अध्याय

10

त्रिभुजों तथा चतुर्भुजों के क्षेत्रफल
(Area of Triangles and Quadrilaterls)

10.01 प्रस्तावना (Introduction)

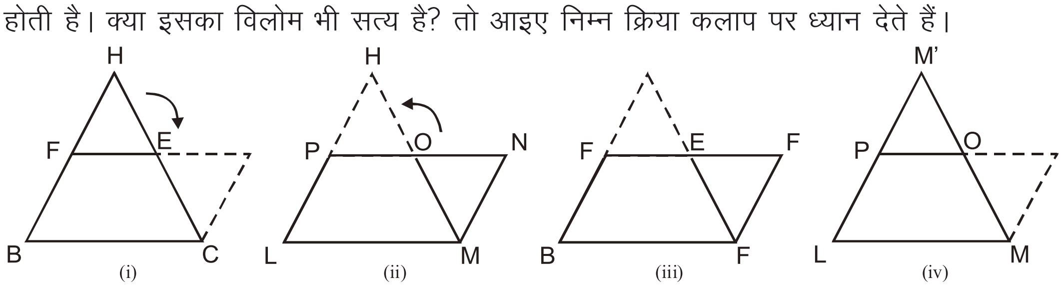
हम जानते हैं कि ज्यामिति के अध्ययन की आवश्यकता खेतों के परिसीमन और उनके बँटवारे के कारण हुई है। उदाहरण के लिए कार्तिक अपने एक समलम्ब आकृति के खेत का बँटवारा अपनी दो पुत्रियों को असमान्तर सीमाओं के मध्य बिन्दुओं से लकीर खींच कर करता है (देखिए चित्र 10.1) क्या यह बँटवारा क्षेत्रफल में समान हुआ है? इस प्रकार की समस्याओं के समाधान के लिए यह आवश्यक है कि, समतलीय आकृतियों के क्षेत्रफल पर चिन्तन किया जाए।

चित्र 10.1

10.02 क्षेत्रफल

एक सरल बन्द आकृति द्वारा किसी तल पर घेरा हुआ भाग उस आकृति का तलीय क्षेत्र कहलाता है और इस तलीय क्षेत्र का परिमाण या माप उस आकृति का क्षेत्रफल (area) कहलाता है। इस परिमाण या माप को सदैव किसी मात्रक की सहायता से व्यक्त किया जाता है, जैसे 6 वर्ग सेमी (सेमी^{2}), 9 वर्ग मीटर (मीटर^2), 12 हेक्टेयर इत्यादि।

अध्याय 7 में हमने सर्वांगसम आकृतियों का अध्ययन किया है। यदि दो आकृतियाँ आकार एवं माप में समान हो तो वे सर्वांगसम आकृतियाँ हैं। यदि उन्हें काट कर किसी तल पर रखें तो उस तल पर दोनों ही आकृतियों का तलीय क्षेत्र समान आता है। अर्थात् दो सर्वांगसम आकृतियाँ क्षेत्रफल में समान होती है। क्या इसका विलोम भी सत्य है? तो आइए निम्न क्रिया कलाप पर ध्यान देते हैं।



चित्र 10.2

पुस्तक के इस पृष्ठ के नीचे कार्बन लगाकार एक सफेद कागज पर पेन्सिल व स्केल की सहायता लेकर चरण–1 बिन्दुकित भाग को छोड कर चित्र 10.2 (i), (iii) की कार्बन प्रति तैयार कीजिए। तैयार कार्बन प्रतियों से चित्र 10.2 (i) के ΔAEF को काट कर चित्र 10.2 (ii) में दर्शाए अनुसार E को उसी बिन्दु पर रखकर ΔAEF को इतना घुमाये कि A, C पर आ जाए और चिपका दीजिए, हमें BCF'F एक चतुर्भुज प्राप्त होगा इसी प्रकार चित्र 10.2 (iii) में से ΔMNO को काटकर O को उसी बिन्दु पर रख कर इतना घुमाइए कि N, P पर आ जाए और चिपका दीजिए जैसा कि चित्र 10.2 (iv) है। इस प्रकार हमें LMN एक Δ त्रिभुज प्राप्त होगा।

चरण–2 प्राप्त चतुर्भुज BCFF को चित्र 10.2 (iii) पर एवं $\Delta LMM'$ को चित्र 10.2 (i) पर रखिए क्या ये परस्पर एक दूसरे को पूरा–पूरा ढक रहे हैं? हाँ ढक रहे हैं। अर्थात् चतुर्भुज $BCF'F \cong$ चतुर्भुज LMNP तथा $\Delta LMM' \cong \Delta BCA$ क्या ये सर्वांगसम आकृतियाँ क्षेत्रफल में भी समान हैं? निश्चित रूप से समान हैं। परन्तु इसका विलोम ΔABC तथा एवं चतुर्भुज BCF'F तथा चतुर्भुज LMNP एवं त्रिभुज LMM' जो क्षेत्रफल में समान है। क्या ΔABC व चतुर्भुज BCF'F तथा चतुर्भुज LMNP व $\Delta LMM'$ सर्वांगसम हैं? निःसन्देह नहीं है।

अर्थात् हम कह सकते है कि सर्वांगसम आकृतियाँ क्षेत्रफल में समान होती हैं परन्तु क्षेत्रफल में समान आकृतियाँ सर्वांगसम भी हो। यह आवश्यक नहीं।

यदि चतुर्भुज $BCF'F \cong$ चतुर्भुज LMNP और $\Delta LMM' \cong \Delta BCA$ है तो इन्हें $ar(BCF'F) = ar(LMNP)$ और $ar(LMM') = ar(BCA)$ लिखेंगे।

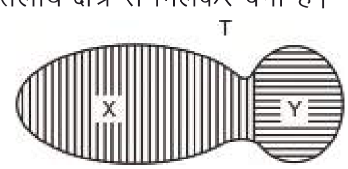
आइए अब हम नीचे चित्र 10.3 को देखते हैं।

आप देख रहे हैं कि आकृति T, आकृतियाँ X व Y द्वारा दो तलीय क्षेत्र से मिलकर बना है।

जिसे हम आकृति T का क्षेत्रफल = आकृति X का क्षेत्रफल + आकृति Y का क्षेत्रफल

अथवा

$ar(T) = ar(X) + ar(Y)$ लिखेंगे।

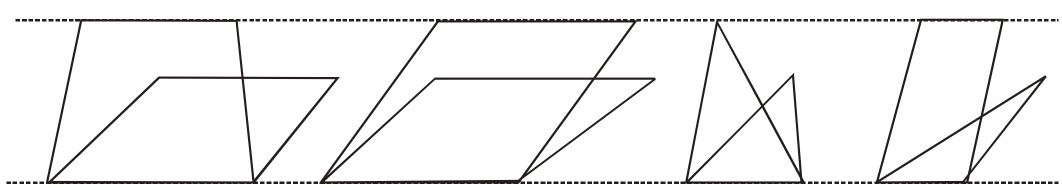


चित्र 10.3

पिछली कक्षाओं में आपने अनेक आकृतियाँ जैसे त्रिभुज, आयत, वर्ग आदि का क्षेत्रफल ज्ञात किया होगा। इन आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हमने सूत्रों का भी उपयोग किया है। इस अध्याय में हम इन ज्यामितीय आकृतियों के क्षेत्रफलों के मध्य संबंध का उस प्रतिबंध के अंतर्गत अध्ययन करेंगे जब ये एक ही आधार पर तथा एक ही समान्तर रेखा युग्म के मध्य स्थित हो। इस अध्ययन के माध्यम से उक्त सूत्रों के ज्ञान को और अधिक गूढता से समझने का प्रयत्न करेंगे।

10.03 एक ही आधार एवं एक ही समान्तर युग्म के मध्य बनी आकृतियाँः

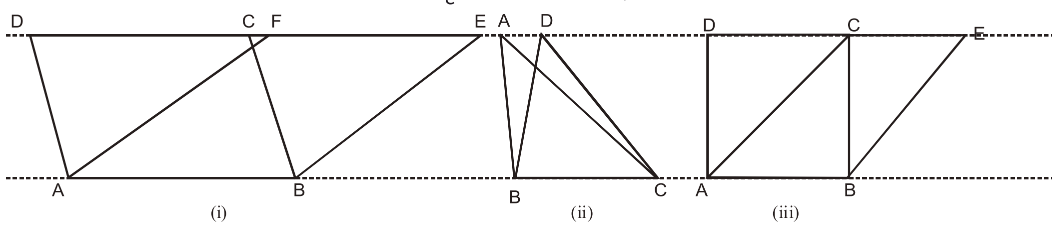
नीचे चित्र 10.4 में बनी आकृतियों को देखिए।



चित्र 10.4

चित्र 10.4 (i), (ii), (iii), (iv) में बनी सभी दो–दो आकृतियाँ क्रमशः अपने–अपने एक ही आधार पर बने हैं। परन्तु बिन्दु भित रेखा युग्म समान्तर रेखा युग्म के मध्य में नहीं बने हैं।

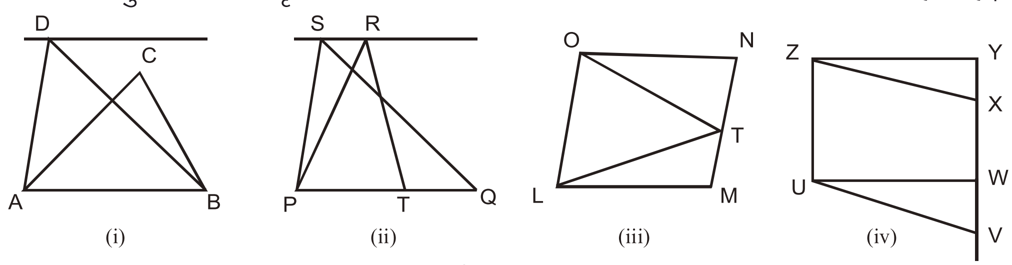
अब नीचे के चित्र 10.5 में बनी आकृतियों को देखिए:



चित्र 10.5

चित्र 10.5 के अन्तर्गत बनी सभी दो–दो आकृतियाँ के मध्य बने हैं। यहाँ चित्र 10.5 (i) में एक ही आधार AB और एक ही समान्तर रेखा युग्म AB, DE के मध्य समान्तर चतुर्भुज ABCD तथा समान्तर चतुर्भुज ABEF बने हैं। चित्र 10.5 (ii) में ΔABC व ΔBCD एक ही आधार BC एवं एक ही समान्तर रेखा युग्म BC, AD के मध्य बने हैं। इसी प्रकार 10.5 (ii) में ΔBCD o ΔBCD एक ही आधार BC एवं एक ही समान्तर रेखा युग्म BC, AD के मध्य बने है। इसी प्रकार 10.5 (iii) में वर्ग ABCD एवं समान्तर चतुर्भुज ABEL एक ही आधार AB एवं एक ही समान्तर रेखा युग्म AB, DE के मध्य बने हैं।

चित्र 10.5 (i), (ii), (iii) जैसी आकृतियाँ ही एक ही आधार और एक ही समान्तर रेखा युग्म के मध्य बनी आकृतियाँ कहलाती हैं। इन सभी दो–दो आकृतियों के आधार उभयनिष्ठ हैं, तथा उभयनिष्ठ आधार के सम्मुख प्रत्येक आकृति के शीर्ष उस आधार के समान्तर किसी रेखा पर स्थित होते हैं।



चित्र 10.6

अनुच्छेद 10.6 के अन्तर्गत अब तक प्राप्त जानकारी को ध्यान में रखकर चित्र 10.6 (i), (ii), (iii) व (iv) में कौन से समूह की आकृतियाँ एक ही आधार और एक ही समान्तर रेखा युग्म के मध्य बनी है? आओ चर्चा करें।

चित्र 10.6 (i) में बने ΔABC व त्रिभुज ABD का आधार AB उभयनिष्ठ है परन्तु ΔABC का शीर्ष C, AB के समान्तर रेखा ℓ पर नहीं है।

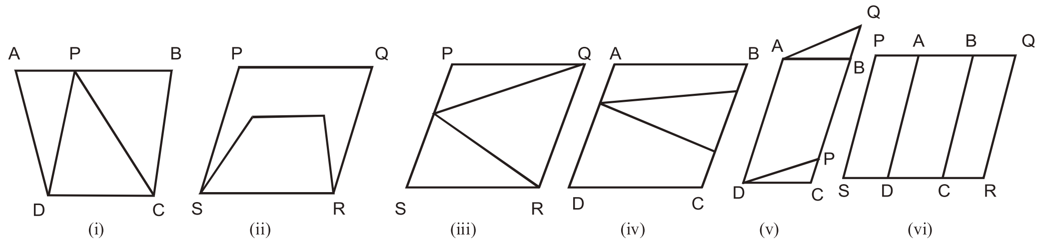
चित्र 10.6 (ii) में बने ΔPTR का आधार PT व ΔPQS का आधार PQ है अर्थात् दोनों त्रिभुजों का आधार उभयनिष्ठ नहीं है किन्तु दोनों त्रिभुज PQ व SR एक ही समान्तर रेखा युग्म के मध्य बने हैं।

चित्र 10.6 (iii) में बने समान्तर चतुर्भुज LMNO व ΔLTO एक ही आधार LO व LO || MN के मध्य बने है। इसी प्रकार चित्र 10.6 (iv) में भी समान्तर चतुर्भुज UVXZ व आयत UWYZ एक ही आधार UZ एवं एक ही समान्तर रेखा युग्म UZ, VY के मध्य बने हैं।

इस प्रकार चित्र 10.6 (i), (ii) एक ही आधार एवं एक ही समान्तर रेखा युग्म के मध्य बनी आकृतियों की श्रेणी में नहीं आते जबकि 6.5 (iii), (iv) इस श्रेणी में कहे जा सकते है।

प्रश्नमाला 10.1

1. निम्नलिखित आकृतियों में कौन सी आकृतियाँ एक ही आधार और एक ही समान्तर रेखाओं के मध्य स्थित है? ऐसी स्थिति में उभयनिष्ठ आधार और समान्तर रेखायुग्म लिखिए।

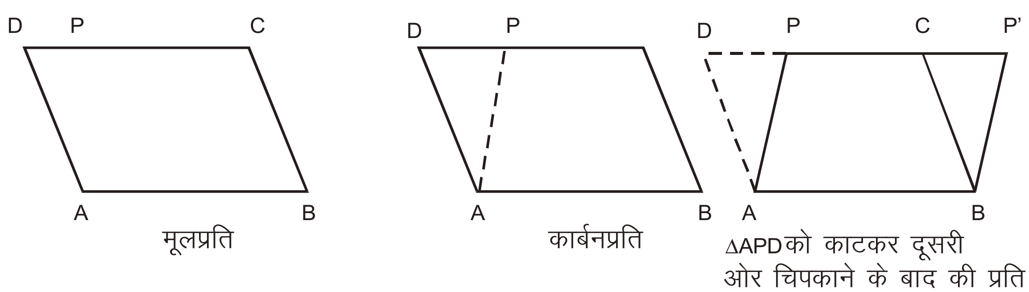


चित्र 10.7

2. एक ही आधार एवं एक ही समान्तर रेखा युग्म के मध्य निम्न आकृतियाँ अपनी अभ्यास पुस्तिका में बनाइए
   (i) एक अधिक कोण त्रिभुज और एक समलम्ब चतुर्भुज
   (ii) एक समान्तर चतुर्भुज और एक समद्विबाहु त्रिभुज
   (iii) एक वर्ग और एक समान्तर चतुर्भुज
   (iv) एक आयत और एक समचतुर्भुज
   (v) एक समचतुर्भुज और एक समान्तर चतुर्भुज

क्रिया कलाप 10.2

चरण–1 तीन सफेद कागजों के मध्य कार्बन रखकर कार्बन प्रती सहित एक ही समान्तर चतुर्भुज की दो प्रतियाँ बनाइए और ABCD द्वारा चारों शीर्षों को नामांकित भी कीजिए, जिसकी भुजा CD पर एक बिन्दु P इतने दबाव के साथ लगाइए कि वह कार्बन प्रति पर भी आ जाए।



चित्र 10.8

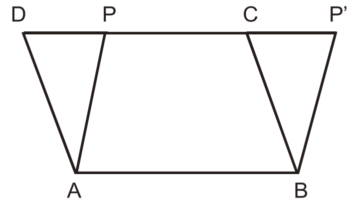
चरण–2 (i) मूल प्रति को काट कर अपनी अभ्यास पुस्तिका के एक पृष्ठ पर चिपकाइए।

(ii) कार्बन प्रति पर अंकित P को A से मिलाने के बाद बने APD को काटिए। ΔAPD को कार्बन प्रतियों के दूसरी ओर इस प्रकार चिपकाए कि कटे हुए त्रिभुज की भुजा AD कटने के बाद प्राप्त समलम्ब ABCP की भुजा BC को सम्पाती करे। ध्यान रहे बिन्दु A, B पर व D, C पर रहना चाहिए।

इस प्रकार हमें दो नये समान्तर चतुर्भुज ABCD एवं ABP'P प्राप्त हो रहे हैं। दोनों प्राप्त नये चतुर्भुजों में से एक दो अभ्यास पुस्तिका के उसी पृष्ठ पर चित्र 6.7 (iii) जैसे चिपका दीजिए।

चरण–3 दूसरे नये समान्तर चतुर्भुज ABP'P को मूल प्रति पर इस प्रकार चिपकाए कि दोनों समान्तर चतुर्भुजों की भुजा AB सम्पाती हो जाए (देखिए चित्र 10.9) एक नई आकृति में दो समान्तर

चतुर्भुज ABCD एवं ABP'P एक ही आधार व एक ही समान्तर रेखाओं के मध्य बने है।



चित्र 10.9

क्या आप कह सकते हैं कि समान्तर चतुर्भुज ABCD एवं ABP'P क्षेत्रफल में बराबर हैं? चलिए देखते हैं।

चूंकि $\Delta APD \cong \Delta BP'C$ (ΔAPD को ही काटकर चिपकाया है)

अतः $ar(APD) = ar(BP'C)$

दोनों और ar(ABCP) जोड़ने पर

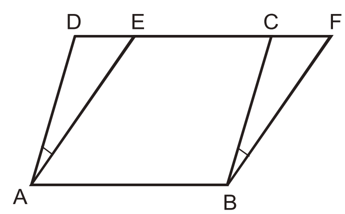
$$ar(APD) + ar(ABCP) = ar(ABCP) + ar(BP'C)$$

या $ar(ABCD) = ar(ABP'P)$

अर्थात् दोनों समान्तर चतुर्भुज, जो एक ही उभयनिष्ठ भुजा AB तथा AB || DP' (समान्तर युग्म) के मध्य बने हैं। क्षेत्रफल में बराबर हैं।

आइए प्राप्त इस परिणाम को दूसरे तरीके से सिद्ध करने का प्रयत्न करते हैं।

प्रमेय 10.1 एक ही आधार और एक ही समान्तर रेखाओं के बीच के समान्तर चतुर्भुजों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं।



चित्र 10.10

दिया है : दो समान्तर चतुर्भुज ABCD और ABFE जिनका आधार AB है, जो समान्तर रेखाओं AB और DF के मध्य स्थित हैं।

सिद्ध करना है : समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = समान्तर चतुर्भुज ABFE का क्षेत्रफल

उपपत्ति : Δ ADE और Δ BCF में,

AE = BF (समान्तर चतुर्भुज ABFE की सम्मुख भुजाएँ)

$\angle$DAE = $\angle$CBF (संगत कोण)

AD = BC (समान्तर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाएँ)

अर्थात् भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता नियम से

Δ ADE $\cong$ Δ BCF

अतः क्षेत्रफल (Δ ADE) = क्षेत्रफल (Δ BCF)

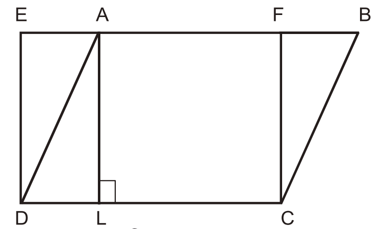
दोनों पक्षों में क्षेत्रफल (ABCE) जोड़ने पर

क्षेत्रफल (Δ ADE) + क्षेत्रफल (ABCE) = क्षेत्रफल (Δ ADE) + क्षेत्रफल (ABCE)

क्षेत्रफल (ABCD) = क्षेत्रफल (ABFE) ''इतिसिद्धम''।

उपप्रमेय–1

एक समान्तर चतुर्भुज और एक आयत जो एक ही आधार तथा दो समान्तर रेखाओं के बीच स्थित हो, तो उनके क्षेत्रफल समान होते हैं तथा समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल आधार × दोनों समान्तर रेखाओं के मध्य दूरी के गुणन के बराबर होता है।



चित्र 10.11

दिया हुआः चित्र 10.11 में, ABCD एक समान्तर चतुर्भुज और EFCD एक आयत है। साथ ही AL ⊥ DC है

सिद्ध करना : (i) $ar(ABCD) = ar(EFCD)$

उपपति : (ii) $ar(ABCD) = DC \times AL$

(i) चूंकि आयत एक समान्तर चतुर्भुज भी होता है।

अतः $ar(ABCD) = ar(EFCD)$ (प्रमेय 10.1 से) ... (i)

(ii) चूंकि आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

अतः $ar(EFCD) = DC \times FC$

इसलिए $ar(ABCD) = DC \times FC$ [(i) से] ... (ii)

$\because$ $AL \perp DC$ दिया हुआ है

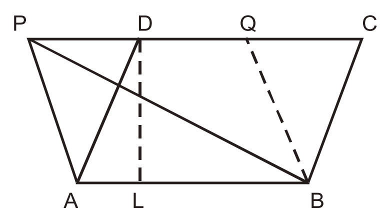
इस प्रकार AFCL भी एक आयत है

$\therefore$ AL = FC ... (iii)

$\Rightarrow$ $ar(ABCD) = DC \times AL$ [(ii) एवं (iii) से] ''इतिसिद्धम''

उपप्रमेय–2 एक त्रिभुज और एक समान्तर चतुर्भुज एक ही आधार और एक ही समान्तर रेखा युग्म के साथ स्थित हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल समान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।

दिया हुआः ΔABP और समान्तर चतुर्भुज ABCD एक ही आधार AB पर एवं AB || PC के मध्य बने है।



चित्र 10.12

सिद्ध करना : $ar(PAB) = \frac{1}{2} ar(ABCD)$

रचना BQ रेखा AP के समान्तर खींची

उपपतिः AB || CD (दिया हुआ है)

अतः AB || PQ

तथा AP || BQ (रचना से)

अतः ABPQ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore$ $ar(ABCD) = ar(ABQP)$ (प्रमेय 10.1 से) ... (i)

तथा $\Delta ABP \cong \Delta QPB$ (समान्तर चतुर्भुज का एक विकर्ण त्रिभुज को दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।)

अतः $ar(ABP) = ar(QPB) = \frac{1}{2} ar(ABQP) \Rightarrow ar(ABP) = \frac{1}{2} ar(ABCD)$

इति सिद्धम

उपप्रमेय–3 त्रिभुज का क्षेत्र $= \frac{1}{2}$ आधार × ऊँचाई होता है।

चित्र 6.10 में यदि $DL \perp AB$ है तो उप प्रमेय–1 से

$$ar(ABCD) = AB \times DL$$

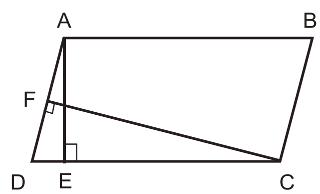
परन्तु $ar(PAB) = \frac{1}{2} ar(ABCD)$ (उपप्रमेय–2 से)

अतः $ar(PAB) = \frac{1}{2} AB \times DL$

अर्थात् त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार × ऊँचाई

प्रश्नमाला 10.2

1. चित्र 10.13 में, ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है, $AE \perp DC$ और $CF \perp AD$ है। यदि **AB** = 16 cm, AE = 8 cm और CF = 10 cm है, तो AD ज्ञात कीजिए।



चित्र 10.13

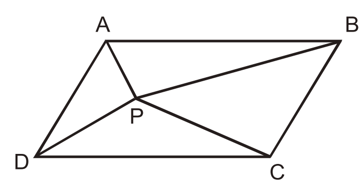
2. यदि E, F, G और H क्रमशः समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजाओं के मध्य–बिन्दु हैं, तो दर्शाइए कि $\mathrm{ar}(\mathrm{EPGH}) = \frac{1}{2} \mathrm{ar}(\mathrm{ABCD})$ है।

3. P और Q क्रमशः समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजाओं DC और AD पर स्थित बिन्दु हैं। दर्शाइए कि ar (APB) = ar (BQC) है।

4. चित्र 10.14 में, P समांतर चतुर्भुज ABCD के अभ्यंतर में स्थित कोई बिन्दु है। दर्शाइए कि

(i) $\mathrm{ar}(\mathrm{APB}) + \mathrm{ar}(\mathrm{PCD}) = \frac{1}{2} \mathrm{ar}(\mathrm{ABCD})$

(ii) $\mathrm{ar}(\mathrm{APD}) + \mathrm{ar}(\mathrm{PBC}) = \mathrm{ar}(\mathrm{APB}) + \mathrm{ar}(\mathrm{PCD})$

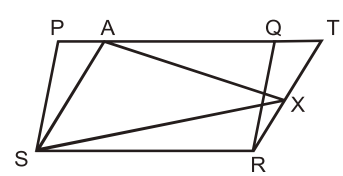


चित्र 10.14

5. चित्र 10.15 में, PQRS और ABRS समांतर चतुर्भुज हैं तथा X भुजा BR पर स्थित कोई बिन्दु है। दर्शाइए कि

(i) $\mathrm{ar}(\mathrm{PARS}) = \mathrm{ar}(\mathrm{ABRS})$

(ii) $\mathrm{ar}(\mathrm{AXS}) = \frac{1}{2} \mathrm{ar}(\mathrm{PQRS})$

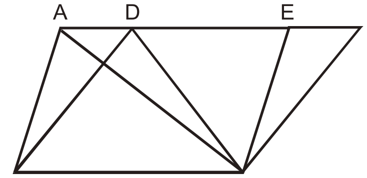


चित्र 10.15

6. एक किसान के पास समानान्तर चतुर्भुज PQRS के रूप का एक खेत था। उसने RS पर स्थित कोई बिन्दु A लिया और उसे P और Q से मिला दिया। खेत कितने भागों में विभाजित हो गया है? इन भागों के आकार क्या है? किसान खेत में गेहूँ और दालें बराबर–बराबर भागों में अलग–अलग चाहता है। वह ऐसा कैसे करे ?

10.04 एक ही आधार ओर एक ही समान्तर रेखा युग्म के मध्य स्थित त्रिभुज

प्रमेय 10.2 एक ही आधार और एक ही समान्तर रेखाओं के बीच त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं।



चित्र 10.16

दिया है : Δ ABC और Δ DBC एक ही आधार BC पर तथा समान्तर रेखाओं BC एवं AF के मध्य में स्थित है।

सिद्ध करना है :

क्षेत्रफल (Δ ABC) = क्षेत्रफल (Δ DBC)

रचना : C से क्रमशः AB एवं BD के समांतर रेखाएँ CE एवं CF खींची।

उपपत्ति : ABCE और DBCF समान्तर रेखाओं BC और AF के मध्य स्थित है, अतः (प्रमेय 10.1)

क्षेत्रफल (स. च. ABCE) = क्षेत्रफल (समान्तर चतुर्भुज DBCF) . . . (1)

∵ AC समान्तर चतुर्भुज ABCE का विकर्ण है, अतः

क्षेत्रफल $\Delta ABC = \frac{1}{2}$ क्षेत्रफल (समान्तर चतुर्भुज ABCE) . . . (2)

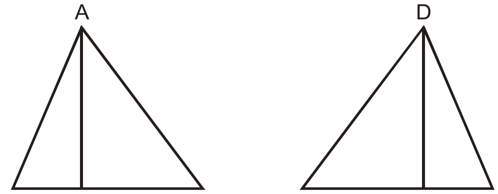
इसी प्रकार DC समान्तर चतुर्भुज DBCF का विकर्ण है, अतः

क्षेत्रफल $\Delta DBC = \frac{1}{2}$ क्षेत्रफल (समान्तर चतुर्भुज DBCE) . . . (3)

समीकरण (1), (2) और (3) से

क्षेत्रफल (Δ ABC) = क्षेत्रफल (Δ DBC) **''इतिसिद्धम्''।**

प्रमेय 10.3 यदि दो त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हों और एक त्रिभुज की एक भुजा, दूसरे त्रिभुज की एक भुजा के बराबर हो, तो उनके संगत शीर्षलम्ब बराबर होते हैं।



चित्र 10.17

दिया है : Δ ABC और Δ DEF में

(i)क्षेत्रफल (Δ ABC) = क्षेत्रफल (Δ DEF)

(ii) BC = EF

सिद्ध करना है : शीर्ष लम्ब AN = शीर्ष लम्ब DM

उपपत्ति : Δ ABC में, भुजा BC के संगत शीर्ष लम्ब AN है, अतः

क्षेत्रफल $(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \times BC \times AN$ (उपप्रमेय–3 से) . . . (1)

इसी प्रकार

$$\text{क्षेत्रफल } (\Delta DEF) = \frac{1}{2} \times EF \times DM \text{ (उपप्रमेय–3 से)} \qquad \ldots (2)$$

दिया हुआ है कि

क्षेत्रफल (ΔABC) = क्षेत्रफल (ΔDEC)

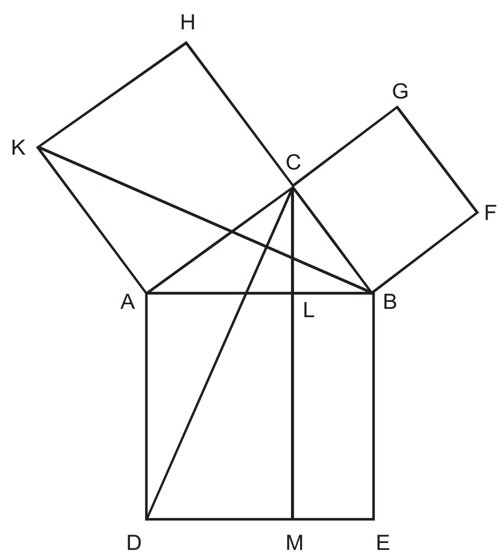
अतः $\frac{1}{2} \times BC \times AN = \frac{1}{2} \times EF \times DM$

यहाँ $BC = EF$

अतः $AN = DM$ ''इतिसिद्धम्''

10.05 बौधायन प्रमेय (Baudhayan theorem):

बौधायन ने हमें, समकोण त्रिभुज पर एक बहुत महत्वपूर्ण परिणाम दिया है, जिसे हम बौधायन प्रमेय के नाम से जानते हैं। (यह प्रमेय पाइथागोरस प्रमेय के नाम से भी विख्यात है)। अब हम इस प्रमेय को सिद्ध करेंगे।



चित्र 10.18

प्रमेय 10.4 किसी समकोण त्रिभुज में, कर्ण पर बना वर्ग अन्य दोनों भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है।

दिया है : ΔABC में, $\angle C$ समकोण है और भुजाओं AB, BC और CA पर बने वर्ग क्रमशः ADEB, CBFG और ACHK हैं।

सिद्ध करना है : वर्ग ADEB = वर्ग ACHK + वर्ग CBFG

रचना : C से BE के समान्तर रेखा CM खींची जो AB को L पर प्रतिच्छेद करती है। BK एवं CD को मिलाया।

उपपत्ति : $\angle BAD = \angle CAK = 90^{o}$

दोनों पक्षों में $\angle CAB$ जोड़ने पर

$$\angle BAD + \angle CAB = \angle CAK + \angle CAB \qquad \ldots (1)$$

$\Rightarrow \quad \angle CAD = \angle BAK$

अब Δ BAK और Δ CAD में

$AB = AD$ [वर्ग ABED की भुजाएँ]

$\angle BAK = \angle CAD$ [(1) से]

$AK = AC$ [वर्ग ACHK की भुजाएँ]

भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से,

$$\Delta BAK \cong \Delta CAD \qquad \ldots (2)$$

पुनः $\angle BCA = \angle ACH = 90^\circ$

$$\angle BCA + \angle ACH = 180^\circ$$

अर्थात् BCH एक सरल रेखा है।

CH $\parallel$ AK (वर्ग ACHK की सम्मुख भुजा)

Δ BAK और वर्ग ACHK एक ही आधार AK तथा समान्तर रेखाओं AK एवं BH के मध्य स्थित हैं।

अतः $\Delta BAK = \frac{1}{2}$ वर्ग ACHK $\qquad \ldots (3)$

इसी प्रकार Δ ADC और आयत ADML एक ही आधार AD और समानान्तर रेखाओं AD एवं CM के मध्य स्थित है, अतः

$\Delta CAD = \frac{1}{2}$ आयत ADML $\qquad \ldots (4)$

(2), (3) और (4) से

$\Delta CAD = \Delta BAK = \frac{1}{2}$ वर्ग ACHK

$= \frac{1}{2}$ आयत ADML

$\therefore$ वर्ग ACHK = आयत ADML $\qquad \ldots (5)$

इसी प्रकार

वर्ग CBFG = आयत LMEB $\qquad \ldots (6)$

(5) और (6) से

आयत ADML + आयत LMEB = वर्ग ACHK + वर्ग CBFG

वर्ग ADEB = वर्ग ACHK + वर्ग CBFG **''इतिसिद्धम्''**

प्रमेय 10.5 : (बौधायन प्रमेय का विलोम)

किसी त्रिभुज में, यदि एक भुजा का वर्ग अन्य दोनों भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर हो, तो इस भुजा के सामने का कोण एक समकोण होता है।

दिया है : Δ ABC में, $AB^2 + BC^2 = AC^2$

सिद्ध करना है : $\angle B = 90^o$

रचना : Δ PQR इस प्रकार बनाया कि $\angle Q = 90^o$ हो और $PQ = AB$ एवं $QR = BC$ हों।

उपपत्ति : Δ PQR में, बौधायन प्रमेय से

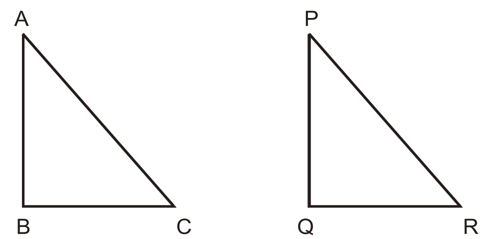
$$PR^2 = PQ^2 + QR^2$$

परन्तु $PQ = AB$ एवं $QR = BC$

अतः $PR^2 = AB^2 + BC^2$

दिया हुआ है कि

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$



चित्र 10.19

समीकरण (1) और (2) से

$$PR = AC$$

अब Δ ABC एवं Δ PQR में,

$PQ = AB$ (रचना से)

$QR = BC$ (रचना से)

$PR = AC$ [(3) से]

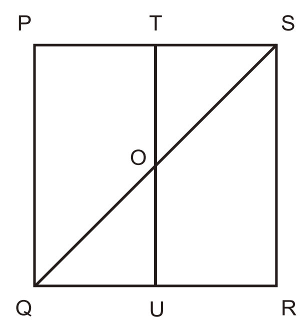
भुजा–भुजा–भुजा सर्वांगसमता से

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$ अतः $\angle B = \angle Q = 90^o$

अर्थात् $\angle B = 90^o$ **''इतिसिद्धम्''**

उदाहरण 1. PQRS एक वर्ग है। T और U क्रमशः PS और QR के मध्य–बिन्दु हैं (चित्र 10.20)। Δ OTS का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि $PQ = 8$ सेमी है तथा O रेखाखंड TU और QS का प्रतिच्छेद बिन्दु है।

$PS = PQ = 8$ cm है तथा $TU \parallel PQ$ है।



चित्र 10.20

$$ST = \frac{1}{2}PS = \frac{1}{2} \times 8 = 4 \text{ सेमी}$$

साथ ही $PQ = TU = 8$ सेमी

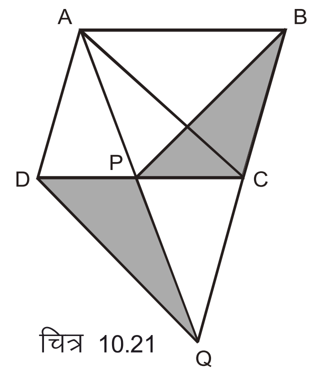
इसलिए, $OT = \frac{1}{2}TU = \frac{1}{2} \times 8 = 4$ सेमी

अतः Δ OTS का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times ST \times OT$$ [क्योंकि OTS एक समकोण त्रिभुज है]

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \text{ सेमी}^2 = 8 \text{ सेमी}^2$$

उदाहरण 2. ABCD एक समांतर चतुर्भुज तथा BC को Q तक इस प्रकार बढ़ाया जाता है कि AD = CQ है (चित्र 10.21)। यदि AQ भुजा DC को P पर प्रतिच्छेद करता है, तो दर्शाइए कि ar (BPC) = ar (DPQ)



चित्र 10.21

ar (ACP) = ar (BCP) . . . (1)

[एक आधार पर तथा एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने दो त्रिभुज]

ar(AOQQ) = ar (ADC) . . .(2)

ar (ADC) – ar (ADP) = ar (AOQQ) – ar (ADP) . . . (3)

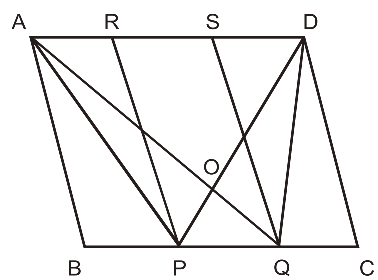
(1) और (3) से,

ar (BCP) = ar (DPQ)

उदाहरण 3. चित्र 10.22 में, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। बिन्दु P और Q भुजा BC को तीन बराबर भागों में विभाजित करते हैं।

सिद्ध कीजिए कि $\text{ar}(APQ) = \text{ar}(DPQ) = \frac{1}{6}\text{ar}(ABCD)$ **है।**

P और Q से होकर, AB के समांतर PR और QS खींचिए (चित्र 10.22)। अब, PQRS एक समांतर चतुर्भुज है तथा इसका आधार $PQ = \frac{1}{3}BC$ है।



चित्र 10.22

$\text{ar}(APD) = \frac{1}{2}\text{ar}(ABCD)$

[एक ही आधार BC और BC || AD] . . .(1)

$\text{ar}(AQD) = \frac{1}{2}\text{ar}(ABCD)$ . . . (2)

(1) और (2) से,

$\text{ar}(APD) = \text{ar}(AQD)$ . . . (3)

दोनों पक्षों में से ar (AOD) घटाने पर,

ar (APD) – ar (AOD) = ar (AQD) – ar (AOD)

ar (APO) = ar (OQD) . . . (4)

(4) के दोनों पक्षों में ar (OPQ) को जोड़ने पर हमें प्राप्त होता है

ar (APO) + ar (OPQ) = ar (OQD) + ar (OPQ)

ar (APQ) = ar (DPQ)

क्योंकि, $\text{ar}(APQ) = \frac{1}{2}\text{ar}(PQRS)$,

$$\text{ar}(\text{DPQ}) = \frac{1}{2}\text{ar}(\text{PQRS})$$

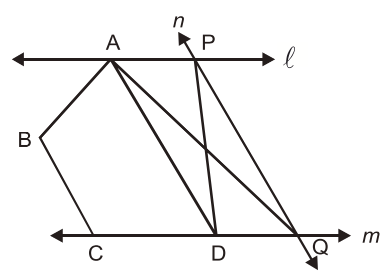
अब, $\text{ar}(\text{PQRS}) = \frac{1}{3}\text{ar}(\text{ABCD})$

अतः, $\text{ar}(\text{APQ}) = \text{ar}(\text{DPQ})$

$$= \frac{1}{2}\text{ar}(\text{PQRS}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\text{ar}(\text{ABCD})$$

$$= \frac{1}{6}\text{ar}(\text{ABCD})$$

उदाहरण 4. चित्र 10.23 में ℓ, m, और n सरल रेखाएँ इस प्रकार हैं कि $\ell \parallel m$ है तथा रेखा n, रेखा ℓ को P पर तथा रेखा m को Q पर प्रतिच्छेद करती है। ABCD एक चतुर्भुज इस प्रकार है कि शीर्ष A, रेखा ℓ पर स्थित है, शीर्ष C और D रेखा m पर स्थित हैं तथा AD $\parallel$ n है। दर्शाइए कि ar (ABCQ) = ar (ABCDP)



चित्र 10.23

हलः ar (ADP) = ar (ADQ) . . . (i)

[एक ही आधार AD पर है तथा एक ही समांतर रेखाओं AD और n के बीच में स्थित है]

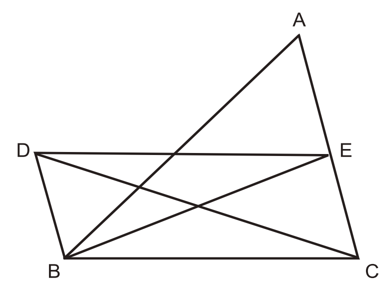
(1) के दोनों पक्षों में ar (ABCD) जोड़ने पर

ar (ADP) + ar (ABCD) = ar (ADQ) + ar (ABCD)

या ar (ABCDP) = ar (ABCQ) है।

उदाहरण 5. चित्र 10.24 में, BD $\parallel$ CA है, E रेखाखंड CA का मध्य–बिन्दु है तथा $\text{BD} = \frac{1}{2}\text{CA}$ है। सिद्ध कीजिए कि

ar (ABC) = 2ar (DBC) है।



चित्र 10.24

हलः DE को मिलाइए। यहाँ BCED एक समांतर चतुर्भुज है, क्योंकि

BD = CE और BD $\parallel$ CE है।

ar (DBC) = ar (EBC) . . . (1)

[एक ही आधार BC और एक ही समांतर रेखाओं की बीच में है]

Δ ABC में, BE एक माध्यिका है

अतः $\text{ar}(\text{EBC}) = \frac{1}{2}\text{ar}(\text{ABC})$

अब, $ar(ABC) = ar(EBC) + ar(ABE)$

इसलिए, $ar(ABC) = 2ar(EBC)$

अतः $ar(ABC) = 2ar(DBC)$ [(1) से]

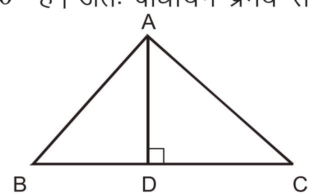
उदाहरण 6. एक न्यूनकोण Δ ABC में ΔABC न्यून कोण त्रिभुज है। अतः सभी कोण 90^{o} से छोटे ही होंगे। AD भुजा BC पर लम्बवत् है। सिद्ध कीजिए कि

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \times DC$$

हल : दिया है : Δ ABC में, $AD \perp BC$

सिद्ध करना है : $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \times DC$

उपपत्ति : Δ ABD एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें $\angle D = 90^{o}$ है। अतः बौधायन प्रमेय से



चित्र 10.25

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$\Rightarrow \quad AB^2 = AD^2 + (BC - DC)^2$$

$$\Rightarrow \quad AB^2 = AD^2 + BC^2 + DC^2 - 2BC \times DC$$

$$\Rightarrow \quad AB^2 = (AD^2 + DC^2) + BC^2 - 2BC \times DC \qquad \ldots(1)$$

Δ ADC में, $\angle D = 90^{o}$ अतः

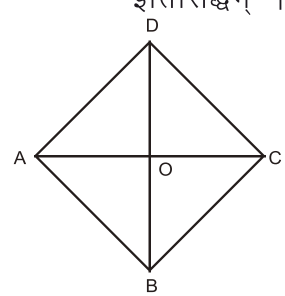
$$AC^2 = AD^2 + DC^2 \qquad \ldots(2)$$

अतः (1) और (2) से

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \times DC$$

''इतिसिद्धम्''।

उदाहरण 7. सिद्ध कीजिए कि समचतुर्भुज की भुजाओं के वर्गों का योग, उसके विकर्णों के वर्गों के योग के बराबर होता है।



चित्र 10.26

हल : दिया है : समचतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

सिद्ध करना है :

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$$

उपपत्ति : हम जानते हैं कि समचतुर्भुज के विकर्ण, समकोण पर समद्विभाजित करते हैं। अतः Δ AOB में

$$OA^2 + OB^2 = AB^2 \qquad \ldots(1)$$

इस प्रकार Δ BOC, Δ COD और Δ AOD में क्रमशः

$$OB^2 + OC^2 = BC^2 \qquad \ldots(2)$$

$$OC^2 + OD^2 = CD^2 \qquad \ldots(3)$$

और $\quad OA^2 + OD^2 = AD^2$ . . . (4)

अतः (1), (2), (3) और (4) का योग करने पर

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 2\left(OA^2 + OC^2 + OB^2 + OD^2\right)$$

यहाँ $\quad OA = OC = \dfrac{AC}{2}$ और $OB = OD = \dfrac{BD}{2}$

अतः $\quad AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 2\left[\dfrac{AC^2}{4} + \dfrac{AC^2}{4} + \dfrac{BD^2}{4} + \dfrac{BD^2}{4}\right]$

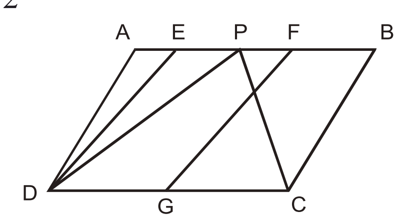
$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$$ ''इतिसिद्धम्'' ।

प्रश्नमाला 10.3

सत्य या असत्य लिखिए और अपने उत्तर का औचित्य दीजिए–

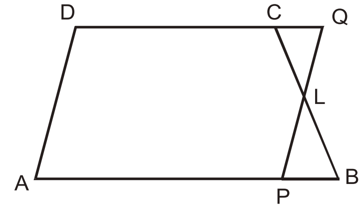
1. ABCD एक समांतर चतुर्भुज और X भुजा AB का मध्य–बिन्दु है। यदि ar (AXCD) = 24 सेमी^{2} है तो ar (ABC) = 24 सेमी^{2} है।
2. PQRS एक आयत है, जो त्रिज्या 13 सेमी वाले एक वृत्त के चतुर्थांश के अंतर्गत है। A भुजा PQ पर स्थित कोई बिन्दु है। यदि PS = 5 सेमी है, तो ar (RAS) = 30 सेमी^{2} है।
3. PQRS एक समांतर चतुर्भुज है जिसका क्षेत्रफल 180 सेमी^{2} है तथा A विकर्ण QS पर स्थित कोई बिन्दु है। तब Δ ASR का क्षेत्रफल 90 सेमी^{2} है।
4. ABC और BDE दो समबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि D भुजा BC का मध्य–बिन्दु है। तब,

   $ar(BDE) = \dfrac{1}{4} ar(ABC)$ है।
5. चित्र 10.27 में, ABCD और EFGD दो समांतर चतुर्भुज हैं तथा G भुजा CD का मध्य–बिन्दु है। तब, $ar(DPC) = \dfrac{1}{2} ar(EFGD)$ है।



चित्र 10.27

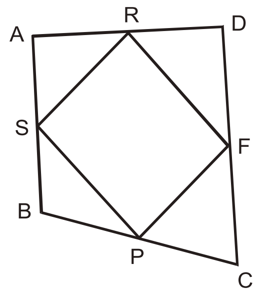
6. एक समलंब चतुर्भुज ABCD में, AB || DC है तथा L भुजा BC का मध्य–बिन्दु है। L से होकर, एक रेखा PQ || AD खींची गई है, जो AB को P पर और बढ़ाई गई DC को Q पर मिलती है (चित्र 10.28), सिद्ध कीजिए ar (ABCD) = ar (APQD)



चित्र 10.28

7. यदि किसी चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य–बिन्दुओं को क्रम से मिलाया जाता है, तो सिद्ध कीजिए कि इस प्रकार बने समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल दिए हुए चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है (आकृति 10.29)।

[संकेत : BD को मिलाइए और A से BD पर लंब खींचिए।]



चित्र 10.29

8. एक व्यक्ति 10 मीटर पूर्व की ओर जाता है और तब 30 मीटर उत्तर की ओर जाता है। उसकी प्रारम्भिक स्थान से दूरी ज्ञात कीजिए।

9. एक सीढ़ी दीवार के साथ इस प्रकार रखी गई है कि इसका नीचे का सिरा दीवार से 7 मीटर दूर है। यदि इसका दूसरा सिरा 24 मीटर ऊँची एक खिड़की तक पहुँचे, तो सीढ़ी की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

10. एक समतल भूमि पर दो खंभे 7 मीटर और 12 मीटर लम्बे खड़े हैं। यदि उनके पादों के बीच में 12 मीटर की दूरी हो, तो उनके ऊपरी सिरों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

11. एक समबाहु त्रिभुज के शीर्षलम्ब की लम्बाई और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। जिसकी भुजा की लम्बाई a है।

12. एक वर्ग के विकर्ण की लम्बाई ज्ञात कीजिए, जिसकी प्रत्येक भुजा 4 मीटर है।

13. एक समबाहु त्रिभुज ABC में, AD भुजा BC पर लम्बवत् हो, तो सिद्ध कीजिए कि $3AB^2 = 4AD^2$

14. आयत ABCD के अन्दर कोई बिन्दु O है। सिद्ध कीजिए कि

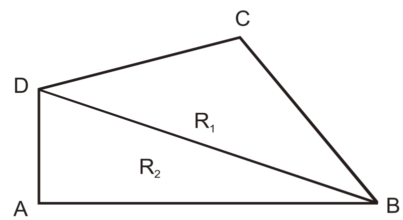
$$OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$$

15. एक अधिक कोण त्रिभुज ABC में कोण C अधिक कोण है। $AD \perp BC$ है और BC को आगे बढ़ाने पर D पर मिलता है। सिद्ध कीजिए कि

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BCCD$$

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. यदि $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ है, तो $ar(\Delta ABC) = ar(\Delta PQR)$ होता है। समतल आकृति ABCD का कुल क्षेत्रफल R दोनों त्रिभुजाकार क्षेत्रों R_1 और R_2 के योग के बराबर है, अर्थात् $ar(R) = ar(R_1) + ar(R_2)$ है (चित्र 10.30)



चित्र 10.30

2. दो सर्वांगसम आकृतियों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं परंतु इसका विलोम सदैव सत्य नहीं है।
3. एक समांतर चतुर्भुज का विकर्ण उसे दो बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में विभाजित करता है।
   (i) एक ही आधार पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने समांतर चतुर्भुज, क्षेत्रफल में, बराबर होते हैं।
   (ii) एक ही आधार पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बना एक समांतर चतुर्भुज और एक आयत क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।
4. समान आधारों पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने समांतर चतुर्भुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।
5. एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।
6. समान आधारों और समान क्षेत्रफलों वाले त्रिभुजों के संगत शीर्षलंब समान होते हैं।
7. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने आयत/समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।
8. यदि एक त्रिभुज और एक समांतर चतुर्भुज एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।

विविध प्रश्नमाला 10

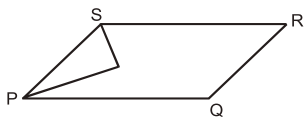
निम्नलिखित में से प्रत्येक में सही उत्तर लिखिए'–

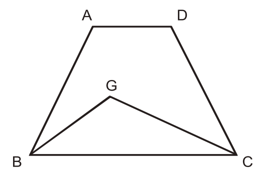
1. एक त्रिभुज की माध्यिका उसे विभाजित करती है, दो

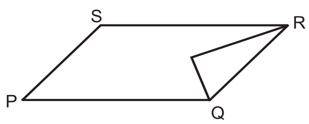
(A) बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में (B) सर्वांगसम त्रिभुजों में

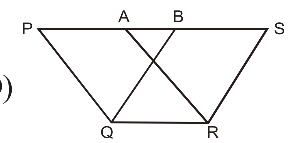
(C) समकोण त्रिभुजों में (D) समद्विबाहु त्रिभुजों में ( )

2. निम्नलिखित आकृतियों में से किसमें आप एक ही आधार पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच, बने दो बहुभुज प्राप्त करते हैं

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

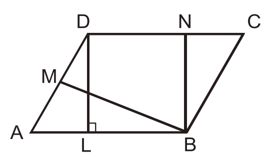
( )

3. 8 सेमी और 6 सेमी भुजाओं वाले एक आयत की आसन्न भुजाओं के मध्य–बिन्दुओं को मिलाने से बनी आकृति है

(A) 24 सेमी^{2} क्षेत्रफल का एक आयत (B) 25 सेमी^{2} क्षेत्रफल का एक वर्ग

(C) 24 सेमी^{2} क्षेत्रफल का एक समलंब (D) 24 सेमी^{2} क्षेत्रफल का एक समचतुर्भुज( )

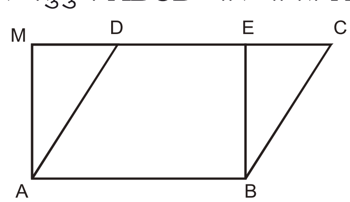
4. चित्र 10.31में, समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल हैः



चित्र 10.31

(A) $AB \times BM$ (B) $BC \times BN$ (C) $DC \times DL$ (D) $AD \times DL$ ( )

5. चित्र 10.32 में, यदि समांतर चतुर्भुज ABCD और आयत ABEM समान क्षेत्रफल के हैं, तो



चित्र 10.32

(A) ABCD का परिमाप = ABEM का परिमाप

(B) ABCD का परिमाप < ABEM का परिमाप

(C) ABCD का परिमाप > ABEM का परिमाप

(D) ABCD का परिमाप $= \frac{1}{2}$(ABEM का परिमाप) ( )

6. एक त्रिभुज की भुजाओं के मध्य–बिन्दु किसी भी एक शीर्ष को चौथा बिन्दु लेकर एक सरल चतुर्भुज बनाते हैं, जिसका क्षेत्रफल बराबर है

(A) $\frac{1}{2}\text{ar}(\text{ABC})$ (B) $\frac{1}{3}\text{ar}(\text{ABC})$ (C) $\frac{1}{4}\text{ar}(\text{ABC})$ (D) ar (ABC) ( )

7. दो समांतर चतुर्भुज बराबर आधारों पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हैं। उनके क्षेत्रफलों का अनुपात है

(A) 1 : 2 (B) 1 : 1 (C) 2 : 1 (D) 3 : 1 ( )

8. ABCD एक चतुर्भुज है जिसका विकर्ण AC उसे बराबर क्षेत्रफल वाले दो भागों में विभाजित करता है तब ABCD

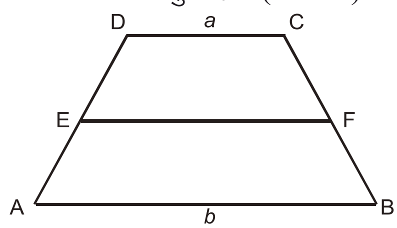
(A) एक आयत है (B) सदैव एक समचतुर्भुज है

(C) एक समांतर चतुर्भुज है (D) उपर्युक्त में से कोई नहीं ( )

9. एक त्रिभुज और एक समांतर चतुर्भुज एक ही आधार पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हैं, तो त्रिभुज के क्षेत्रफल का समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल से अनुपात है

(A) 1 : 3 (B) 1 : 2 (C) 3 : 1 (D) 1 : 4 ( )

10. ABCD एक समलंब है जिसकी समांतर भुजाएँ AB = a सेमी और DC = b सेमी है (चित्र 10.33) E और F असमांतर भुजाओं के मध्य–बिन्दु है।ar (ABFE) और ar (EFCD) का अनुपात है



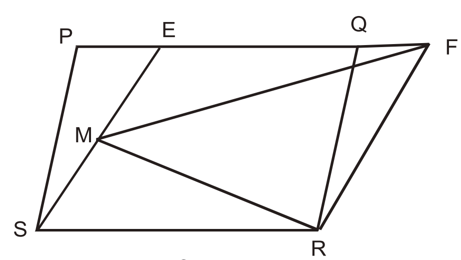
चित्र 10.33

(A) a : b (B) $(3a+b):(a+3b)$

(C) $(a+3b):(3a+b)$ (D) $(2a+b):(3a+b)$ ( )

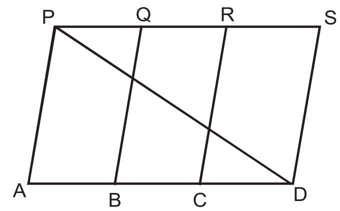
11. यदि P किसी त्रिभुज ABC की माध्यिका AD पर स्थित कोई बिन्दु हैं, तो $\text{ar}(\text{ABP}) \neq \text{ar}(\text{ACP})$ है।

12. यदि चित्र 10.34 में, PQRS और EFRS दो समांतर चतुर्भुज हैं, तो $\text{ar}(\text{MFR}) = \frac{1}{2}\text{ar}(\text{PQRS})$ है।



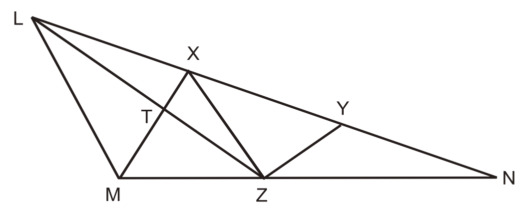
चित्र 10.34

13. चित्र 10.35 में, PSDA एक समांतर चतुर्भुज है।PS पर बिन्दु Q और R इस प्रकार लिए गए है कि $PQ = QR = RS$ है तथा $PA \parallel QB \parallel RC$ है। सिद्ध कीजिए कि ar (PQE) = ar (CFD) है।



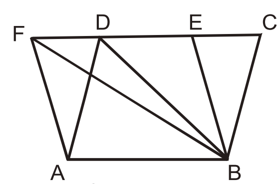
चित्र 10.35

14. X और Y त्रिभुज LMN की भुजा LN पर स्थित दो बिन्दु इस प्रकार हैं कि $LX = XY = YN$ हैं। X से होकर जाती हुई एक रेखा LM के समांतर खींची गई जो MN को Z पर मिलती है (देखिए चित्र 10.36)। सिद्ध कीजिए कि $ar(ZY) = ar(MZYX)$ है।



चित्र 10.36

15. समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल 90 सेमी^{2} है (चित्र 10.37) तो निम्नलिखित है। क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

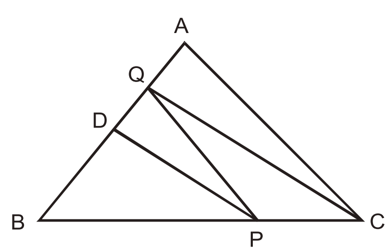


चित्र 10.37

(i) ar (ABEF) (ii) ar (ABD) (iii) ar (BEF)

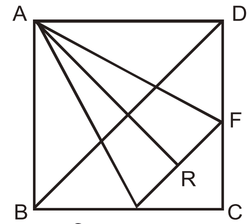
16. Δ ABC, D भुजा AB का मध्य–बिन्दु है तथा P भुजा BC पर स्थित कोई बिन्दु है। यदि रेखाखंड $CQ \parallel PD$ भुजा AB से Q पर मिलता है (चित्र 10.38), तो सिद्ध कीजिए कि

$ar(BPQ) = \frac{1}{2} ar(ABC)$ है।



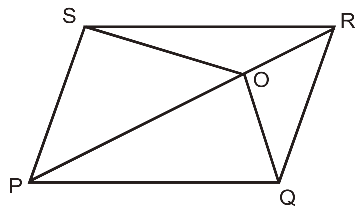
चित्र 10.38

17. ABCD एक वर्ग है। E और F क्रमशः BC और CD भुजाओं के मध्य–बिन्दु हैं। यदि R रेखाखंड EF का मध्य–बिन्दु है (चित्र 10.39), तो सिद्ध कीजिए कि $\text{ar}(\text{AER}) = \text{ar}(\text{AFR})$ है।



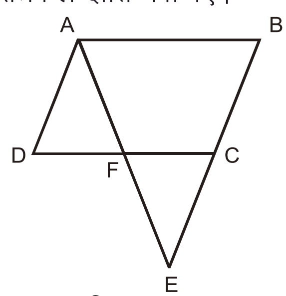
चित्र 10.39

18. O एक समांतर चतुर्भुज PQRS के विकर्ण PR पर स्थित कोई बिन्दु है (चित्र 10.40)। सिद्ध कीजिए कि ar (PSO) = ar (PQO) है।



चित्र 10.40

19. ABCD एक समांतर चतुर्भुज है, जिसमें BC को E तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि CE = BC है (चित्र 10.41)। AE भुजा CD को F पर प्रतिच्छेद करती है। यदि ar (DFB) 3 सेमी^{2} है, तो समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



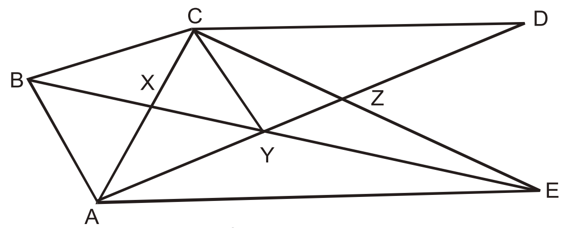
चित्र 10.41

20. किसी समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजा BC पर कोई बिन्दु E लिया जाता है। AE और DC को बढ़ाया जाता है जिससे वे F पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि $\text{ar}(\text{ADF}) = \text{ar}(\text{ABFC})$ है।

21. एक समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। O से होकर एक रेखा खींची जाती है, जो AD को P और BC से Q पर मिलती है। दर्शाइए कि PQ इस समांतर चतुर्भुज ABCD को बराबर क्षेत्रफल वाले दो भागों में विभाजित करता है।

22. एक त्रिभुज ABCD की माध्यिकाएँ BE और CF परस्पर बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि Δ GBC का क्षेत्रफल चतुर्भुज AFGE के क्षेत्रफल के बराबर है।

23. चित्र 10.42 में, CD ∥ AE और CY ∥ BA है। सिद्ध कीजिए कि ar (CBX) = ar (AXY) है।



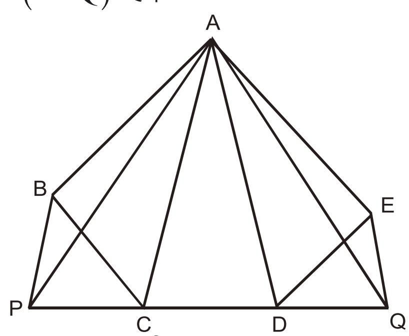
चित्र 10.42

24. ABCD एक समलंब है, जिसमें AB ∥ DC, DC = 30 सेमी और AB = 50 सेमी है। यदि X और Y क्रमशः AD और BC के मध्य–बिन्दु हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\text{ar}(DCYX) = \frac{7}{9}\text{ar}(XYBA)$$ है।

25. त्रिभुज ABC में यदि L और M क्रमशः AB और AC भुजाओं पर इस प्रकार स्थित बिन्दु हैं कि LM ∥ BC है। सिद्ध कीजिए कि ar (LOB) = ar (MOC) है।

26. चित्र 10.43 में, ABCDE एक पंचभुज है। AC के समांतर खींची गई BP बढ़ाई गई DC को P पर तथा AD के समांतर खींची गई EQ बढ़ाई गई CD से Q पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि $\text{ar}(ABCED) = \text{ar}(APQ)$ है।

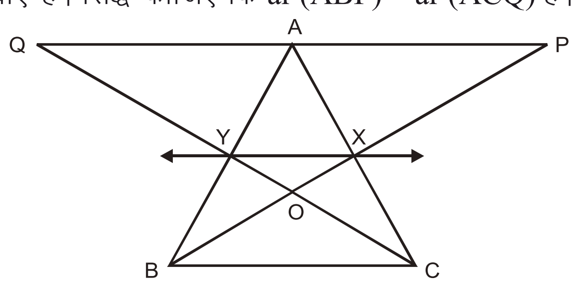


चित्र 10.43

27. यदि एक त्रिभुज ABC की माध्यिकाएँ G पर मिलती हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

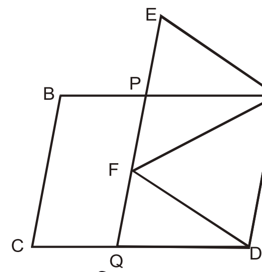
$$\text{ar}(AGB) = \text{ar}(AGC) = \text{ar}(BGC) = \frac{1}{3}\text{ar}(ABC)$$ है

28. चित्र 10.44 में, X और Y क्रमशः AC और AB के मध्य–बिन्दु हैं, QP ∥ BC और CYQ और BXP सरल रेखाएँ हैं। सिद्ध कीजिए कि ar (ABP) = ar (ACQ) है।



चित्र 10.44

29. चित्र 10.44 में, ABCD और AEFD दो समांतर चतुर्भुज हैं। सिद्ध कीजिए कि ar (PEA) = ar (QFD) है। [संकेत : PD को मिलाइए।]



चित्र 10.44

उतरमाला

प्रश्नमाला 10.1

1. (i) DC एवं DC || AB ; (iii) QR, QR || PS ; (v) AD, AD || QC

प्रश्नमाला 10.2

1. 12.8 सेमी

प्रश्नमाला 10.3

1. असत्य $ar(A \times CD) = ar(ABCD) - ar(BC\times) = 48 - 12 = 36\,\text{cm}^2$

2. सत्य $SR = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12ar(PAS) = \frac{1}{2}ar(PQRS) = 30\,\text{cm}^2$

3. असत्य ΔQRS का क्षेत्रफल $= 90\,\text{cm}^2$ तथा $ar(ASR) < ar(QRS)$

4. सत्य $\frac{ar(BDE)}{ar(ABC)} = \frac{\sqrt{3}(BD)^2}{\frac{\sqrt{3}(BC)^2}{4}} = \frac{1}{4}$

5. असत्य $ar(DPC) = \frac{1}{2}(ABCD) = ar(EFGD)$

6. $10\sqrt{10}$ मीटर

9. 25 मीटर

10. 13 मीटर

11. $\frac{\sqrt{3}}{a}a,\ \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

12. $4\sqrt{2}$

विविध प्रश्नमाला 10

1. A	**2.** D	**3.** D	**4.** C
5. C	**6.** A	**7.** D	**8.** D
9. B	**10.** B		

11. असत्यः $ar(ABD)=(ACD)$ और $ar(PBD)=ar(PCD)$ अतः $ar(ABP)=ar(ACP)$

12. सत्यः $ar(PQRS)=ar(EFRS)=2ar(MFR)$

15. (i) 90 cm^2 ; (ii) 45 cm^2 ; (iii) 45 cm^2

19. 13 cm^3