

बहुपद

बहुपद क्या है ?

चर, अचर गुणांक और घात वाले बीजगणितीय व्यंजक (algebraic expression) बहुपद कहलाते हैं |

जैसे - x^2 , $2x^3$, $3y$, $2x + 5$, $ax^2 + bx$, $2x^2 - 7x + 3$ और $3x^3 + 4x - 5x + 9$ इत्यादि |

समान्यतः बहुपद (Polynomials) को $p(x)$ से सूचित करते हैं |

जैसे - $p(x) = 2x^2 + 3x + 5$ अथवा $p(x) = 3x$ आदि |

ये बहुपद नहीं होते हैं :-

(i) वह बीजीय व्यंजक जिसका घात ऋणात्मक संख्या हो - जैसे - 1 , -2 , -4 या -5 इत्यादि | $3x^{-2} + 5x$, $y^3 - y$, $6x^{-4}$ इत्यादि अन्य उदाहरण हैं |

(ii) वह पद जो किसी चर से विभाजित हो जैसे -

$$\frac{1}{x}, \frac{2}{x+1} \text{ इत्यादि |}$$

(iii) वह बीजीय व्यंजक जिसका घात कोई भिन्नात्मक संख्या (fractional number) हो तो वह बहुपद नहीं होता है | जैसे -

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$$

$$\sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$$

अर्थात् जिस व्यंजक में चर ऐसे घात वाले हो तो वह बहुपद नहीं कहलाता है।

पद के अनुसार बहुपद (Polynomials) के प्रकार :

(i) एकपदी बहुपद (Monomials) : जब किसी व्यंजक में केवल एक ही पद हो तो उसे एकपदी बहुपद कहते हैं।

जैसे - $3x$, $3x^2$, $5xyz$, $10ab$, $2bc$, $4x^4y^3$, 10 और $3y$ इत्यादि।

(ii) द्विपदी बहुपद (Binomials) : जब किसी बीजीय व्यंजक में दो पद (+) या (-) के चिन्हों से जुड़े हो तो वे द्विपदी बहुपद कहलाते हैं।

जैसे - $3x + 5$, $4x - 7y$, $3x^2 + 5$, $7y^5 + 6x$, $9x + y$ इत्यादि।

(iii) त्रिपदी बहुपद (Trinomials) : जब किसी बीजीय व्यंजक में तीन पद (+) या (-) से जुड़े हो तो वह त्रिपदी बहुपद कहलाता है।

जैसे - $2x + 3y + 4$, $4y^2 + 3y - 7$, $3x^3 + 2x^2 + 7x$ और $2x^2 + 3x - 5$ इत्यादि।

बहुपद की घात (The power of polynomials) :

किसी बहुपद $p(x)$ के अधिकतम घात को बहुपद की घात कहते हैं। जैसे –

(i) $p(x) = 3x + 3$ में बहुपद की घात 1 है।

(ii) $p(x) = 4x^2 + 3x + 5$ में बहुपद की घात 2 है।

(iii) $p(x) = 3x^3 + 2x - 7$ में बहुपद की घात 3 है।

(iv) $p(x) = 7x^4 + 5x^3 + x - 8$ में बहुपद की घात 4 है।

(v) $p(x) = 10$ में बहुपद की घात 0 है क्योंकि चर पद नहीं है।

मुख्य-बिंदु और सूत्र :

1. यदि x एक चर है, n एक प्राकृत संख्या है और $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ वास्तविक संख्याएँ हैं, तो $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, ($a_n \neq 0$) चर x में एक बहुपद कहलाता है।
2. 1, 2 तथा 3 घातांक वाले बहुपद क्रमशः रैखिक, द्विघात एवं त्रिघात बहुपद कहलाते हैं।
3. एक द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के रूप का बीजीय व्यंजक होता है जबकि a, b तथा c वास्तविक संख्याएँ हैं तथा $a \neq 0$.
4. बहुपद के शून्यक उन बिंदुओं के x -निर्देशांक हैं जिन पर $y = p(x)$ का आलेख (GRAPH) x -अक्ष को प्रतिच्छेद करता है। अर्थात् $x = a$, बहुपद $p(x)$ का शून्यक होगा यदि $p(a) = 0$
5. बहुपद के अधिकतम शून्यक उतने हो सकते हैं जितनी बहुपद की घात है।
6. (i) यदि बहुपद $p(x)$ का एक शून्यक दूसरे का योज्य प्रतिलोम हो तो x का गुणांक = 0
(ii) यदि बहुपद $p(x)$ के शून्यक एक-दूसरे के गुणन प्रतिलोम हो तो, x^2 का गुणांक = अचर पद
7. बहुपद के शून्यकों ओर गुणांकों में संबंध—
यदि α, β द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) के शून्यक हो, तो

$$\alpha + \beta = \text{शून्यकों का योग} = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = \text{शून्यकों का गुणनफल} = \frac{c}{a}$$
8. यदि α, β किसी द्विघात बहुपद के शून्यक हो, तो बहुपद

$$p(x) = k [x^2 - (\text{शून्यकों का योग})x + \text{शून्यकों का गुणनफल}]$$

जहाँ k कोई वास्तविक संख्या है तथा $k \neq 0$
9. रैखिक बहुपद $p(x) = ax + b$ का आलेख एक सरल रेखा होती है।
10. विभाजन एल्गोरिथ्म—किंही दो बहुपदों $p(x)$ तथा $g(x)$ के लिए अन्य दो बहुपदों $q(x)$ तथा $r(x)$ का अस्तित्व इस प्रकार है:

$$p(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x) ;$$

जबकि $g(x) \neq 0$ तथा $r(x) = 0$ या घातांक $r(x) < \text{घातांक } g(x)$