पाठ 14
क्षेत्रफल

आइए सीखें

- रेखीय आकृतियों जैसे : समांतर चतुर्भुज, समलंब चतुर्भुज, समचतुर्भुज तथा चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना।
- समान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल की सहायता से त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना।
- त्रिभुज की तीनों भुजाओं की माप ज्ञात होने पर हेरो के सूत्र का उपयोग कर त्रिभुज के क्षेत्रफल की गणना करना।
- असमान भुजाओं वाली रेखीय आकृतियों का क्षेत्रफल, फील्ड बुक।
- वृत्त की परिधि की गणना, उसके क्षेत्रफल की गणना तथा परिधि और π (पाई) में संबंध ज्ञात करना।

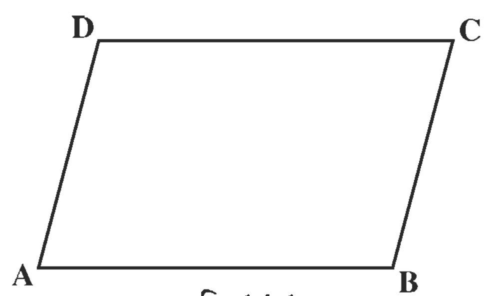
पिछली कक्षा में हमने आयत व वर्ग के क्षेत्रफल के बारे में अध्ययन किया है। ये सभी रेखीय आकृतियाँ हैं, क्योंकि इनकी भुजाएँ रेखाखण्ड होती हैं। रेखाओं, वक्र रेखाओं या दोनों से बनी समतल आकृति में यदि मुक्त सिरे न हों, तो इसे संवृत्त या बंद आकृति कहा जाता है। आयत व वर्ग सरल बंद रेखीय आकृतियाँ हैं। इस अध्याय में कुछ और रेखीय आकृतियों जैसे समांतर चतुर्भुज, समचतुर्भुज, समलंब चतुर्भुज और त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना सीखेंगे।

किसी सरल बंद आकृति द्वारा घिरे तल के भाग को क्षेत्र व इस तलीय भाग के परिमाण को क्षेत्रफल कहा जाता है।

अब हम समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल को ज्ञात करना सीखेंगे।

14.1 समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

हमें ज्ञात है कि एक समांतर चतुर्भुज चार रेखाखण्डों से बनी बंद आकृति होती है जिसकी सम्मुख भुजाएँ (आमने-सामने की भुजाएँ) समांतर होती हैं। आकृति 14.1 में दर्शाई गई आकृति समांतर चतुर्भुज हैं जिसे समांतर चतुर्भुज ABCD पढ़ा जाता है और जिसमें $AB || DC$ तथा $AD || BC$ है।



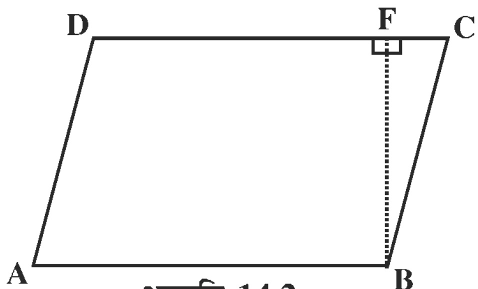
आकृति 14.1

अब हम समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल को ज्ञात करने पर विचार करें। स्मरण कीजिए कि हम आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करना सीख चुके हैं। क्या समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल को ज्ञात करने के लिए उसी विधि का उपयोग किया जा सकता है?

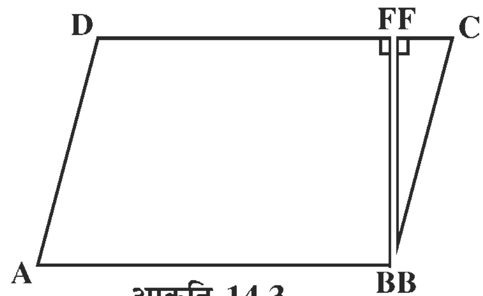
इस कार्य के लिए एक क्रियाकलाप करें।

क्रियकलाप 1.

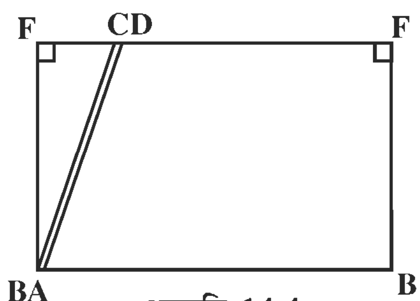
मोटे कागज के एक टुकड़े पर कोई समांतर चतुर्भुज ABCD बनाइए (आकृति 14.2)।



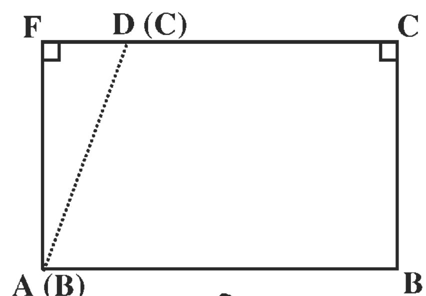
आकृति 14.2



आकृति 14.3



आकृति 14.4



आकृति 14.5

शीर्ष B से भुजा DC पर एक शीर्ष लम्ब BF खींचिए। तब BF, DC पर लम्ब होगा जिसके कोण BFD और कोण BFC दोनों समकोण हुए। BC, CF और FB के अनुदिश काटकर त्रिभुज BCF को अलग कीजिए (आकृति 14.3)। त्रिभुजाकार टुकड़े BCF को उठाकर आकृति 14.4 के अनुसार ABFD के बाई ओर इस प्रकार रखिए कि BC, AD के पास हो जाए तथा बिन्दु B से A और C से D मिल जाएं। (आकृति 14.5)

नई आकृति (14.5) ABCF एक आयत है। यह आयत समांतर चतुर्भुज से काटे गए भागों को जोड़कर बना है। अत: समान्तर चतुर्भुज और आयत दोनों का क्षेत्रफल समान हैं।

आयत का क्षेत्रफल $=$ लम्बाई $\times$ चौड़ाई

$=$ AB $\times$ BF

$=$ समांतर चतुर्भुज का आधार $\times$ ऊँचाई

अत: $\boxed{\text{समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}}$

$$\text{समांतर चतुर्भुज का आधार} = \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{ऊँचाई}}$$

समान्तर चतुर्भुज की ऊँचाई $= \dfrac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{आधार}}$

उदाहरण 1 आधार 25 सेमी और ऊँचाई 12 सेमी वाले समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

= 25 सेमी × 12 सेमी

= 300 वर्ग सेमी

= 300 सेमी^{2} उत्तर

उदाहरण 2 एक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल 390 सेमी^{2} है और ऊँचाई 26 सेमी है। समांतर चतुर्भुज का आधार ज्ञात कीजिए।

हल : समांतर चतुर्भुज का आधार $= \dfrac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{ऊँचाई}}$

$= \dfrac{390}{26}$

= 15 सेमी उत्तर

उदाहरण 3 एक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल 400 मी^{2} है। यदि उसका आधार 25 मी है, तो ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई $= \dfrac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{आधार}}$

$= \dfrac{400}{25}$

= 16 मी. उत्तर

प्रश्नावली 14.1

1. सही विकल्प चुनिए

(i) समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल होता है

(अ) आधार × ऊँचाई (ब) आधार + ऊँचाई

(स) $\frac{1}{2}$ आधार × ऊँचाई (द) आसन्न भुजाओं का गुणनफल

(ii) समांतर चतुर्भुज का आधार होता है

(अ) क्षेत्रफल × ऊँचाई (ब) $\frac{\text{ऊँचाई}}{\text{क्षेत्रफल}}$

(स) $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{ऊँचाई}}$ (द) क्षेत्रफल + ऊँचाई

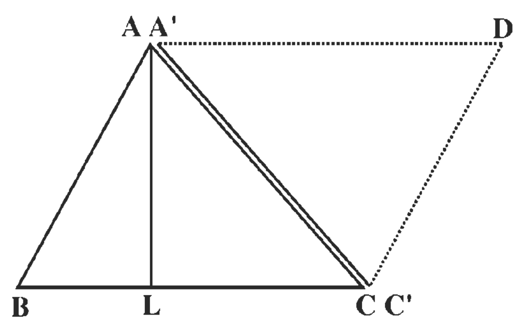
2. उस समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका आधार 12 सेमी और ऊँचाई 8 सेमी है।
3. उस समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका आधार 20 सेमी और शीर्षलंब (ऊँचाई) 5 सेमी है।
4. एक समांतर चतुर्भुज के आकार के बरामदे के फर्श का क्षेत्रफल 425 मी^{2} है। यदि फर्श की लम्बाई (आधार) 25 मी. हो तो उस बरामदे की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।
5. एक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल 810 मी^{2} है। यदि आधार 9 मी. है तो शीर्षलंब ज्ञात कीजिए।
6. 560 मी^{2} क्षेत्रफल वाले समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई 1400 सेमी है। आधार ज्ञात कीजिए।
7. एक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल 1250 सेमी^{2} है। उसकी ऊँचाई 25 सेमी है। आधार ज्ञात कीजिए।
8. एक समांतर चतुर्भुज का शीर्षलंब ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल 34 सेमी^{2} और आधार 8.5 सेमी है।
9. एक समांतर चतुर्भुज की दो भुजाएँ 30 सेमी और 20 सेमी हैं। यदि भुजा 30 सेमी के संगत शीर्षलंब 15 सेमी हो, तो दूसरी भुजा के संगत शीर्षलंब ज्ञात कीजिए। (संकेत पहले क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।)
10. एक भवन के फर्श पर बने फूलदार डिजाइन में 3500 समांतर चतुर्भुज के आकार की टाइल्स हैं। प्रत्येक टाइल्स का आधार 5 सेमी और शीर्षलंब 4 सेमी है। एक रुपये प्रति सेमी^{2} की दर से डिजाइन को पालिश कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

14.2 त्रिभुज का क्षेत्रफल

कागज काटने का एक ऐसा क्रियाकलाप करते हैं जिससे दिए गए किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने में सहायता मिलेगी।

क्रियाकलाप 2.

एक त्रिभुज ABC बनाइए। माना कि AL आधार BC के संगत शीर्षलंब है (आकृति 14.6)। A और C से होकर क्रमश: BC और BA के समांतर रेखाएँ खींचिए जो D पर मिले। क्योंकि BA||CD और AD||BC है, अत: ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। साथ ही AL आधार BC के संगत शीर्षलंब है। यहाँ,



आकृति 14.6

समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = BC × AL ....(1)

अब रेखाखण्डों AC, CD और DA के अनुदिश कागज को काटिए। इससे त्रिभुज CDA समांतर चतुर्भुज ABCD से अलग हो जाएगा। अब समांतर चतुर्भुज आरंभिक ΔABC बनकर रह जाता है। काटे गए भाग को सुविधा के लिए हम $\Delta C'DA'$ नाम देते हैं। $\Delta C'DA'$ को ΔABC पर इस प्रकार रखिए कि C' तो A पर आए, A' आए C पर और D, उसी ओर हो जिस ओर B है। हम देखेंगे कि D, B के ऊपर आता है। यदि निम्नलिखित तथ्यों पर ध्यान दें, तो हम पाते हैं कि यह कथन सत्य हैं

1. एकांतर कोण BAC और A'C'D बराबर हैं ($BA \parallel C'D$ और AC इन्हें काटती है)। इसका अर्थ यह हुआ कि CD पड़ती है AB पर।
2. AB = DC' है। इसका अर्थ यह है कि D पड़ता है B पर। अब यह स्पष्ट हो जाता है कि $\Delta C'DA'$, ΔABC को ठीक पूरा-पूरा ढँक लेता है। इसका अर्थ यह है कि दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हैं। क्योंकि समांतर चतुर्भुज इन दो त्रिभुजों से बना है।

अत: समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\Delta C'DA'$ का क्षेत्रफल + ΔABC का क्षेत्रफल

= $2 \times$ (ΔABC का क्षेत्रफल)

या ABC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल)

$$= \frac{1}{2}(BC \times AL) = \frac{1}{2}(b \times h)$$

जहाँ b, ΔABC का आधार और h इसकी ऊँचाई या शीर्षलंब है।

अत: (I) त्रिभुज का क्षेत्रफल	$= \frac{1}{2}$ (आधार × ऊँचाई)
(II) त्रिभुज का आधार	$= 2 \times \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{ऊँचाई}}$
(III) त्रिभुज की ऊँचाई	$= 2 \times \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{आधार}}$

उपरोक्त सूत्र की सहायता से त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हमें त्रिभुज की एक भुजा व उसके संगत ऊँचाई ज्ञात होनी आवश्यक है। यदि त्रिभुज की तीनों भुजाएँ ज्ञात हों तो क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए एक अन्य विधि का उपयोग किया जाता है जिसे **हेरो (Heron) के सूत्र** से जाना जाता है।

14.3 हेरो के सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल

ग्रीक के गणितज्ञ हेरो (Heron) ने त्रिभुज की तीनों भुजाओं की सहायता से त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने का एक सूत्र प्रतिपादित किया जिसे हेरो का सूत्र कहते हैं। यह उन त्रिभुजों के लिए हैं जिनकी तीनों भुजाओं के माप दिए गए हैं।

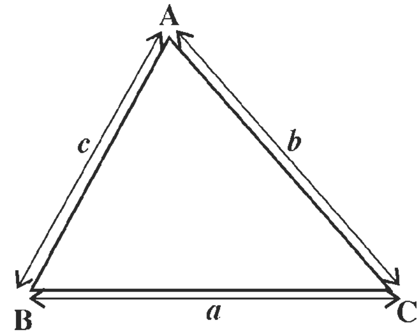
हेरो का सूत्र है :

$$\boxed{\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} := \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

जहाँ a, b, c त्रिभुज की भुजाओं की माप है।

और $S = \dfrac{a+b+c}{2}$

= त्रिभुज का अर्धपरिमाप



आकृति 14.7

उदाहरण 4. एक त्रिभुज का आधार 12 सेमी और ऊँचाई 15 सेमी है। त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{\text{आधार} \times \text{ऊँचाई}}{2}$$

$$= \frac{12 \text{ सेमी} \times 15 \text{ सेमी}}{2}$$

$$= 90 \text{ सेमी}^2. \qquad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 5. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल 3.9 मी^{2} है और ऊँचाई 260 सेमी है। त्रिभुज का आधार क्या होगा?

हल :

$$\text{त्रिभुज का आधार} = \frac{2 \times \text{क्षेत्रफल}}{\text{ऊँचाई}}$$

$$= \frac{2 \times (3.9 \times 100 \times 100 \text{ सेमी}^2)}{260 \text{ सेमी}}$$

$$= 300 \text{ सेमी}$$

$$= 3 \text{ मी.}, \qquad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 6. एक त्रिभुज की भुजाएँ क्रमशः 13 सेमी, 14 सेमी तथा 15 सेमी हैं। त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21 \text{ सेमी}$$

यहाँ $a = 13$ सेमी, $b = 14$ सेमी, $c = 15$ सेमी

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{21 \times (21-13) \times (21-14) \times (21-15)}$ सेमी

$= \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6}$ सेमी^{2}

$= \sqrt{3 \times 7 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 2 \times 3}$ सेमी^{2}

$= \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7}$ सेमी^{2}

$= 2 \times 2 \times 3 \times 7$ सेमी^{2}

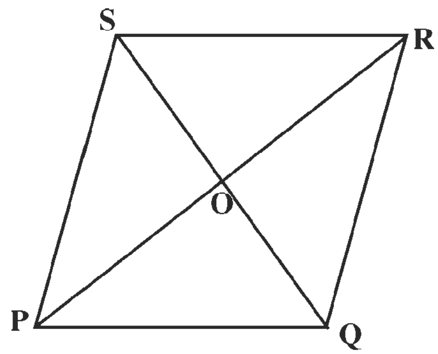
$= 84$ सेमी^{2}. उत्तर

प्रश्नावली 14.2

1. त्रिभुज के क्षेत्रफल ज्ञात करने के हेरो के सूत्र में 'S' होता है
   (अ) त्रिभुज का परिमाप (ब) त्रिभुज का अर्ध परिमाप
   (स) त्रिभुज का क्षेत्रफल (द) त्रिभुज का अर्ध क्षेत्रफल
2. त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए
   (अ) आधार = 18 सेमी, ऊँचाई = 7 सेमी
   (ब) आधार = 20 सेमी, शीर्षलंब = 15 सेमी
   (स) आधार = 60 सेमी, शीर्षलंब = 12 सेमी।
3. आधार 60 सेमी और क्षेत्रफल 6360 सेमी^{2} वाले त्रिभुज की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
4. आधार 13 सेमी और क्षेत्रफल 65 सेमी^{2} वाले त्रिभुज की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
5. एक त्रिभुज का शीर्षलंब 5 सेमी और क्षेत्रफल 5 मी^{2} है। आधार ज्ञात कीजिए।
6. उस समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा 20 सेमी है।
7. उस समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा 30 सेमी है।
8. एक भूखण्ड का आकार समद्विबाहु त्रिभुजाकार है। उसका आधार 32 मी तथा बराबर भुजाओं में से एक की माप 20 मी है। उस भूखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
9. एक त्रिभुजाकार भूखण्ड का परिमाप 14 मी है। यदि उसकी दो भुजाओं की माप 5 मी व 6 मी है, तो भूखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
10. यदि किसी त्रिभुजाकार खेत की भुजाएँ 3:4:5 के अनुपात में हैं और खेत का परिमाप 144 मी हो, तो खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

11. एक समकोण त्रिभुजाकार खेत की कर्ण भुजा 50 मी और एक अन्य भुजा 40 मी है। खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

14.4 समचतुर्भुज का क्षेत्रफल



आकृति 14.8

पूर्व में हमने समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात किया है जिसमें आमने-सामने की भुजाएँ समांतर और बराबर हैं।

अब हम ऐसे समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करेंगे जिसकी आमने-सामने की भुजाएँ समांतर तो हैं साथ ही चारों भुजाएँ आपस में बराबर भी हैं। इस प्रकार के चतुर्भुज को सम चतुर्भुज कहते हैं।

आकृति 14.8 में एक समचतुर्भुज PQRS है। हम जानते हैं कि समचतुर्भुज के विकर्ण समकोण पर समद्विभाजित होते हैं।

बताइए, क्या कोण POQ तथा कोण ROS समकोण हैं? हाँ।

यदि हम त्रिभुज PQR और त्रिभुज PSR पर विचार करें तो पाते हैं कि त्रिभुज PQR में PR आधार तथा OQ शीर्ष लम्ब है। इसी प्रकार त्रिभुज PSR में PR आधार तथा OS शीर्ष लम्ब है। समचतुर्भुज PQRS इन्हीं दोनों त्रिभुजों PQR और PSR से बना है।

यदि हम इन दोनों त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कर लें तो समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात हो जाएगा।

अतः, समचतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल = त्रिभुज PQR का क्षेत्रफल + त्रिभुज PSR का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}(PR \times OQ) + \frac{1}{2}(PR \times OS)$$

$$= \frac{1}{2} PR (OQ + OS)$$

$$= \frac{1}{2} \times PR \times QS$$

$$= \frac{1}{2} (\text{विकर्ण } PR \times \text{विकर्ण } OS)$$

$$= \frac{1}{2} \text{ (दोनों विकर्णों का गुणनफल)}$$

यही क्रिया हम त्रिभुज **PQS** और त्रिभुज **RQS** लेकर भी कर सकते हैं।

अत: $\boxed{\text{समचतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{विकर्णों का गुणनफल}}$

उदाहरण 7. उस समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके विकर्णों की लम्बाई क्रमश: 16 सेमी और 12 सेमी है।

हल : समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ विकर्णों का गुणनफल

$= \frac{1}{2} \times 16 \times 12$

$= 96$ सेमी^{2}, उत्तर

उदाहरण 8. किसी समचतुर्भुज का क्षेत्रफल 153 सेमी^{2} है तथा एक विकर्ण की लम्बाई 17 सेमी हो, तो दूसरे विकर्ण की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि दूसरे विकर्ण की लम्बाई = d सेमी

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ विकर्णों का गुणनफल

या, $153 = \frac{1}{2} \times 17 \times d$

या, $d = \frac{2 \times 153}{17}$

$= 18$ सेमी

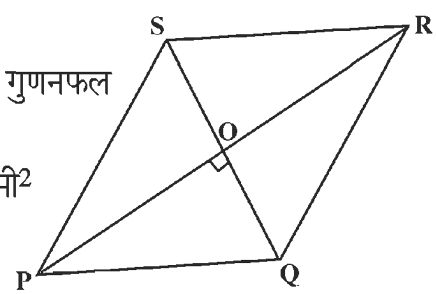
अत: दूसरे विकर्ण की लम्बाई 18 सेमी है। उत्तर

उदाहरण 9. किसी समचतुर्भुज के विकर्ण 24 सेमी व 7 सेमी हों, तो समचतुर्भुज का क्षेत्रफल और परिमाप ज्ञात कीजिए।

हल : समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ विकर्णों का गुणनफल

$= \frac{1}{2} \times 24 \times 7$ सेमी^{2}

$= 84$ सेमी^{2}



आकृति 14.9

समचतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

आकृति 14.9 में त्रिभुज POQ में कोण $POQ=90^0$, PO=12 सेमी तथा OQ=3.5 सेमी

समकोण त्रिभुज POQ में, $PQ^2 = PO^2 + OQ^2$

$= (12)^2 + (3.5)^2$

$= (144+12.25)$

$= 156.25$

या, $PQ = \sqrt{156.25}$

= 12.5 सेमी

चारों भुजाएँ बराबर हैं, अतः

परिमाप = PQ + QR + RS + SP

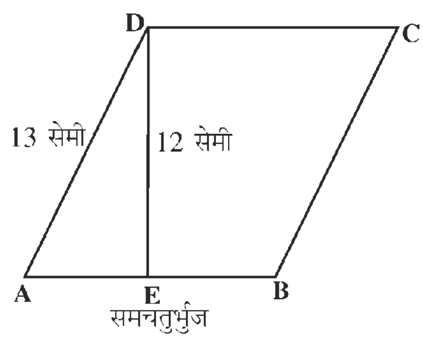
=12.5+12.5+12.5+12.5=4×12.5 सेमी.

= 50 सेमी., उत्तर

उदाहरण 10. एक समचतुर्भुज का परिमाप 52 सेमी है। उसकी दो समांतर भुजाओं के मध्य लम्बवत् दूरी 12 सेमी है। (समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि ABCD एक समचतुर्भुज है।

समचतुर्भुज की एक भुजा $= \frac{52}{4} = 13$ सेमी



आकृति 14.10

समचतुर्भुज की ऊँचाई (DE)

= समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजा

AB व CD के मध्य दूरी = 12 सेमी

अतः समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

= AB × DE

= (13 × 12) सेमी^{2}

= 156 सेमी^{2}. उत्तर

प्रश्नावली 14.3

1. एक समचतुर्भुज की भुजा 6.5 सेमी तथा ऊँचाई 4 सेमी है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. एक समचतुर्भुज के विकर्ण 15 सेमी और 20 सेमी है। इसका क्षेत्रफल और परिमाप ज्ञात कीजिए।
3. समचतुर्भुज के आकार वाली उस टाइल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके विकर्ण 24 सेमी और 10

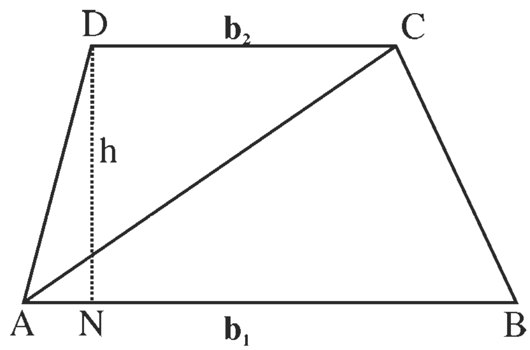
सेमी है।

4. एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल 506 सेमी^{2} है तथा एक विकर्ण की लम्बाई 23 सेमी है। दूसरे विकर्ण की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
5. यदि एक समचतुर्भुजाकार आकृति का क्षेत्रफल 992 सेमी^{2} तथा एक विकर्ण की लम्बाई 31 सेमी हो, तो दूसरे विकर्ण की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
6. एक समचुर्भुज की प्रत्येक भुजा 6 सेमी लम्बी है, इसका क्षेत्रफल 10.2 सेमी^{2} है। समचतुर्भुज की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
7. किसी समचतुर्भुजाकार भूखण्ड के विकर्ण की लम्बाई 20 मी व 21 मी है। भूखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। भूखण्ड के चारों ओर के तार की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
8. एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल 272 सेमी^{2} है। समचतुर्भुज की ऊँचाई 8 सेमी है। समचतुर्भुज का परिमाप ज्ञात कीजिए।

14.5 समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल

आइए, अब ऐसे चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं जिसमें भुजाओं का कम से कम एक युग्म समांतर है।

ऐसा चतुर्भुज जिसकी दो सम्मुख भुजाएं एक-दूसरे के समांतर हों, तो उसे समलंब चतुर्भुज कहते हैं।



आकृति 14.11

आकृति 14.11 में समलंब चतुर्भुज ABCD की भुजाएँ AB, CD समांतर हैं।

इन दो समांतर भुजाओं के बीच की दूरी DN को समलंब चतुर्भुज की ऊँचाई कहते हैं। विकर्ण AC समलंब चतुर्भुजीय क्षेत्र को दो त्रिभुजीय क्षेत्र ΔABC और ΔACD में विभक्त कर देता है।

समलंब चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = Δ ABC का क्षेत्रफल + ΔACD का क्षेत्रफल

मान लीजिए $AB = b_1$, $DC = b_2$ तथा समलंब चतुर्भुज की ऊँचाई $DN = h$.

यहाँ ऊँचाई h, ΔABC और ΔACD में से प्रत्येक की ऊँचाई हैं।

ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} b_1 \times h$

तथा ACD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} b_2 \times h$

इसलिए, समलंब चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} b_1 \times h + \frac{1}{2} b_2 \times h$$

$$= \frac{1}{2} (b_1 + b_2) \times h$$

समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल= $\frac{1}{2}$ (समांतर भुजाओं का योग) × ऊँचाई

> अत: समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल, उसकी ऊँचाई और समांतर भुजाओं के योग के, गुणनफल का आधा होता है।

उदाहरण 11. एक समलंब चतुर्भुज की समांतर भुजाएं 6 मी और 8 मी की हैं तथा ऊँचाई 4 मी है। समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (दोनों समांतर भुजाओं का योग) × ऊँचाई

$$= \frac{1}{2} \{(6 + 8) \times 4\} \text{ मी}^2$$

$$= \frac{1}{2} \{(14) \times 4\} \text{ मी}^2$$

$$= 28 \text{ मी}^2,$$ उत्तर

उदाहरण 12. ऊँचाई 7 सेमी वाले एक समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल 140 सेमी^{2} है। यदि समांतर भुजाओं में से एक 25 सेमी हो, तो दूसरी भुजा ज्ञात कीजिए।

हल : माना दूसरी भुजा b है।

अत: समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (25 + b) × 7)

या, 140 $= \frac{1}{2} (25 + b) \times 7$

या, 25 + b $= \frac{2 \times 140}{7}$

$= 40$

या, b $= 40 - 25 = 15$ सेमी

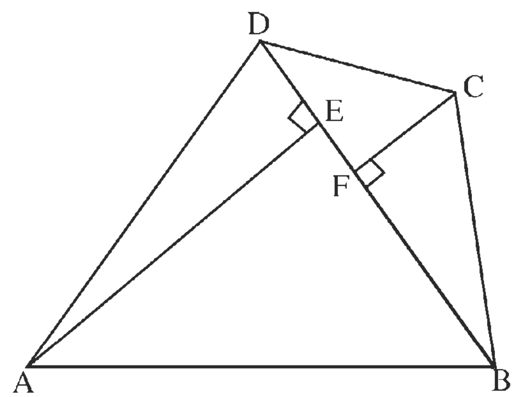
अत: दूसरी भुजा की लम्बाई = 15 सेमी., उत्तर

प्रश्नावली 14.4

1. आधार 15 सेमी और ऊँचाई 8 सेमी वाले एक समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि दिए गए आधार के समांतर भुजा की लम्बाई 9 सेमी हो।
2. एक समलंब चतुर्भुज की समांतर भुजाएँ क्रमशः 15 मी और 8 मी हैं। उनके बीच की दूरी 12 मी है। क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. एक समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल 12 सेमी^{2} है। इसकी ऊंचाई 3 सेमी है। यदि समान्तर भुजाओं में से एक भुजा की लम्बाई 3 सेमी है, तो दूसरी भुजा की लम्बाई क्या होगी?
4. उस समलंब चतुर्भुज की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसके समांतर भुजाओं की लम्बाइयों का योग 60 सेमी है और जिसका क्षेत्रफल 600 सेमी^{2} है।
5. उस समलंब चतुर्भुज की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल 65 सेमी^{2}, तथा समांतर भुजाओं की लम्बाइयाँ 13 सेमी और 26 सेमी हैं।
6. उस समलंब चतुर्भुज की समांतर भुजाओं का योग ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल 4.2 मी^{2} और ऊँचाई 280 सेमी है।
7. एक समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल 105 सेमी^{2} है और उसकी ऊंचाई 7 सेमी है। उसकी समांतर भुजाओं में से एक यदि दूसरी से 6 सेमी अधिक लम्बी है तो दोनों समांतर भुजाएं ज्ञात कीजिए।
8. एक समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल 180 सेमी^{2} है और उसकी लम्बाई 12 सेमी है। यदि समांतर भुजाओं में से एक, दूसरी की दुगुनी हो, तो दोनों समांतर भुजाओं की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

14.6 चतुर्भुज का क्षेत्रफल

हम विशिष्ट प्रकार के चतुर्भुज जैसे समांतर चतुर्भुज, समचतुर्भुज, समलंब चतुर्भुज के क्षेत्रफल सूत्र द्वारा ज्ञात करना सीख चुके हैं। अब हम ऐसे चतुर्भुज के क्षेत्रफल ज्ञात करने का सूत्र ज्ञात करेंगे जो उपरोक्त से भिन्न प्रकार का है। इस चतुर्भुज में सभी भुजाएँ असमान हैं। चतुर्भुज के क्षेत्रफल के लिए एक विकर्ण और सम्मुख शीर्षों से विकर्ण पर डाले गये लम्ब दिए गए हैं।



आकृति 14.12

आकृति 14.12 में ABCD एक चतुर्भुज है। विकर्ण BD चतुर्भुजीय क्षेत्र को दो त्रिभुजीय क्षेत्र ΔABD और ΔCDB में विभक्त करता है। A और C से BD पर क्रमशः AE और CF लम्ब हैं।

अब चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = ΔABD का क्षेत्रफल + ΔCDB का क्षेत्रफल

$$= (\frac{1}{2}\ BD \times AE) + (\frac{1}{2}\ BD \times CF)$$

$$= \frac{1}{2}\ BD \times (AE + CF)$$

$$= \frac{1}{2}\ \text{विकर्ण (शीर्ष लंबों का योग)}$$

उदाहरण 13. एक चतुर्भुज के विकर्ण की लम्बाई 25 सेमी है। सम्मुख शीर्षों से इस पर डाले गये लम्ब क्रमश: 8 सेमी तथा 7 सेमी लम्बाई के हैं। चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : आकृति 14.12 के चतुर्भुज ABCD में BD = 25 सेमी, AE = 8 सेमी, CF = 7 सेमी

चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} BD \times (AE + CF)$

$= \frac{1}{2} \times 25 \times (8+7)$ सेमी^{2}

$= \frac{1}{2} \times 25 \times 15$ सेमी^{2}

$= 187.5$ सेमी^{2}, उत्तर

प्रश्नावली 14.5

1. एक चतुर्भुज के विकर्ण की लम्बाई 30 मीटर है। सम्मुख शीर्षों से इस पर डाले गये लम्ब क्रमश: 5 मी व 6 मी हैं। चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. एक चतुर्भुज का क्षेत्रफल 400 मी^{2} है। एक विकर्ण की लम्बाई 20 मी. है। इस पर सम्मुख शीर्षों से डाले गये लम्बों का योग ज्ञात कीजिए।
3. एक चतुर्भुज का क्षेत्रफल 600 मी^{2} है। एक विकर्ण की लम्बाई 30 मी. तथा इस पर एक सम्मुख शीर्ष से डाले गए लम्ब की लम्बाई 10 मी है तो दूसरे शीर्ष से डाले गए लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

14.7 असमान भुजाओं वाली रेखीय आकृतियों के क्षेत्रफल

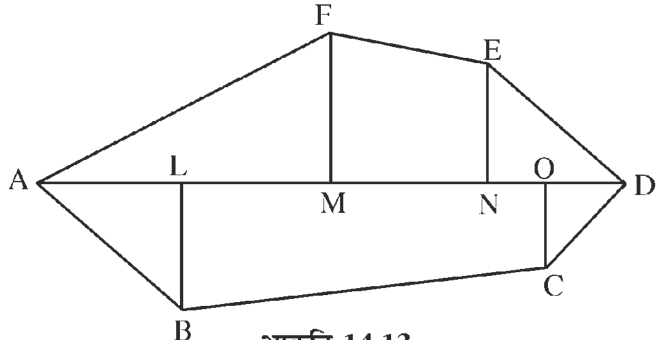
हम विभिन्न ज्यामितीय आकृतियों के क्षेत्रफल ज्ञात करना सीख चुके हैं। हमें कभी-कभी बड़े खेतों व भूखंडों का क्षेत्रफल भी ज्ञात करना होता है। इनका सदैव ज्यामितीय आकृति में ही होना आवश्यक नहीं है। ये अनियमित आकृति के भी होते हैं। ऐसी आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए आकृति को विभिन्न ज्यामितीय आकृतियों में बांटकर उनका क्षेत्रफल ज्ञात किया जाता है। पटवारी, इंजीनियर आदि इसी विधि द्वारा क्षेत्रफल की गणना करते हैं।

14.8 फील्ड बुक

दिए गए क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने की विधि निम्नानुसार हैं

1. उचित पैमाना लेकर आधार रेखा (जो सबसे बड़ा विकर्ण हो) खींचिए।
2. उसी आधार पर आकृति के विभिन्न शीर्षों से लम्ब खींचिए और आधार रेखा पर लम्बपाद अंकित कीजिए।
3. आधार रेखा से रेखाखण्डों एवं लम्ब की दूरियों को अंकित कीजिए।
4. दिए गए क्षेत्र को समकोण त्रिभुज, समलंब चतुर्भुज, आयत या वर्ग में विभाजित कीजिए।
5. इस प्रकार बनी ज्यामितीय आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञात कर उन्हें जोड़कर दिए गए क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

आकृति 14.13 में ABCDEF एक खेत की सीमा है। इसकी भुजाओं को पटवारी किस प्रकार मापता है? सर्वप्रथम वह इसके कोने पर चिह्न लगाता है। ऊपर के खेत में कोने A, B, C, D, E और F हैं।



आकृति 14.13

दो कोने इस प्रकार चुने जाते हैं जिनके बीच की दूरी सबसे अधिक हो। यह दूरी AD ली गई है। इस रेखा को आधार रेखा कहते हैं। अब हम A से प्रारंभ करके D की ओर चलते हैं तथा दाएँ और बाएँ खेत के कोनों को देखते जाते हैं। जैसे ही हम किसी कोने की सीध में आते हैं तो रुक जाते हैं। इसी प्रकार A से चलकर कोना B के सीध में L पर आते हैं। AL और BL को मापकर फील्ड बुक में अंकित कर लेते हैं। इसी प्रकार L से D की ओर आने पर कोना F की सीध में आते हैं और M पर पहुँचते हैं। हम LM और MF को मापकर फील्ड बुक में अंकित कर लेते हैं। यही प्रक्रिया अपनाते हुए MN, NE व NO, OC तथा OD अंकित कर लेते हैं। हम देखते हैं कि खेत समकोण त्रिभुज तथा समलंब चतुर्भुज की आकृतियों में बंट गया है। इन सभी आकृतियों का क्षेत्रफल अलग-अलग ज्ञात कर जोड़ देते हैं। यही योगफल खेत का क्षेत्रफल होता है।

उदाहरण 13. (फील्ड बुक) में अंकित विभिन्न माप निम्नानुसार हैं

AL = 70 मीटर

LB = 50 मीटर

AM = 140 मीटर

MF = 70 मीटर

AN = 180 मीटर

NE = 30 मीटर

AO = 220 मीटर

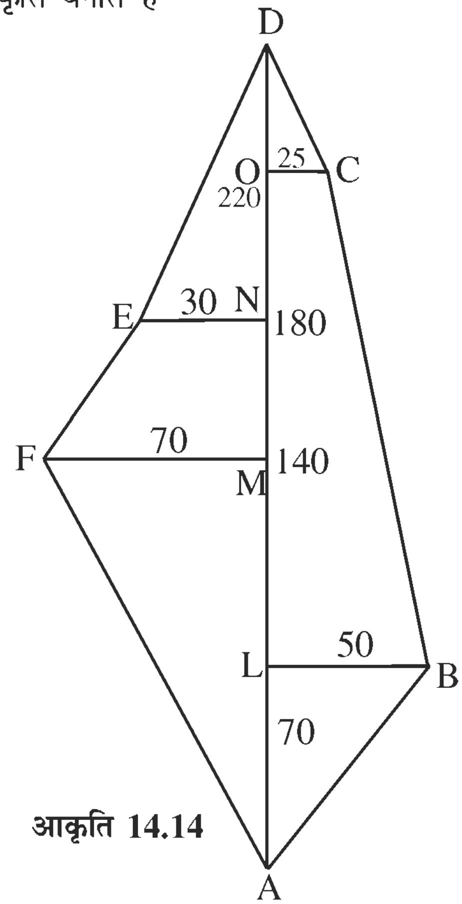
OC = 25 मीटर

AD = 260 मीटर

	मीटर	
	D तक	
	260	
	220	25 C तक
E तक 30	180	
F तक 70	140	
	70	50 B तक
	A से	

हलः दी गई माप के आधार पर निम्नानुसार खेत की आकृति बनाते हैं

- माप को देखकर पैमाना मानते हैं।
  20 मीटर = 1 सेमी
- AD रेखा 260 मीटर अर्थात 13 सेमी की खींचते हैं।
- 70 मीटर अर्थात 3.5 सेमी पर बिंदु **L** लेते हैं।
- 140 मीटर अर्थात 7 सेमी पर **M**, 180 मीटर अर्थात 9 सेमी पर **N** और 220 मीटर अर्थात 11 सेमी पर बिन्दु **O** लगाते हैं।
- **L** से दायीं ओर 50 मीटर अर्थात 2.5 सेमी पर बिन्दु **B** लेते हैं।
- **M** से बायीं ओर 70 मीटर अर्थात 3.5 सेमी पर बिन्दु **F** लेते हैं।
- **N** से बायीं ओर 30 मीटर अर्थात 1.5 सेमी पर बिन्दु **E** अंकित करते हैं।
- **O** से दायीं ओर 25 मीटर अर्थात 1.2 सेमी पर बिन्दु **C** लेते हैं।
- बिन्दु **A, B, C, D, E, F** को एक-दूसरे से मिलाने पर खेत की आकृति बनती है।



आकृति 14.14

खेत का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए विभिन्न आकृतियों के क्षेत्रफल की गणना करेंगे।

1. समकोण त्रिभुज ALB में, AL = 70 मीटर, LB = 50 मीटर

   समकोण त्रिभुज ALB का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} AL \times LB = \frac{1}{2} \times 70 \times 50 = 1750$ मी^{2}

2. समकोण त्रिभुज OCD में, OD = AD–AO = 260 – 220 = 40 मी.

   OC = 25 मी

समकोण त्रिभुज OCD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} OD \times OC$

$= \frac{1}{2} \times 40 \times 25 = 500$ मी^{2}

3. समलंब चतुर्भुज LBCO में LB और OC समांतर भुजाएँ और LO उसकी ऊँचाई है।

ऊँचाई $LO = AO - AL$

$= 220 - 70 = 150$ मीटर

समलंब चतुर्भुज LBCO का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} LO \times (LB + OC)$

$= \frac{1}{2} \times 150 \times (50 + 25)$

$= 5625$ मी^{2}

4. समलंब चतुर्भुज MFEN में MF और NE समांतर भुजाएँ हैं तथा MN उसकी ऊँचाई हैं।

ऊँचाई $MN = AN - AM \quad = 180 - 140 = 40$ मी

समलंब चतुर्भुज MFEN का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} MN \times (MF + NE)$

$= \frac{1}{2} \times 40 \times (70+30) = \frac{1}{2} \times 40 \times 100$

$= 2000$ मी^{2}

5. समकोण त्रिभुज NDE का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times ND \times NE$ $(ND=AD-AN = 260-180)=80$ मी.)

$= \frac{1}{2} \times 80 \times 30 = 1200$ मी^{2}

6. समकोण त्रिभुज AMF का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} AM \times MF$

$= \frac{1}{2} \times 140 \times 70$

$= 4900$ मी^{2}

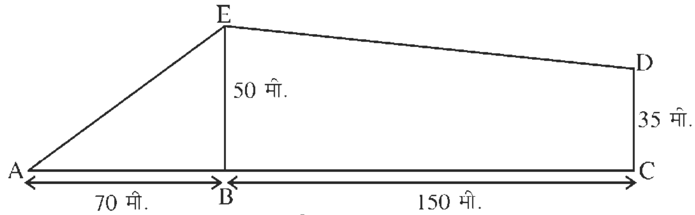
इसलिए खेत का क्षेत्रफल $= (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6)$

$= (1750+500+5625+2000+1200+4900)$ मी^{2}

$= 15975$ मी^{2} उत्तर

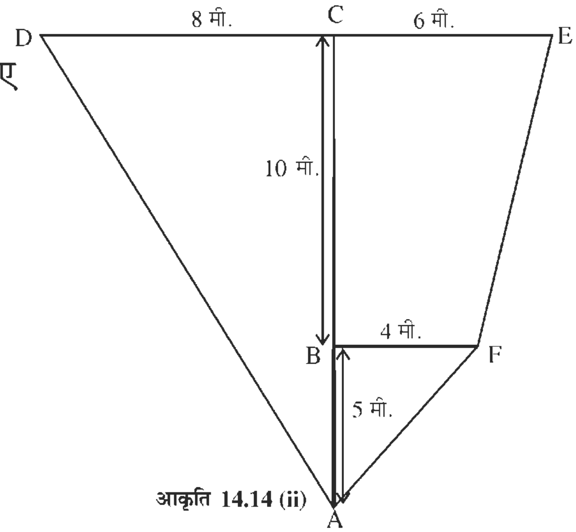
प्रश्नावली 14.6

1. दी गई आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए



आकृति 14.14 (i)

2. दी गई आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए



आकृति 14.14 (ii)

3. निम्नलिखित आंकड़ों के आधार पर खेतों की आकृतियाँ बनाकर उनके क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

(अ)

	मीटर	
	B तक	
	100	40 D तक
C तक 50	80	
	0	30 E तक
	A से	

(ब)

	मीटर	
	B तक	
E तक 20	80	
	60	50 D तक
	0	30 C तक
	A से	

4. दिए हुए आंकड़ों से क्षेत्र की आकृति बनाकर क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

	मीटर	
	B तक	
	100	
50 D तक	60	
	0	30 C तक
	A से	

5. दी गई मापों के आधार पर क्षेत्र की आकृति बनाकर क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

	मीटर	
	B तक	
	80	
40 E तक	60	
	40	30 D तक
	0	20 C तक
	A से	

6. नीचे दी गई मापों के आधार पर क्षेत्र का चित्र बनाइए।

(अ)

	मीटर	
	D तक	
	130	
	80	50 C तक
60 E तक	40	
	25	25 B तक
	A से	

(ब)

	मीटर	
	E तक	
	200	
	150	50 D तक
50 F तक	120	
	80	30 C तक
	20	40 B तक
	A से	

(स)

	मीटर	
	R तक	
	120	
	100	40 S तक
	80	50 T तक
40 Q तक	60	
	P से	

(द)

	मीटर	
	S तक	
	140	50 T तक
	100	30 M तक
20 R तक	80	
	50	40 N तक
30 Q तक	20	
	P से	

14.9 वृत्त की परिधि और क्षेत्रफल

किसी रेखाखण्ड का मापन एक मानक रेखाखण्ड से तुलना कर किया जाता है जिसे हम मात्रक (इकाई) रेखाखण्ड कहते हैं। किसी रेखाखण्ड की लम्बाई यह दर्शाती है कि वह मात्रक रेखाखण्ड उस दिए गए रेखाखण्ड में कितनी बार सम्मिलित है।

इसी प्रकार किसी वृत्त के चाप का अंशमाप दर्शाता है कि उस वृत्त का मात्रक चाप दिए हुए चाप में कितनी बार सम्मिलित है। हम किसी वृत्त के चाप के अंशमाप की परिभाषा उसके द्वारा केन्द्र पर अंतरित केंद्रीय कोण के मापन से देते हैं। किसी वृत्त के चाप का अंशमाप उसके आकार को सही रूप में वर्णित नहीं करता है। विभिन्न त्रिज्याओं के वृत्तों के अंशमाप 360^0 होता है लेकिन 2 सेमी वाला वृत्त 1 सेमी वाले वृत्त से बड़ा है। अत: हमें वृत्तों अथवा उनके चापों को मापने के लिए ऐसे मापों की आवश्यकता है जो उनके आकारों को सही रूप में वर्णित करने में सहायक हो।

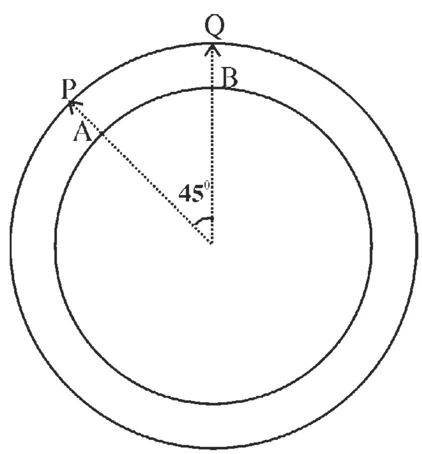
14.10 वृत्त की परिधि

हमें घर में परदे लगाने के लिए एक निश्चित आकार के लोहे के छल्ले बनवाना है या एक आभूषण निर्माता से 10 (दस) सोने की चूड़ियाँ बनवानी हैं। आभूषण निर्माता या लोहे के छल्ले बनाने वाला क्या करेगा? इसके लिए दोनों ही दशा में प्रत्येक छल्ले या चूड़ी की वृत्ताकार लम्बाई ज्ञात कर जितने छल्ले या चूड़ियां बनानी हैं, उसका उतना गुना करेगा। इस कार्य के लिए आवश्यक लम्बाई के तार की आवश्यकता होगी। छल्ले या चूड़ी के संदर्भ में, वृत्त के अनुदिश लम्बाई किस प्रकार मापेंगे? यह एक महत्वपूर्ण प्रश्न है। जैसा कि हम जानते हैं कि रेखीय आकृतियों में चारों ओर की लम्बाई को उनका संगत परिमाप कहा जाता है। इसी प्रकार वृत्त के अनुदिश लम्बाई के माप को एक विशेष नाम दिया गया है जिसे परिधि (Circumference) कहते हैं।

किसी वृत्त के अनुदिश लम्बाई या उसके परिमाप को उसकी परिधि कहते हैं।

हम देखेंगे कि परिधि कैसे मापी जाती हैं?

हम जानते हैं कि जैसे-जैसे वृत्त के किसी चाप द्वारा उसके केन्द्र पर अंतरित कोण में वृद्धि होती है, वैसे-वैसे ही चाप की लम्बाई भी बढ़ती जाती है। हमको लगेगा कि इस तथ्य से हमें वृत्त की परिधि ज्ञात करने में सहायता मिलेगी। परन्तु आकृति 14.15 को देखिए। इसमें एक ही केन्द्र वाले दो वृत्त दिखाए गए हैं। वृत्त का छोटे चाप AB केन्द्र पर 45^0 का कोण अंतरित करता है। वृत्त का बड़े चाप PQ भी केन्द्र पर 45^0 का कोण अंतरित करता है।



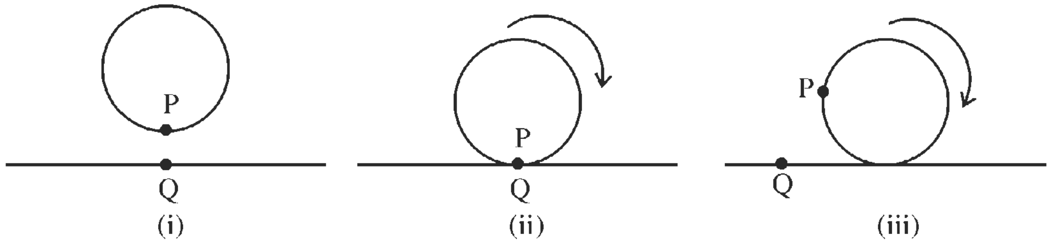
आकृति 14.15

परन्तु स्पष्टत: ये दोनों चाप बराबर नहीं हैं। इस प्रकार, केवल केन्द्र पर अंतरित कोण का ज्ञान हमें चाप के मापने में और इसलिए वृत्त की परिधि को मापने में भी कोई सहायता नहीं दे सकता।

यह अनुमान करने के लिए कि परिधि मापने में क्या सहायक हो सकता है, हम मापने का क्रियाकलाप करेंगे।

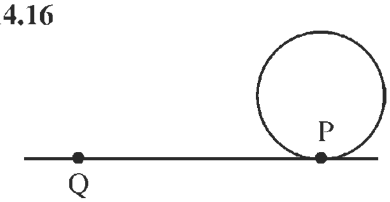
क्रियाकलाप 3. एक वृत्त लीजिए। जैसा कि पहले भी कहा गया, हम इसे सीधी लम्बाई की भाँति नहीं माप सकते। मोटे कागज के पन्ने पर या गत्ते के टुकड़े पर वृत्त की एक अक्स प्रतिलिपि बनाइए। कागज को वृत्त के अनुदिश काट लीजिए जिससे कि हमको एक चक्रिका (disc) प्राप्त हो जाए। इस चक्रिका के घेरे पर एक बिन्दु P चिह्नित कीजिए। ध्यान दीजिए कि यह घेरा ही वास्तव में वृत्त है और इस घेरे के अनुदिश लम्बाई ही इस वृत्त की परिधि है।

अब कागज के पन्ने पर एक रेखा खींचिए। इस पर एक बिन्दु Q चिह्नित कीजिए (आकृति 14.16 (i) चक्रिका को ऊर्ध्वाधर पकड़िए और रेखा पर इस प्रकार रखिए कि बिन्दु P बिन्दु Q पर आए (आकृति 14.16(ii)। अब चक्रिका को रेखा पर दक्षिणावर्त (घड़ी की सूइयों के चलने की दिशा में) धीरे-धीरे इस प्रकार लुढ़काइए कि यह फिसले नहीं, बस घूमे (आकृति 14.16 (iii)। लुढ़काने की क्रिया तब तक कीजिए जब तक कि बिंदु P पुन: रेखा पर न आ जाए। आकृति 14.17



आकृति 14.16

क्योंकि चक्रिका फिसली नहीं है, अत: इसके घेरे के अनुदिश दूरी QP या PQ के बराबर है। इस प्रकार, लम्बाई QP या PQ ही दिए गए वृत्त की परिधि है।



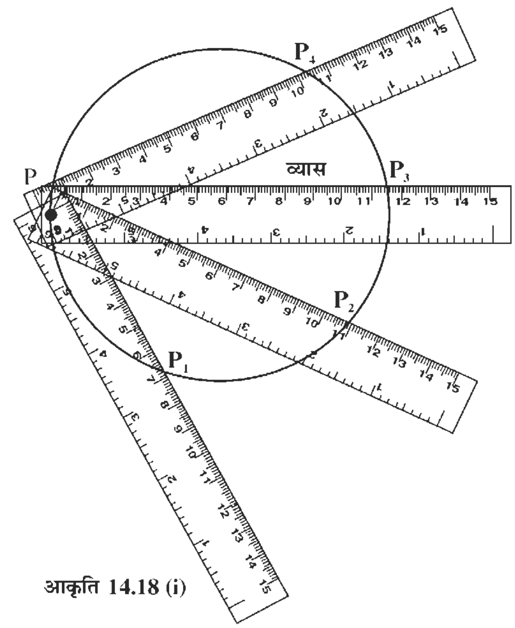
आकृति 14.17

हम चक्रिका के घेरे के अनुदिश ठीक एक बार धागा लपेटकर और फिर प्रयुक्त धागे की लम्बाई मापकर भी परिधि ज्ञात कर सकते थे। इस कार्य के लिए बोतलों के ढक्कन, बेलनाकार डिब्बे, लकड़ी की चक्रिकाएँ सुविधाजनक हो सकती हैं।

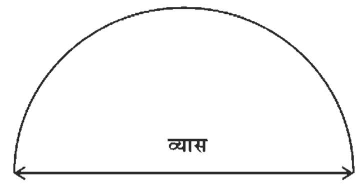
14.11 व्यास और परिधि में संबंध

वृत्त की परिधि मापने के लिए अब हम एक अन्य क्रियाकलाप करेंगे जिससे त्रिज्या या व्यास दिए होने पर, सीधे-सीधे परिधि के परिकलन के लिए सूत्र बनाने में सहायता मिलेगी। ज्ञात केन्द्र वाला वृत्त दिया होने पर, केन्द्र से होकर जाने वाली जीवा

(जिसके सिरे वृत्त पर होंगे) वृत्त का व्यास होती है। यदि केन्द्र ज्ञात न हो, तो हम व्यास को एक बड़ी-से-बड़ी जीवा के रूप में प्राप्त कर सकते हैं। संभवत: हम एक पटरी (ruler) को वृत्त के ऊपर सरकाने से प्राप्त विभिन्न जीवाओं की लम्बाइयाँ देख-देख कर व्यास ज्ञात कर सकते हैं। (आकृति 14.18(i)। एक अधिक परिशुद्ध विधि यह होगी कि हम वृत्त की एक अक्स प्रतिलिपि बनाकर इसे बीच से इस प्रकार मोड़ें कि एक अर्धवृत्त प्राप्त हो जाए। इस अर्धवृत्त के दो सिरों के बीच की सीधी दूरी व्यास होगी (आकृति 14.18 (ii)।



आकृति 14.18 (i)



आकृति 14.18 (ii)

क्रियाकलाप 4. अलग-अलग मापों की चार चक्रिकाएँ लीजिए। इन्हें P, Q, R और S नाम दें। प्रत्येक चक्रिका के ऊपर बताए अनुसार व्यास (d) और परिधि (c) को माप लीजिए। अनुपात $\frac{c}{d}$ का शुद्ध मान दो दशमलव स्थानों तक व्यक्त कर निम्नानुसार सारणी को भरिए :

चक्रिका	परिधि (c)	व्यास (d)	$\frac{c}{d}$
P			
Q			
R			
S			

हम देखेंगे कि चारों चक्रिकाओं में $\frac{c}{d}$ का मान लगभग समान प्राप्त होता है। यदि गणना शुद्धता से की गई है तो $\frac{c}{d}$ का औसत मान 3.14 प्राप्त होगा। यदि आप अन्य वृत्तों पर प्रयोग करेंगे तब भी परिणाम यही प्राप्त होगा।

उक्त प्रयोग से निम्नलिखित दो निष्कर्ष प्राप्त होते हैं

I. किसी भी वृत्त की परिधि (c) और व्यास (d) का अनुपात ($\frac{c}{d}$) एक अचर राशि होता है।

II. किसी वृत्त की परिधि का उसके व्यास से अनुपात 3.14 (दो दशमलव स्थानों तक शुद्ध) या $\frac{22}{7}$ होता है।

14.12 संख्या π

हमने अभी-अभी जाना कि किसी वृत्त की परिधि उसके व्यास का अनुपात एक अचर राशि होती है। इस अनुपात को ग्रीक अक्षर π (pi) से व्यक्त करते हैं। इसे 'पाई' पढ़ा जाता है।

इस प्रकार $\dfrac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \pi$

अर्थात परिधि $= \pi \times$ व्यास

$= \pi \times 2$ त्रिज्या

$= 2\pi$ त्रिज्या

यदि परिधि को c से, व्यास को d से तथा त्रिज्या को r से व्यक्त करें तो $c = \pi \times d$

$= 2\pi r$

$$\text{अत: व्यास (2 त्रिज्या)} = \frac{\text{परिधि}}{\pi} = \frac{c}{\pi}$$

14.13 संख्या π एक परिमेय संख्या नहीं है

π का केवल एक सन्निकट मान है। परिधि का मान भी एक सन्निकट मान ही है। हम संभवत: सोचते हैं कि π के दशमलव के दो स्थानों तक शुद्ध मान का प्रयोग करने की अपेक्षा इसका यथार्थ मान ज्ञात कर लेना अधिक अच्छा होगा। परन्तु हम π का मान दशमलव के कितने ही स्थानों तक निकालें, यह तब भी सन्निकट मान ही रहेगा। गणितज्ञों ने सिद्ध कर दिया है कि π परिमेय संख्या नहीं है। अत: इसे सांत (परिमित) अथवा असांत आवर्ती दशमलव के रूप में नहीं लिखा जा सकता।

उदाहरण 14. 14 सेमी व्यास वाले वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए।

हल : परिधि $= \pi \times \text{व्यास} = \dfrac{22}{7} \times 14 = 44$ सेमी. उत्तर

उदाहरण 15. उस वृत्त का व्यास निकालिए जिसकी परिधि 88 dm है।

हल : व्यास $= \dfrac{\text{परिधि}}{\pi}$

$$= \frac{88}{\frac{22}{7}} = \frac{88 \times 7}{22} \text{dm} = 28 \text{ dm.}$$ उत्तर

उदाहरण 16. उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि 62.80 मी है। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

हल : त्रिज्या $= \dfrac{\text{परिधि}}{2\,\pi}$

$$= \frac{62.80}{2 \times 3.14} = 10 \text{ मी.} \qquad \text{उत्तर}$$

प्रश्नावली 14.7

1. 35 सेमी व्यास वाले वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए।
2. वृत्त का व्यास निकालिए जिसकी परिधि है

   (a) 112.56 सेमी (b) 88 सेमी (c) 15.70 मी
3. उस वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या है

   (a) 2.5 सेमी (b) 1.50 मी. (c) 5 सेमी
4. वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि है :

   (a) 6.28 सेमी (b) 122 मी (c) 308 मी
5. समान केन्द्र वाले दो वृत्तों की त्रिज्याएं 350 मी और 490 मी हैं। इनकी परिधियों में कितना अंतर है?
6. किसी साइकिल के पहिये का व्यास 70 सेमी है। ज्ञात कीजिए कि 110 मी की दूरी तय करने में पहिया कितनी बार घूम जाएगा।
7. एक बकरी 3 मी लम्बी रस्सी से बंधी हुई है। 14 चक्करों में वह कितनी दूरी तय करेगी?
8. चन्द्रमा, पृथ्वी से लगभग 384000 कि.मी. दूर है। पृथ्वी के चारों ओर चन्द्रमा का परिपथ लगभग वृत्ताकार है। पृथ्वी के चारों ओर एक पूरे चक्कर में चन्द्रमा के परिपथ की लम्बाई ज्ञात कीजिए। (π = 3.14)
9. पतले तार का एक टुकड़ा भुजा 3.14 सेमी वाले एक समबाहु त्रिभुज के आकार में है। तार में कमी किए बिना, इसे एक छल्ले के आकार में मोड़ा गया है। छल्ले का व्यास ज्ञात कीजिए। (π =3.14 लीजिए)।
10. 8.9 सेमी लम्बे तथा 5.4 सेमी चौड़े आयत के रूप में एक तार मोड़कर तथा उसकी आकृति परिवर्तित करके एक वृत्त के रूप में लाया गया है। उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

14.14 वृत्त का क्षेत्रफल

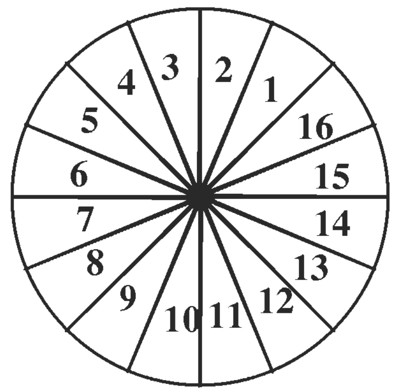
क्रियाकलाप 5 : किसी दी गई त्रिज्या r सेमी का वृत्त कागज की एक मोटी शीट पर खींचिए। हम जानते हैं कि किसी वृत्तीय क्षेत्र का क्षेत्रफल उस वृत्त से घिरे हुए क्षेत्र का परिमाण होता है।

कैंची की सहायता से इस वृत्ताकार आकृति को काट लीजिए। इस प्रकार हमें r सेमी त्रिज्या की एक चक्रिका प्राप्त हो जाएगी। अब वृत्ताकार डिस्क (चक्रिका) को इस प्रकार मोड़िए कि उसके दो बराबर भाग एक-दूसरे को पूरी तरह ढँक लें। अब मुड़े हुए भाग को इस प्रकार पुन: मोड़िए जिससे कि उसके पुन: दो भाग हो जाए। ये दोनों भाग एक-दूसरे को ठीक से ढँक लें। मोड़ को अच्छी तरह दबाइए जिससे क्रीज रेखा

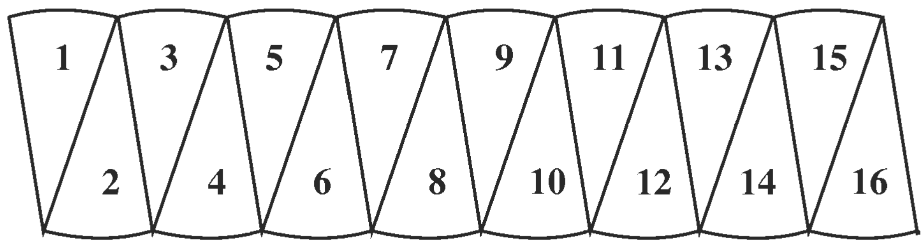
स्पष्ट हो जाए। अब मुड़ी हुई डिस्क को खोलिए। इस प्रकार वृत्तीय क्षेत्र चार बराबर भागों में विभक्त हो गया है। प्रत्येक भाग वृत्त के एक चाप और दो त्रिज्याओं से घिरा हुआ है, जो त्रिज्याएँ परस्पर 90^0 का कोण बनाती है।

अब फिर उस डिस्क को इस प्रकार मोड़िए कि केन्द्र पर चार समकोणों में से एक समकोण समद्विभाजित हो जाए। मोड़ को दबाकर क्रीज प्राप्त कर लीजिए। डिस्क को खोलिए। यही प्रक्रिया दूसरे समकोण के लिए दुहराइए। आप पाएंगे कि वह वृत्तीय क्षेत्र आठ बराबर भागों में विभक्त हो गया है। प्रत्येक भाग वृत्त के एक चाप और दो त्रिज्याओं से घिरा हुआ है। ये त्रिज्याएं परस्पर 45^0 का कोण बनाती हैं। इस प्रक्रिया की पुनरावृत्ति करते हुए आठ भागों को मोड़कर समद्विभाजित कीजिए।

इस प्रकार वृत्त सोलह बराबर भागों में विभक्त हो गया है। प्रत्येक भाग वृत्त के चाप और दो त्रिज्याओं से घिरे है, त्रिज्याएँ परस्पर $\left(22\frac{1}{2}\right)^0$ का कोण बनाती हैं। इन भागों को 1 से 16 तक क्रम में लिखिए जैसा आकृति 14.19 में दर्शाया गया है। कैंची से सोलह भागों को काट लीजिए और अपनी कॉपी के पन्ने पर चित्रानुसार व्यवस्थित कीजिए (आकृति 14.20)।



आकृति 14.19



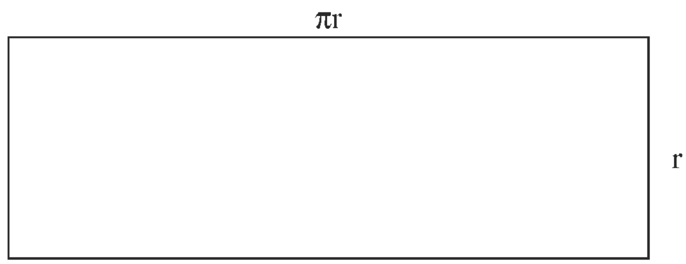
आकृति 14.20

यह आकृति एक आयताकार क्षेत्र के जैसी दिखती है। लेकिन यह ठीक वैसी नहीं है। इसके कोने पर बना कोण समकोण नहीं है। इसकी ऊपरी भुजा एक रेखाखण्ड नहीं है। यह वृत्त के आठ चापों से मिलकर बनी है, प्रत्येक चाप वृत्त का $\frac{1}{16}$ भाग है। अत: ऊपरी भुजा वृत्त की परिधि की आधी है। इसी प्रकार नीचे की भुजा वृत्त के आठ चापों से मिलकर बनी हुई है, प्रत्येक चाप वृत्त का $\frac{1}{16}$ भाग है और यह भी वृत्त की परिधि की आधी है। दूसरी दो भुजाएँ दायें और बायें वास्तव में, रेखाखण्ड हैं, जिनमें से प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या के बराबर है।

इस वृत्तीय क्षेत्र का क्षेत्रफल उस निकट आयत के क्षेत्रफल के बराबर है, जिसकी लम्बाई वृत्त की परिधि की आधी और चौड़ाई त्रिज्या के बराबर है।

यदि हम वृत्त के सोलह भागों में से प्रत्येक को समद्विभाजित करते हैं और उक्त प्रकार से, इन 32 भागों को प्राप्त कर एक निकट के आयताकार क्षेत्र का निर्माण करते हैं, तो हम पाएंगे कि इस आयत की ऊपरी भुजा एक रेखाखण्ड के और निकट आ गई है, यद्यपि इसकी कुल लम्बाई वृत्त की परिधि की आधी ही रहती है। कोनों (corners) पर बने कोण भी अब एक समकोण के निकट आ गए हैं।

हम इसकी कल्पना भली-भाँति कर सकते हैं कि जैसे-जैसे वृत्त के बराबर भागों की संख्या में वृद्धि करते जाएंगे, वैसे-वैसे यह आकृति आयत के और निकट होती जाएगी। अत: क्षेत्रफल में, एक वृत्तीय क्षेत्र एक आयताकार क्षेत्र के तुल्य है (आकृति 14.21) जिसकी लम्बाई **πr** मात्रक और चौड़ाई **r** मात्रक हैं।



आकृति 14.21

तुल्य आयताकार क्षेत्र की भुजाएँ क्रमश: वृत्त की परिधि की आधी तथा त्रिज्या के बराबर होती है अब

वृत्त की त्रिज्या $= r$

वृत्त की परिधि $= 2\pi r$

और $\frac{1}{2}$ (वृत्त की परिधि) $= \pi r$

तुल्य आयत का क्षेत्रफल $= r \times \pi r$

$= \pi r^2$

अत: $\boxed{\text{वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi r^2}$

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi \times (\text{त्रिज्या})^2$

और वृत्त की त्रिज्या $= \sqrt{\text{वृत्त का क्षेत्रफल} \div \pi}$

उदाहरण 17. उस वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 1.4 मी है।

हल : वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times 1.4 \times 1.4$

$= 6.16$ मी^{2} उत्तर

उदाहरण 18. उस वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका व्यास 14 सेमी है।

हल : वृत्त की त्रिज्या $= \frac{22}{7} \times$ व्यास $= \frac{1}{2} \times 14$ सेमी $= 7$ सेमी

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

$= 154$ सेमी^{2} उत्तर

उदाहरण 19. एक वृत्ताकार प्लेट का क्षेत्रफल 154 मी^{2} हो तो प्लेट का व्यास ज्ञात कीजिए।

हल : माना वृत्त की त्रिज्या $= r$ मी, अत: व्यास $= 2r$ मी

वृत्त की त्रिज्या $r = \sqrt{154 \div \frac{22}{7}} = \sqrt{154 \times \frac{7}{22}}$

$= \sqrt{7 \times 7} = 7$ मी

अत: व्यास $= 14$ मी. उत्तर

उदाहरण 20. यदि एक वृत्त की परिधि 35.2 सेमी है, तो वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : त्रिज्या $= \frac{\text{परिधि}}{2\pi} = \frac{35.2}{2 \times \frac{22}{7}} = \frac{35.2 \times 7}{2 \times 22}$ सेमी.

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times \left(\frac{35.2 \times 7}{2 \times 22}\right)^2$

$= \frac{22}{7} \times \frac{35.2 \times 7 \times 35.2 \times 7}{2 \times 22 \times 2 \times 22}$

$= 98.56$ सेमी^{2} उत्तर

प्रश्नावली 14.8

1. उस वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या है

   (a) 17.5 सेमी (b) 49 सेमी (c) 11.4 सेमी

2. उस वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका व्यास है

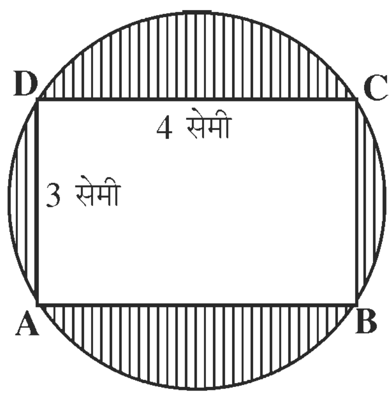
   (a) 11.2 सेमी (b) 28 सेमी (c) 35 सेमी

3. उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल है

(a) 154 सेमी^{2} (b) 616 सेमी^{2} (c) 12474 सेमी^{2}

4. एक वृत्त का क्षेत्रफल 154 मी^{2} है। इसकी परिधि क्या होगी?

5. चित्र में ABCD एक आयत है जिसके शीर्ष बिन्दु वृत्त पर है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$) संकेत : आयत का विकर्ण वृत्त का व्यास होगा।



आकृति 14.22

6. एक ताँबे के तार को मोड़कर वर्ग बनाया गया है जिसका क्षेत्रफल 441 सेमी^{2} है। यदि इसी तार को मोड़कर वृत्त बनाया गया हो, तो वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

7. एक वृत्ताकार पथ का बाह्य व आंतरिक व्यास क्रमशः 35 मी. व 28 मी. है। पथ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8. यदि रस्सी 10 मीटर लम्बी होने के स्थान पर 20 मीटर लम्बी होती, तो यह ज्ञात कीजिए कि नए बने वृत्त के क्षेत्रफल में कितनी वृद्धि होती ($\pi = 3.14$)।

9. 3.14 सेमी की एक भुजा वाले समबाहु त्रिभुज के आकार के तार के टुकड़े को एक छल्ले के आकार में मोड़ा गया है। छल्ले का व्यास ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$)