल का अध्ययन कर चुके हैं। अब हम ऐसी संख्या के वर्गमूल का अध्ययन करेंगे, जिसे किसी परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त किया जा सके।

उदाहरण के लिए $\frac{25}{64}=\left(\frac{5}{8}\right)^2$, $\frac{169}{324}=\left(\frac{13}{18}\right)^2$

$$0.01 = (0.1)^2,\ 0.0625 = (0.25)^2$$

हम कह सकते हैं कि परिमेय संख्या $\frac{25}{64}$ का वर्गमूल परिमेय संख्या $\frac{5}{8}$ है,

$\frac{169}{324}$ का वर्गमूल $\frac{13}{18}$ है, 0.01 का वर्गमूल 0.1 है और 0.0625 का वर्गमूल 0.25 है।

अत: y का वर्गमूल x होगा, यदि $y = x^2$ हो, अर्थात् किसी परिमेय संख्या m का वर्गमूल वह परिमेय संख्या है, जिसे यदि उसी संख्या से गुणा करें, तो दी हुई संख्या m प्राप्त हो।

अब हम जान चुके हैं कि $\sqrt{\frac{25}{64}}=\frac{5}{8}$, $\sqrt{\frac{169}{324}}=\frac{13}{18}$, $\sqrt{0.01} = 0.1$, $\sqrt{0.0625} = 0.25$ इत्यादि।

टिप्पणी : (1) $1 = (1)^2$ या $(-1)^2$, $9 = (3)^2$ या $(-3)^2$

$\therefore 4 = (2)^2 = (-2)^2$

क्योंकि 4 का वर्गमूल 2 है और (-2) भी है।

अत: किसी संख्या के दो वर्गमूल हो सकते हैं किन्तु हम प्राकृत संख्याओं में किसी संख्या के वर्गमूल के धनात्मक मान को ही लेंगे। अत: $\sqrt{4} = +2$ और यहाँ (-2) नहीं लेंगे, क्योंकि यह प्राकृत संख्या नहीं है।

(2) हम जान चुके हैं कि किसी पूर्ण वर्ग प्राकृत संख्या का वर्गमूल कभी भी उस संख्या से बड़ा नहीं हो सकता है।

परन्तु यह बात परिमेय संख्याओं के लिए सही नहीं होगी, जैसे :

उदाहरण के लिए $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, तथा $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$

यदि कोई संख्या 1 से छोटी हो तो उसका वर्गमूल सदैव उस संख्या से बड़ा होगा।

(3) दशमलव भिन्न का वर्गमूल लिखते समय आपको बड़ी सावधानी रखना चाहिए।

$\sqrt{0.4} = 0.2$

यहाँ हम प्राप्त उत्तर की जाँच, वर्गमूल का वर्ग करके, अवश्य कर सकते हैं।

उदाहरण के लिए $0.2 \times 0.2 = 0.04$

अथवा $\sqrt{0.04} = \sqrt{0.2 \times 0.2} = 0.2$

अत: यहाँ स्पष्ट होता है कि $\sqrt{0.4} \neq 0.2$ इसी प्रकार $\sqrt{0.1} \neq 0.1$

(4) अनेक संख्याओं के वर्गमूल निम्नलिखित नियमों के प्रयोग से भी ज्ञात किए जा सकते हैं।

(I) $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ जहाँ a और b पूर्ण वर्ग संख्या है।

(II) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (जहाँ $b \neq 0$) तथा a और b पूर्ण वर्ग संख्याएँ हैं।

5. किसी ऋणात्मक संख्या का वर्गमूल संभव नहीं होता है।

माना कि A कोई धनात्मक संख्या हैं तो (–A) ऋणात्मक संख्या हुई।

यदि संभव हो तो मान लिया कि B एक ऐसी संख्या है कि $B \times B = (-A)$। अब संख्या B दो प्रकार से हो सकती है :

(i) यदि B धनात्मक है तो $B \times B$ भी धनात्मक होगी, जो ऋणात्मक संख्या (–A) के बराबर कभी नहीं हो सकती।

(ii) अब यदि B ऋणात्मक हो तो, दो ऋणात्मक संख्याओं का गुणनफल धनात्मक होने के कारण $B \times B$ भी धनात्मक ही होगा।

अत: इससे स्पष्ट होता है कि ऐसी कोई परिमेय संख्या B नहीं हो सकती कि $B \times B = (-A)$। इसलिए किसी भी ऋणात्मक संख्या का वर्गमूल नहीं ज्ञात किया जा सकता है।

1.5 गुणनखण्ड विधि से परिमेय संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात करना

हम परिमेय संख्याओं के वर्गमूल निकालना निम्नलिखित उदाहरणों से स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 18 1082.41 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\sqrt{1082.41} = \sqrt{\frac{108241}{100}}$$

$$= \sqrt{\frac{7\times7\times47\times47}{10\times10}}$$

$$= \sqrt{7\times7\times47\times47\times0.1\times0.1}$$

$$= 7 \times 47 \times 0.1$$

$$\therefore \sqrt{1082.41} = 32.9$$

7	108241
7	15463
47	2209
	47

उदाहरण 19 $\frac{49}{8100}$ का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

7	49
7	7
	1

और

2	8100
2	4050
3	2025
3	675
3	225
3	75
5	25
5	5
	1

हल :

$$\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{8100}} = \frac{\sqrt{7\times7}}{\sqrt{90\times90}} = \frac{7}{90}$$

या

$$\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{8100}} = \frac{\sqrt{7\times7}}{\sqrt{2\times2\times3\times3\times3\times3\times5\times5}} = \frac{7}{2\times3\times3\times5}$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{8100}} = \frac{7}{90}$$

उदाहरण 20 $7\frac{29}{100}$ का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल :

$$7\frac{29}{100} = \frac{729}{100}$$

इसलिए

$$\sqrt{7\frac{29}{100}} = \sqrt{\frac{729}{100}}$$

अब

$$729 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$\therefore \sqrt{729} = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

3	729
3	243
3	81
3	27
3	9
	3

2	100
2	50
5	25
	5

और $$100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5$$

$$\therefore \sqrt{100} = 2 \times 5 = 10$$

अत: $$\sqrt{7\frac{29}{100}} = \sqrt{\frac{729}{100}} = \sqrt{\frac{729}{100}} = \frac{27}{10}$$

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट होता है कि किसी परिमेय संख्या या दशमलव भिन्न का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित का पालन करते हैं।

चरण 1. यदि दी हुई भिन्न मिश्रित हैं तो इसे विषम भिन्न में बदलना आवश्यक है।

जैसे : (1) $4\frac{29}{49} = \frac{225}{49}$ (2) $2\frac{137}{196} = \frac{529}{196}$

चरण 2. उपर्युक्त भिन्न के अंश और हर के अलग-अलग वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

चरण 3. अंश के वर्गमूल में, हर के वर्गमूल का भाग देने से जो भिन्न प्राप्त होगी, वही दी गई भिन्न का अभीष्ट वर्गमूल होगा।

प्रश्नावली 1.6

1. निम्नलिखित भिन्नों के वर्गमूल ज्ञात कीजिए

(i) $\frac{9}{25}$ (ii) $\frac{121}{196}$ (iii) $\frac{1}{9}$ (iv) $\frac{4}{49}$ (v) $\frac{225}{900}$

(vi) $\frac{625}{1296}$ (vii) $4\frac{29}{49}$ (viii) $2\frac{137}{196}$ (ix) $23\frac{26}{121}$

(x) $52\frac{857}{2116}$ (xi) $75\frac{46}{49}$ (xii) 5.774409 (xiii) 0.00053361

(xiv) 0.804609

2. एक वर्गाकार खेल मैदान का क्षेत्रफल $101\frac{1}{400}$ वर्गमीटर है। मैदान की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

3. एक वर्गाकार प्रार्थना हाल का क्षेत्रफल 992.25 वर्गमीटर है। प्रार्थना हाल की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

वर्गमूल ज्ञात करने की गुणनखण्ड एवं भाग विधि हम जानते हैं। अब हम पूर्ण वर्ग संख्याओं के लिए विलोकनम् सूत्र से तथा अन्य किसी भी संख्या का वर्गमूल निकालने के लिए अध्ययन करेंगे।

1. वर्गमूल विलोकनम् से : चार, पाँच अंकों तक की पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल हम विलोकनम् से ज्ञात कर सकते हैं।

तालिका का विलोकनम् करें

संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
संख्या का वर्ग	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
संख्या का बीजांक	1	4	9	7	7	9	4	1	9	1

याद करें

वर्ग संख्या की इकाई	**वर्गमूल संख्या की इकाई**
1	1 या 9
4	2 या 8
5	5
6	4 या 6
9	3 या 7
0	0

टीप : 1. जिन संख्याओं की इकाई 2, 3, 7, 8 हो तो वे पूर्ण वर्ग संख्याएँ नहीं होती।

2. वर्ग संख्या के अंकों के जितने जोड़े बनेंगे वर्गमूल की संख्या में उतने ही अंक होंगे।

3. यदि संख्या का बीजांक 2, 3, 5, 6 या 8 हो तो वह संख्या पूर्ण वर्ग नहीं है।

उदाहरण 21. 6889 का वर्गमूल विलोकनम् से ज्ञात कीजिए

हल : $\sqrt{6889}$

$\sqrt{68\,89}$ = 83 या 87

1. दो जोड़े बन रहे हैं अत: वर्गमूल में दो अंक होंगे।
2. दायें जोड़े से इकाई निश्चित करेंगे तथा बायें जोड़े से दहाई निश्चित करेंगे।
3. वर्ग संख्या की इकाई 9
4. वर्गमूल की इकाई 3 या 7
5. बायें जोड़े $\overline{68}$ से दहाई निश्चित करेंगे।

   68 का निकटतम वर्गमूल 8 है।

   $8^2 = 64$

   $9^2 = 81$, 9^2, 68 से अधिक है कम वाला 8 दहाई के स्थान पर रखेंगे।
6. 83 और 87 में से कोई एक संख्या हमारा उत्तर है।
7. 83 और 87 के बीच ऐसी संख्या जिसकी इकाई 5 हो 85 है। 85 का वर्ग हम एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र से सरलता पूर्वक ज्ञात कर सकते हैं।

   $85^2 = 7225$
8. 7225 से 6889 छोटी संख्या है अत: 85 से छोटी संख्या अर्थात् 83 हमारा उत्तर है।

$\sqrt{6889} = 83$

जाँच 83 का बीजांक 2, अब $2^2 = 4$ संख्या 6889 का बीजांक = 4 अत: उत्तर सही है।

प्रश्नावली 1.7

वर्गमूल ज्ञात कीजिए

(विलोकनम् सूत्र का प्रयोग कर)

1. 289	2. 961	3. 256	4. 841	5. 576
6. 784	7. 1764	8. 4624	9. 1024	10. 2809
11. 1681	12. 4489	13. 1521	14. 1356	15. 1156

1.6 भाग विधि से वर्गमूल ज्ञात करना

गुणनखण्ड विधि से हम किसी संख्या का वर्गमूल ज्ञात करना सीख चुके हैं। परन्तु कभी-कभी दी गई बड़ी-बड़ी संख्याओं का गुणनखण्ड ज्ञात करना आसान नहीं होता है, तब हम भागविधि का उपयोग करते हैं।

इस विधि को समझने से पहले हम दी गई संख्या के अंकों की संख्या तथा उसके वर्गमूल में अंकों

की संख्या पैटर्न पर चर्चा कर लें।

(1) 1 से 9 तक की संख्या के वर्गों में अधिकतम 2 अंक होते हैं। जैसे : (1, 2, 3, 4 .... 9 के वर्ग क्रमशः 1, 4, 9, 16, ... 81) हैं।
(2) क्योंकि 10 का वर्ग 100 एवं 99 का वर्ग 9801 हैं अतः संख्या 10 से 99 तक की संख्याओं के वर्गों में या तो 3 अंक होंगे या 4 अंक होंगे।
(3) इसी प्रकार 100 से 999 तक की संख्याओं के वर्गों में 5 अंक होंगे या 6 अंक होंगे।

इससे यह स्पष्ट होता है कि पूर्ण वर्ग संख्या में 2 या 2 से कम अंक है तो उसके वर्गमूल में केवल एक अंक होगा। इसी प्रकार से यदि पूर्ण वर्ग संख्या में 3 या 4 अंक है, तो उसके वर्गमूल में केवल 2 अंक ही होंगे।

यदि पूर्ण वर्ग संख्या 5 या 6 अंकों वाली है तो उसके वर्गमूल में 3 अंक होंगे।

उपरोक्त तथ्यों को निम्नांकित सारणी में दर्शाया गया है।

सारणी द

पूर्ण वर्ग संख्या में अंकों की संख्या	इस संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या
1 या 2	1
3 या 4	2
5 या 6	3

याद रखिए

1. यदि वर्ग संख्या में सम संख्या के अंक हों तो उसके वर्गमूल के अंकों की संख्या आधी होती है।
2. यदि वर्ग संख्या में विषम संख्या के अंक हो तो उसके वर्गमूल में अंकों की संख्या दी गई संख्या के अंकों की संख्या में 1 जोड़कर आधा करने से प्राप्त होता है।

   उस दी गई संख्या के इकाई अंक से प्रारंभ करके दो-दो अंकों की प्रत्येक जोड़ी पर रेखा खींच दीजिए। इन रेखाओं को गिन लीजिए। रेखाओं की संख्या ही, वर्गमूल के अंकों की संख्या होगी।

उदाहरण 22: 1296 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल :

$$
\begin{array}{r|cc}
 & 3 & 6 \\
\hline
3 & \overline{12} & \overline{96} \\
+3 & 9 & \\
\hline
66 & 3 & 96 \\
+6 & 3 & 96 \\
\hline
72 & 0 & 00
\end{array}
$$

$\therefore$ 1296 का वर्गमूल = 36

चरण 1. दी गई वर्ग संख्या के इकाई अंक से प्रारंभ करके दो-दो अंकों के जोड़े बनाने के लिए उन पर रेखाएँ (दंड) लगाते हैं। जैसे : $\overline{12}\ \overline{96}$

चरण 2. वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात करें जिसका वर्ग सबसे बाई ओर के दंड के नीचे लिखी संख्या से छोटा या उसके बराबर हो। इस संख्या को भाजक और भागफल मानिए। भागफल को प्रथम अन्तराल के ऊपर लिखिए। प्रथम अन्तराल में से वर्ग संख्या को घटाकर, शेषफल के दाई ओर अगले अन्तराल को लिखिए। यही संख्या अगले पद के लिए भाज्य बनेगी।

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3 \\
\hline
3 & \overline{12}\ \overline{96} \\
 & -9 \\
\hline
 & 3\ 96
\end{array}
$$

चरण 3. उपर्युक्त पद के भागफल (अर्थात 3) का दो गुना करके भाज्य के बाई ओर लिखिए। परन्तु इस संख्या के दाहिनी ओर एक अंक के लिए रिक्त स्थान मानकर छोड़ें।

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3 \\
\hline
3 & \overline{12}\ \overline{96} \\
 & -9 \\
\hline
6\ \ & 3\ 96
\end{array}
$$

चरण 4. अब इस रिक्त स्थान को भरने के लिए बड़े से बड़े अंक की खोज इस प्रकार करें कि यह अंक भागफल का अगला अंक बन सके। इस अंक को रिक्त स्थान और अगले अन्तराल (अर्थात $\overline{96}$) के ऊपर भी लिखिए। इस अंक से भाजक को गुणा करके, गुणनफल को भाज्य (396) के नीचे लिखकर शेषफल 0 प्राप्त होने पर क्रिया समाप्त हो जावेगी।

$$
\begin{array}{r|cc}
 & 3 & 6 \\
\hline
3 & \overline{12} & \overline{96} \\
 & -9 & \\
\hline
66 & \multicolumn{2}{c}{396} \\
 & \multicolumn{2}{c}{396} \\
\hline
 & \multicolumn{2}{c}{000}
\end{array}
$$

उदाहरण 23. संख्या 38416 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल :

	1 9 6
1	3 $\overline{84}$ $\overline{16}$
+ 1	1
29	2 84
+9	2 61
386	23 16
+6	23 16
392	0

उत्तर = 196

वर्गमूल ज्ञात करने की कार्यविधि :

- इकाई की ओर से जोड़ें उपरोक्तानुसार बनाएँ।
- अब ऐसी संख्या लें जिसका वर्ग 3 या 3 से कम हो। यहाँ ऐसी संख्या 1 है।
- 1, 3 के ऊपर भागफल तथा भाजक में 1 लिखें।
- $3 - 1 = 2$ शेषफल लिखें।
- भाजक में 1 के नीचे 1 लिखकर जोड़ें।
- 2 के बाद जोड़ी $\overline{84}$ उतारने पर 284 हुआ।
- इसमें 2 का भाग 28 में यहाँ अधिक से अधिक 9 बार लगता है।
- भाजक में 2 के बाद 9 लिखकर भागफल में भी 1 के आगे 9 लिखें।
- अब $29 \times 9 = 261$ लिखकर 284 में से घटाने पर शेषफल = 23
- भाजक में 29 में 9 जोड़ने पर 38 आया।
- अब $\overline{16}$ की जोड़ी 23 के आगे लिखें।
- अब 3 का भाग 23 में 6 बार लगता है।
- 38 के आगे भाजक में 6 लिखकर उसके नीचे 6 लिखें।
- $386 \times 6 = 2316$ को 2316 में से घटाने पर शेषफल शून्य लिखें।
- भाजक $386 + 6 = 392$
- $\therefore$ वर्गमूल 196 का दोगुना भी 392 है, अतः 38416 का वर्गमूल 196 सही है।

  वर्गमूल = 196

उदाहरण 24. 306452 में वह कौनसी छोटी से छोटी संख्या जोड़ी जाय कि यह पूर्ण वर्ग बन जाये?

हल :

		5	5	3
5	$\overline{30}$		$\overline{64}$	$\overline{52}$
+5	25			
10 5	5		64	
+5	5		25	
1103			39	52
			33	09

		5	5	4
5	$\overline{30}$		$\overline{64}$	$\overline{52}$
+5	25			
105	5		64	
+5	5		25	
1104			39	52
			44	16

उपरोक्त क्रिया के आधार पर स्पष्ट है कि दी गई संख्या $(553)^2$ से अधिक है। परन्तु $(554)^2$ से कम है। यदि दी गई संख्या में हम $(4416 - 3952) = 464$ जोड़े तो यह पूर्ण बन जाएगी। इसलिए अभीष्ट न्यूनतम संख्या 464 है।

उदाहरण 25 : वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 194491 से घटाने पर शेषफल पूर्ण वर्ग बन जावे।

हल :

	4	4	1
4	$\overline{19}$	$\overline{44}$	$\overline{91}$
+4	16		
84	3	44	
+4	3	36	
881		8	91
+1		8	81
882			10

दी गई संख्या 194491 का वर्गमूल भाग-विधि से ज्ञात करने पर अंत में 10 शेष रहता है। अतएव उक्त संख्या में से 10 शेष को घटाने पर $(194491 - 10 = 194481)$ दी गई संख्या का पूर्ण वर्ग होगी और इसका वर्गमूल 441 होगा।

अत: अभीष्ट संख्या = 10

प्रश्नावली 1.8

1. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए

   (i) 196 (ii) 625 (iii) 2304 (iv) 4624

   (v) 10404 (vi) 38025 (vii) 99856 (viii) 119025

   (ix) 1234321 (x) 82264900

2. 2361 में से कौन सी छोटी से छोटी संख्या घटाए जिससे यह पूर्ण वर्ग बन जाए?
3. 4931 में कौन सी छोटी से छोटी संख्या जोड़ी जाए कि, यह पूर्ण वर्ग बन जाए?
4. दो अंकों की न्यूनतम ऐसी संख्या ज्ञात कीजिए जो पूर्ण वर्ग हो।
5. तीन अंकों की न्यूनतम ऐसी संख्या ज्ञात कीजिए जो पूर्ण वर्ग हो।
6. चार अंकों की न्यूनतम ऐसी संख्या ज्ञात कीजिए जो पूर्ण वर्ग हो।

1.7 भागविधि से भिन्नों के वर्गमूल ज्ञात करना

एक उदाहरण की सहायता से हम क्रियाविधि समझेंगे :

उदाहरण 26 : $21\frac{2797}{3364}$ का वर्गमूल ज्ञात कीजिए

हल : $21\frac{2797}{3364} = \frac{73441}{3364}$

$$\begin{array}{r|lll}
 & 2 & 7 & 1 \\
\hline
2 & \overline{7} & \overline{34} & \overline{41} \\
+2 & 4 & & \\
\hline
47 & 3 & 34 & \\
+7 & 3 & 29 & \\
\hline
541 & & 5 & 41 \\
+1 & & 5 & 41 \\
\hline
542 & & & 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|ll}
 & 5 & 8 \\
\hline
5 & \overline{33} & \overline{64} \\
+5 & 25 & \\
\hline
108 & 8 & 64 \\
+8 & 8 & 64 \\
\hline
116 & & 0
\end{array}$$

$$\therefore \sqrt{21\frac{2797}{3364}} = \sqrt{\frac{73441}{3364}} = \frac{271}{58} = 4\frac{39}{58}$$

चरण 1	मिश्रित भिन्न को विषम भिन्न में बदलिए।
चरण 2	अंश और हर को भाग विधि से अलग-अलग हल कीजिए।
चरण 3	अंश और हर के वर्गमूल से, दी गई संख्या का अभीष्ट वर्गमूल प्राप्त होता है।

उदाहरण 27 : संख्या 37.0881 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल :

	6.	0	9
6	$\overline{37}.$	$\overline{08}$	$\overline{81}$
+6	36		
120	1	08	
+0		0	
1209	1	08	81
+9	1	08	81
1218			0

क्रिया विधि के पद

चरण 1 दी हुई संख्या के पूर्णांक भाग के अंकों के पहले की भांति जोड़े बनाकर उनके ऊपर रेखाएँ बनाए। जैसे $\overline{37}.\ \overline{08}\ \overline{81}$

चरण 2 दशमलव के प्रथम स्थान से प्रारंभ करके दशमलव भाग के अंकों के जोड़े बनाकर उन पर रेखाए बनाए। जैसे $\overline{37}.\ \overline{08}\ \overline{81}$

चरण 3 पूर्वानुसार भाग विधि से वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

चरण 4 जब पूर्णांक भाग समाप्त हो, उसके बाद दशमलव चिह्न अंकित करें और दशमलव वाला भाग नीचे उतारें।

जाँच 1218 = 609 × 2

अभिष्ठ वर्गमूल = 6.09

उदाहरण 28 : संख्या 0.00053361 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल :

	0.	0	2	3	1
0	0.	$\overline{00}$	$\overline{05}$	$\overline{33}$	$\overline{61}$
+0		0			
02			05		
+2			4		
043			1	33	
+3			1	29	
461				4	61
+1				4	61
462					0

चरण 1 इस संख्या में दशमलव बिन्दु के पहले कोई पूर्णांक नहीं है। इसलिए दशमलव बिन्दु के बाद से प्रारंभ करके रेखा (दंड) द्वारा जोड़े बनाए।

चरण 2 दी गई संख्या में दशमलव के बाद दो शून्य हैं अत: वर्गमूल में दशमलव के बाद एक शून्य आयेगा।

चरण 3 फिर आगे भाग विधि से वर्गमूल ज्ञात करेंगे।

जाँच 462 = 2 × 231

अभिष्ट वर्गमूल = 0.0231

प्रश्नावली 1.9

1. निम्नलिखित संख्याओं के भाग विधि द्वारा वर्गमूल ज्ञात कीजिए

(i) 225 (ii) 289 (iii) $\frac{361}{625}$ (iv) $\frac{100}{81}$

(v) $\frac{64}{25}$ (vi) 1.21 (vii) 7.29 (viii) 9.3025

(ix) 84.8241 (x) 225.6004 (xi) 0.00008281

2. एक वर्गाकार तालाब का क्षेत्रफल 256.6404 वर्गमीटर है। उस तालाब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

3. एक वर्गाकार कागज का क्षेत्रफल 3025 वर्ग सेन्टीमीटर हैं। उस कागज की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

1.9 भाग विधि से वर्गमूल ज्ञात करना

भाग विधि के उपयोग से हम किसी संख्या का वर्गमूल दशमलव के कुछ स्थानों तक शुद्ध ज्ञात कर सकते हैं। इसके लिये हमें दी हुई संख्या के दशमलव भाग के दाहिनी ओर शून्य लिख लेते हैं।

उदाहरण 29. 3 का वर्गमूल दशमलव के तीन स्थानों तक शुद्ध ज्ञात कीजिए।

हल : 1. 7 3 2 0

1	$\overline{3.}$	$\overline{00}$	$\overline{00}$	$\overline{00}$	$\overline{00}$
+1	1				
27	2	00			
+7	1	89			
343		11	00		
+3		10	29		
3462			71	00	
+2			69	24	
34640			1	76	00

$\sqrt{3}$ = 1.7320 दशमलव के चार स्थानों तक।

= 1.732 दशमलव के तीन स्थानों तक शुद्ध।

∴ अभीष्ट वर्गमूल = 1.732

इसके हल को हम निम्न चरणों में सम्पन्न करते हैं

चरण 1 दशमलव के तीन स्थानों तक शुद्ध मान ज्ञात करने हेतु हम वर्गमूल को दशमलव के चार स्थानों तक ज्ञात करेंगे।

चरण 2 इसके लिये दशमलव बिन्दु के दाहिने ओर आठ अंक (चार जोड़े) होने चाहिए।

चरण 3 दशमलव बिन्दु के बाद से प्रारंभ करके दो-दो शून्यों के जोड़ों पर रेखा खींचेगे।

चरण 4 भाग विधि से वर्गमूल ज्ञात करेंगे।

टिप्पणी

(1) चौथे स्थान का अंक यदि 5 से कम हो तो, इसे छोड़े देंगे। जैसे (1, 2, 3, 4 के अंक)

(2) यदि चौथे स्थान का अंक 5 या 5 से अधिक होता; तो हमें तीन स्थानों तक शुद्ध मान के लिये, तीसरे स्थान के अंक में 1 जोड़ देते है। (जैसे 5, 6, 7, 8, 9 का अंक हो)

उदाहरण 30. 2.8 का वर्गमूल दशमलव के तीन स्थानों तक शुद्ध मान ज्ञात कीजिए।

हल : 1. 6 7 3 3

1	$\overline{2}\cdot\overline{80}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}$
+1	1
26	1 80
+6	1 56
327	24 00
+7	22 89
3343	1 11 00
+3	1 00 29
33463	10 71 00
+3	10 03 89
33466	67 11

चरण 1 दशमलव बिन्दु के बाद एक अंक है तथा तीन स्थानों तक शुद्ध मान ज्ञात करना है। अत: दशमलव बिन्दु के बाद आठ अंक चाहिए इसके लिये सात शून्य दाहिने ओर लिखते हैं।

चरण 2 भागविधि की क्रिया करके वर्गमूल ज्ञात करते हैं।

चरण 3 चौथे स्थान पर संख्या 3 है जो पाँच से छोटी है। अत: उसे छोड़ने पर वर्गमूल का शुद्ध मान प्राप्त होता है।

$\sqrt{2.8} = 1.6733$

उदाहरण 31. 0.2 का वर्गमूल दशमलव के तीन स्थानों तक शुद्ध ज्ञात कीजिए।

हल :

	0. 4 4 7 2
4	$0.\ \overline{20}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}$
+4	16
84	4 00
+4	3 36
887	64 00
+7	62 09
8942	1 91 00
+2	1 78 84
8944	12 16

> **चरण 1** दशमलव बिन्दु के बाद एक अंक है अत: दाहिने ओर सात शून्य बढ़ाकर, जोड़े बनाकर रेखाएँ खीचें।
>
> **चरण 2** भाग विधि द्वारा वर्गमूल ज्ञात करें।

0.2 का वर्गमूल = 0.4472

∴ 0.2 का अभीष्ट वर्गमूल = 0.447

उदाहरण 32. $7\frac{2}{3}$ का वर्गमूल दशमलव के दो स्थानों तक शुद्ध ज्ञात कीजिए।

हल : $7\frac{2}{3}=\frac{23}{3}$

भागविधि से दो स्थानों तक शुद्ध वर्गमूल ज्ञात करने के लिए हमें $\frac{23}{3}$ को दशमलव छ: स्थानों तक लिखना होगा।

	2.768
2	$\overline{7}.\overline{66}\ \overline{66}\ \overline{67}$
+ 2	4
47	366
+7	329
546	3766
+6	3276
5528	49067
	44224
	4843

$\frac{23}{3}$ = 7.6666666

= 7.666667

$\therefore \sqrt{7\frac{2}{3}}=2.768$, दशमलव के 3 स्थानों तक

= 2.77, दशमलव के 2 स्थानों तक शुद्ध

टिप्पणी भिन्नों का वर्गमूल हम हर को करणीमुक्त कर भी प्राप्त कर सकते हैं। उदाहरण के लिए $\sqrt{7\frac{2}{3}}$ का मान निम्नलिखित विधि से भी ज्ञात किया जा सकता है।

$$\sqrt{7\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{23}{3}} = \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{69}}{3}$$

अब विभाजन विधि द्वारा

$\sqrt{69} = 8.306$, दशमलव के 3 स्थानों तक

$\sqrt{7\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{23}{3}} = \frac{\sqrt{69}}{3} = \frac{8.306}{3}$, दशमलव के 3 स्थानों तक

	8.306
8	$\overline{69}.\overline{00}\,\overline{00}\,\overline{00}$
	64
163	500
	489
16606	110000
	99636
	10364

वर्गमूल का सन्निकट मान ज्ञात करने की अन्य विधि

आईए इस विधि को समझने के लिए संख्या 2 का वर्गमूल ज्ञात करे।

हम सीख चुके हैं कि $1^2 = 1,\ 2^2 = 4,\ 3^2 = 9,\ \ldots$ आदि।

बड़ी संख्याओं के वर्ग और भी बड़ी संख्याएँ होगी। इस प्रकार हम देखते हैं कि ऐसी कोई प्राकृत संख्या नहीं होती है जिसका वर्ग 2 हो।

क्या कोई परिमेय संख्या ऐसी है जिसका वर्ग 2 हो? माना कि $\frac{p}{q}$ परिमेय संख्या का वर्ग 2 है, तब

$\left[\frac{p}{q}\right]^2 = 2$ अर्थात $\left[\frac{p^2}{q^2}\right] = 2$ या $p^2 = 2q^2$

परन्तु वर्ग संख्याओं 1, 4, 9, 16, 25, 36 .... इत्यादि में ऐसा कोई p और q संख्याएं नहीं हो सकती कि $p^2 = 2q^2$ अत: ऐसी कोई परिमेय संख्या नहीं हो सकती जिसका वर्ग 2 हो।

2 के वर्गमूल को एक ऐसी "**संख्या**" मानते हैं कि जिसका वर्ग 2 हो तो **वह "संख्या" परिमेय संख्या नहीं हो सकती। ऐसी संख्याएँ अपरिमेय संख्याएँ कहलाती हैं। $\sqrt{2}$ अपरिमेय संख्या है।**

ऐसी परिमेय संख्या ज्ञात करना संभव है जिसका वर्ग लगभग 2 हो। आइए हम इसे ज्ञात करें।

स्पष्ट: $1^2 < 2 < 2^2$

$\therefore\ 1 < \sqrt{2} < 2$

अर्थात $\sqrt{2}$ का मान 1 से अधिक होगा और 2 से कम होता है, अब हम 1 और 2 के बीच परिमेय संख्याएँ 1.1, 1.2, 1.3 .... 1.9 लें और उनके वर्ग ज्ञात करें।

हम देखते है कि ऐसी संख्या का वर्ग 2 नहीं है, फिर भी $(1.4)^2 = 1.96 < 2 < 2.25 = (1.5)^2$

$\therefore 1.4 < \sqrt{2} < 1.5$

अब 1.4 और 1.5 के बीच कौन-कौन सी परिमेय संख्याएँ हैं?

1.41, 1.42 1.43, ... 1.49 परिमेय संख्याएँ 1.4 और 1.5 के बीच में स्थिर है। इन सभी के वर्ग ज्ञात करने पर हम देखते हैं कि

$(1.41)^2 < 2 < (1.42)^2$

अत: $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$ इसी प्रकार हम देखते हैं कि $1.414 < \sqrt{2} < 1.415$

यदि प्रक्रिया हम दोहराते जावें, तो देखेंगे कि यह प्रक्रिया कभी समाप्त नहीं होगी। ऐसी संख्याएँ असांत दशमलव कहलाती हैं। परन्तु $\frac{12}{5} = 2.4$, $\frac{5}{4} = 1.25$, ... आदि सांत दशमलव संख्याएँ कहलाती हैं। इनमें दशमलव के कुछ निश्चित स्थान के बाद भाग की क्रिया समाप्त हो जाती है। $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$ तथा $1.\overline{3}, 1.2\overline{4}, \ldots$ आदि में दशमलव की क्रिया कभी समाप्त नहीं होती अत: इन्हें असांत दशमलव कहते हैं। सांत दशमलव संख्याएँ परिमेय संख्या एवं असांत दशमलव संख्याएँ अपरिमेय संख्याएँ होती हैं। अर्थात हमें ऐसी परिमेय संख्या मिलती ही चली जाएगी जो $\sqrt{2}$ के और अधिक निकट हो। हमने देखा कि $\sqrt{2}$ का मान एक परिमेय संख्या नहीं है। किन्तु हम $\sqrt{2}$ के मान के निकट परिमेय संख्या ज्ञात कर सकते हैं।

2 का वर्गमूल (भागविधि से) :

(दशमलव के दो या अधिक स्थानों तक $\sqrt{2}$ का शुद्ध मान ज्ञात करना)

	1. 4 1 4 2 1
1	$\overline{2}.\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}$
+1	1
24	1 00
+4	96
281	4 00
+1	2 81
2824	1 1900
+4	1 1296
28282	60400
+2	56564
282841	383600
	282841
	100759

अत: $\sqrt{2}$ = 1.41421 लगभग

प्रश्नावली 1.10

निम्नलिखित संख्याओं का दशमलव के तीन स्थानों तक शुद्ध वर्गमूल ज्ञात कीजिए

(1) 1.7 (2) 5 (3) 23.1 (4) 7 (5) 11

(6) 0.9 (7) 20 (8) 55 (9) 0.1 (10) 0.016

(11) $\frac{7}{8}$ (12) $\frac{5}{12}$ (13) $2\frac{1}{12}$ (14) $\frac{2}{3}$ (15) $1\frac{1}{2}$

सारणी (ई)

x	$\sqrt{x}$	x	$\sqrt{x}$	x	$\sqrt{x}$
1	1.000	34	5.831	67	8.185
2	1.414	35	5.916	68	8.246
3	1.732	36	6.000	69	8.307
4	2.000	37	6.083	70	8.367
5	2.236	38	6.164	71	8.426
6	2.449	39	6.245	72	8.485
7	2.646	40	6.325	73	8.544
8	2.828	41	6.403	74	8.602
9	3.000	42	6.481	75	8.660
10	3.162	43	6.557	76	8.718
11	3.317	44	6.633	77	8.775
12	3.464	45	6.708	78	8.832
13	3.606	46	6.782	79	8.888
14	3.742	47	6.856	80	8.944
15	3.873	48	6.928	81	9.000
16	4.000	49	7.000	82	9.055
17	4.123	50	7.071	83	9.110
18	4.243	51	7.141	84	9.165
19	4.359	52	7.211	85	9.220
20	4.472	53	7.280	86	9.274

x	$\sqrt{x}$	x	$\sqrt{x}$	x	$\sqrt{x}$
21	4.583	54	7.348	87	9.327
22	4.690	55	7.416	88	9.381
23	4.796	56	7.483	89	9.434
24	4.899	57	7.550	90	9.487
25	5.000	58	7.616	91	9.539
26	5.099	59	7.681	92	9.592
27	5.196	60	7.746	93	9.644
28	5.292	61	7.810	94	9.695
29	5.385	62	7.874	95	9.747
30	5.477	63	7.937	96	9.798
31	5.568	64	8.000	97	9.849
32	5.657	65	8.062	98	9.899
33	5.745	66	8.124	99	9.950

1.10 वर्गमूल सारणियों की सहायता से वर्गमूल का निकटतम मान ज्ञात करना

हम जान चुके हैं कि 2 का वर्गमूल परिमेय संख्या नहीं है। वास्तव में अनेक संख्याओं के वर्गमूल परिमेय संख्याएँ नहीं है। अनेक प्रश्नों को हल करने के लिए हमें संख्याओं के वर्गमूलों की आवश्यकता होती हैं। इस कारण सारणियाँ बनाई गई हैं।

इन सारणियों की सहायता से अधिकांश संख्याओं के वर्गमूल लिखे जा सकते हैं। आइए इन सारणियों (सारणी ई) का प्रयोग निम्नलिखित उदाहरणों से सीखते हैं।

उदाहरण 33 सारणी की सहायता से $\sqrt{5}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : **चरण 1.** सारणी के x स्तंभ में वह पंक्ति देखिए जिसमें 5 हो।

चरण 2. $\sqrt{5}$ अर्थात $\sqrt{x}$ वाले स्तंभ में संख्या 2.236 लिखी है।

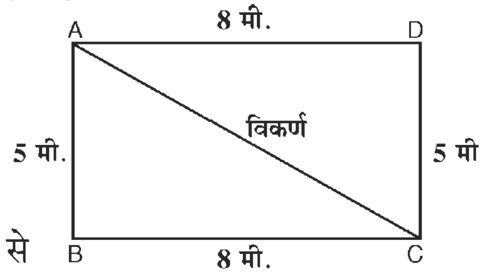
चरण 3. $x = 5$

या $\sqrt{x} = \sqrt{5} = 2.236$ (सारणी से)

$\therefore \sqrt{5}$ का अभीष्ट मान $= 2.236$

उदाहरण 34 : एक आयताकार भूखंड की लम्बाई 8 मीटर तथा चौड़ाई 5 मीटर है। इसके विकर्ण की लम्बाई का लगभग मान ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए ABCD आयताकार भूखंड है जहां



लम्बाई BC = AD = 8 मीटर

चौड़ाई AB = CD = 5 मीटर

क्योंकि ABC एक समकोण त्रिभुज हैं,

इसलिए पाईथागोरस (बौद्धायन) की प्रमेय से

$(\text{विकर्ण की लम्बाई})^2 = (\text{लम्बाई})^2 + (\text{चौड़ाई})^2$

$= (8)^2 + (5)^2$

$AC^2 = 64 + 25 = 89$

$\therefore$ विकर्ण की अभीष्ट लम्बाई = $\sqrt{89}$ मीटर

= 9.434 मीटर (सारणी से)

उदाहरण 35 : $\sqrt{27}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\sqrt{27} = \sqrt{3 \times 3 \times 3}$

$= 3\sqrt{3}$

$= 3\ (1.732)$ (सारणी से)

$\therefore$ $\sqrt{27}$ **का अभीष्ट मान = 5.196**

चरण 1. 27 के गुणनखण्ड कीजिए।
चरण 2. $\sqrt{3}$ के मान के लिए सारणी $\sqrt{x} = \sqrt{3}$ अर्थात 3 के सामने वाली पंक्ति से मान ज्ञात करेंगे।

उदाहरण 36 : $\sqrt{13.32}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि 13.32 का मान 13 और 14 के बीच का है।

अर्थात $13 < 13.32 < 14$

$\therefore \sqrt{13} < \sqrt{13.32} < \sqrt{14}$

$3.606 < \sqrt{13.32} < 3.742$

अब सारणी से $\sqrt{13} = 3.606$

$\sqrt{14} = 3.742$

इनका अंतर $= 3.742 - 3.606 = 0.136$

अर्थात 1 के लिए अन्तर = 0.136

$\therefore$ 0.32 के लिए अंतर $= 0.136 \times 0.32$

$= 0.044$

अतः $\sqrt{13.32} = \sqrt{13 + 0.32}$

$= 3.606 + 0.044$

$= 3.650$

$\therefore \sqrt{13.32}$ का अभीष्ट मान $= 3.650$

उदाहरण 37 : $\sqrt{1332}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : 1332 को हम लिख सकते हैं $\frac{1332 \times 100}{100} = 13.32 \times 100$

$\therefore \sqrt{1332} = \sqrt{13.32 \times 100} = 10 \times \sqrt{13.32}$

$= 10 \times 3.650 = 36.50$ $\sqrt{1332}$ का मान $= 36.50$

$\therefore \sqrt{1332}$ का अभीष्ट मान $= 36.5$

उदाहरण 38 : $\frac{\sqrt{37}}{\sqrt{64}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल- $\frac{\sqrt{37}}{\sqrt{64}} = \frac{1}{8} \times \sqrt{37}$

$\frac{1}{8} \times 6.083 = 0.7603$

$\therefore \frac{\sqrt{37}}{\sqrt{64}}$ का अभीष्ट मान $= 0.7603$

> सारणी से 37 के कालम के सम्मुख $\sqrt{x}$ के स्तंभ से $\sqrt{37} = 6.083$

प्रश्नावली 1.11

1. सारणी का उपयोग करके निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए

   (i) 7 (ii) 15 (iii) 21 (iv) $\frac{3}{5}$ (v) 8700

   (vi) 13.21 (vii) 55.62 (viii) 4192 (ix) $\frac{101}{169}$

2. एक विद्यालय के वर्गाकार सभागृह के फर्श का क्षेत्रफल 325 वर्ग मीटर है। इस फर्श की लगभग लम्बाई ज्ञात कीजिए।

3. एक वर्ग की भुजा की लम्बाई (लगभग) ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल एक आयत के क्षेत्रफल के बराबर है। इसकी लम्बाई 16 मीटर और चौड़ाई 15 मीटर है।

1.11 संख्या पद्धति का वास्तविक संख्याओं तक विस्तार

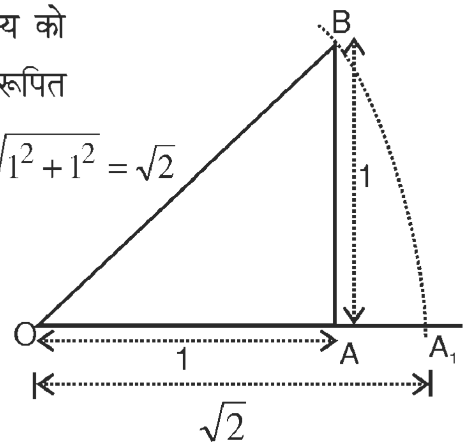
हम जान चुके हैं कि कुछ संख्याओं के वर्गमूल परिमेय नहीं होते। हमें कभी-कभी ऐसी लम्बाइयाँ नापनी पड़ती है, जिन्हें $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ आदि से निरूपित किया जाता है।

हम पूर्व कक्षाओं में पढ़ चुके हैं कि दो परिमेय संख्याओं के बीच अनन्त परिमेय संख्या होती है।

जब परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर बिन्दुओं द्वारा निरूपित किया जाता है, तो कोई दो बिन्दुओं के बीच ऐसा बिन्दु अंकित किया जाता है जो परिमेय संख्या को निरूपित करें। यह क्रिया हम निरन्तर करते चलें जा सकते हैं।

दो बिन्दुओं को कितने ही निकट क्यों न लिया जाय यह क्रिया कभी समाप्त नहीं होगी। इससे आप ऐसा सोचने लगे होंगे कि संख्या रेखा के सभी बिन्दु परिमेय संख्याओं को ही निरूपित करते हैं। परन्तु ऐसा नहीं है। यद्यपि संख्या पर परिमेय बिन्दु अत्यधिक पास-पास होते हैं, परन्तु रेखा पूरी तरह इन्हीं से नहीं बनती। संख्या रेखा पर परिमेय संख्याओं को निरूपित करने वाले बिन्दुओं के अतिरिक्त भी अन्य बहुत से बिन्दु है। यह निम्नानुसार समझा जा सकता है।

माना कि संख्या रेखा पर बिन्दु O, शून्य को निरूपित करता है तथा OA संख्या 1 को निरूपित करता है तो लम्बाई OA = 1 इकाई



समकोण त्रिभुज OAB की रचना इस प्रकार कीजिए की OA = AB = 1 इकाई, पाइथागोरस प्रमेय की सहायता से

कर्ण^2 = लम्ब^2 + आधार^2

या

$$OB^2 = AB^2 + OA^2$$

$$= (1)^2 + (1)^2 = 1 + 1$$

$$= 2$$

$$\therefore OB = \sqrt{2}$$

अब यदि हम बिन्दु O को केंद्र मानकर OB त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचें तो यह संख्या रेखा को बिन्दु A_1 पर काटेगा तथा $OA_1 = \sqrt{2}$ होगी।

संख्या रेखा पर बिन्दु A_1 ऐसा प्राप्त हो गया जो संख्या $\sqrt{2}$ को निरूपित करता है।

परन्तु हम जान चुके हैं कि $\sqrt{2}$ परिमेय नहीं है। इसी प्रकार हम देख सकते हैं कि $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ इत्यादि भी परिमेय संख्याएँ नहीं हैं। इस प्रकार हमने देखा कि परिमेय संख्याओं के अतिरिक्त भी कुछ संख्याएँ होती हैं।

संख्या रेखा के बिन्दु जो परिमेय संख्याओं को निरूपित नहीं करते, अपरिमेय संख्याओं का निरूपण करते हैं। ऐसी संख्या पद्धति, जिसमें परिमेय एवं अपरिमेय दोनों प्रकार की संख्याएँ शामिल हों, वास्तविक संख्या पद्धति कहलाती हैं। वास्तविक संख्याओं के बारे में विस्तृत जानकारी आगे की कक्षाओं में पढ़ेंगे।

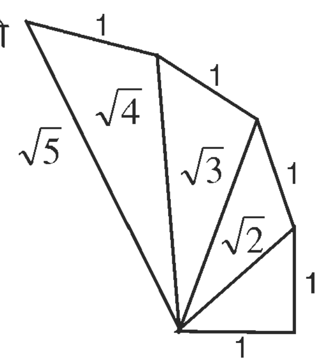
प्रश्नावली 1.12

1. निम्नलिखित भिन्नों को दशमलव में रूपांतरित कीजिए

   (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{3}$ (iii) $\frac{4}{9}$ (iv) $\frac{8}{13}$ (v) $\frac{225}{16}$

2. $56.2\overline{39}$ को परिमेय संख्या के रूप में लिखिए।
3. सांत और असांत दशमलव भिन्न का एक-एक उदाहरण दीजिए।
4. दिए गए चित्र को देखिए तथा रचना क्रम को आगे बढ़ाते हुए निम्नांकित लम्बाई निरूपित कीजिए

   $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}$



प्रश्नावली 1.13

1. निम्नलिखित रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(i) संख्या 169 का वर्गमूल .... है।

(ii) संख्या 0.0144 का वर्गमूल .... है।

(iii) $\frac{9}{16}$ का वर्गमूल .... है।

(iv) सम संख्या 8 का वर्ग .... होगा।

(v) विषम संख्या 11 का वर्ग .... होगा।

(vi) $\sqrt{2}$ का मान (दशमलव के दो अंक) .... है।

(vii) 1.5 का वर्ग .... होगा।

(viii) 17 में से .... घटाए की वह सम पूर्ण वर्ग बन जाएँ।

2. सही जोड़ियां बनाइए

(I)

संख्याएँ	**वर्गमूल**
225	16
900	20
400	21
441	30
256	15

(II)

संख्याएँ	**वर्ग**
10	484
0.1	529
23	10000
100	0.01
22	100

(III)

संख्याएँ	**संख्याओं का मान घात के स्वरूप में**
25	$(12)^2$
36	$(25)^2$
49	$(6)^2$
144	$(7)^2$
625	$(5)^2$

3. निम्नलिखित कथनों के लिए सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखिए।

(i) वर्ग संख्या में अंकों की संख्या सम होती है।

(ii) अभाज्य संख्या का वर्ग अभाज्य ही होता है।

(iii) दो वर्ग संख्याओं का योगफल एक वर्ग संख्या होता है।

(iv) दो वर्ग संख्याओं का अंतर एक वर्ग संख्या होता है।

(v) दो वर्ग संख्याओं का गुणनफल एक वर्ग संख्या होता है।

(vi) कोई भी वर्ग संख्या ऋणात्मक नहीं होती है।

(vii) 50 और 60 के बीच कोई वर्ग संख्या नहीं है।

(viii) 200 तक मात्र 14 संख्याएँ ही वर्ग संख्याएँ हैं।

4. निम्नलिखित कथनों के लिए सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखिए :

(i) $\sqrt{0.9} = 0.03$

(ii) यदि a एक ऋणात्मक है, तो a^2 भी ऋणात्मक है।

(iii) यदि a एक प्राकृत संख्या है, तो $\sqrt{a}$ एक परिमेय संख्या है।

(iv) यदि p और q पूर्ण वर्ग संख्याएँ हैं, तो $\sqrt{\frac{p}{q}}$ एक परिमेय संख्या है।

(v) किसी अभाज्य संख्या का वर्गमूल सन्निकट ही प्राप्त किया जा सकता है, शुद्ध नहीं।