अध्याय

3

बहुपद
(Polynomials)

3.01 प्रस्तावना

पूर्व कक्षाओं में हमने बीजीय व्यंजकों की विभिन्न संक्रियाओं का अध्ययन किया है जिसमें इन व्यंजकों के गुणनखण्ड करना सम्मिलित है। इन कक्षाओं में हमने निम्न बीजीय सर्वसमिकाओं का गुणनखण्डन में उपयोग किया है:–

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$,

$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ तथा

$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$.

इस अध्याय में हम कुछ विशिष्ट बीजीय व्यंजक, बहुपद (Polynomials) का अध्ययन करते हुए कुछ अन्य बीजीय सर्वसमिकाओं का गुणनखण्ड के सन्दर्भ में अध्ययन करेंगे।

3.02 बहुपदः

सर्वप्रथम हमें ज्ञात होना चाहिए कि चर राशि को एक संकेत यथा $x, y, z, \ldots$ के रूप में व्यक्त किया जाता है। इसी प्रकार जब किसी अचर और चर को चारों मूलभूत संक्रियाओं के साथ व्यक्त किया जाता है तो उसे बीजीय व्यंजक कहते हैं। $3x, 5x, -x, -\frac{3}{2}x$ आदि बीजीय व्यंजक हैं। बीजीय व्यंजक का सामान्य रूप ax है जिसमें a अचर और x चर है। $3x,\ x^2+3x,\ x^3+2x^2-4x+5$ आदि बीजीय व्यंजक हैं। इन सभी व्यंजकों में चर x के घातांक पूर्ण संख्या में हैं। इस प्रकार के व्यंजकों को हम एक चर वाला बहुपद (Polynomials in one variable) कहते हैं। उक्त उदाहरणों मेंx चर है। बहुपद को हम $p(x), g(x), q(y)$ आदि से प्रकट करते हैं। उदाहरणार्थ–

$$p(x) = 3x^2 + 4x - 5$$
$$g(x) = x^3 + 1$$
$$q(y) = y^3 + 2y - 1$$
$$s(t) = 3 - t - 2t^2 + 5t^3$$

बहुपद में परिमित संख्या में कितने भी पद हो सकते हैं।

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0$$

जहाँ $a_n, a_{n-1}, ...a_2, a_1, a_0$ अचर तथा $a_n \neq 0$ है। बहुपद x^2+3x में x^2 तथा $3x$ बहुपद के पद (Term) हैं। बहुपद में प्रत्येक पद का एक गुणांक (Coefficients) होता है।

बहुपद $5x^3-2x^2+x+3$ में

x^3 का गुणांक $=5$ $\quad$ x^2 का गुणांक $=-2$

x का गुणांक $=1$ $\quad$ x^o का गुणांक $=3$

क्या 3 एक बहुपद है?

3, –7, 9 आदि अचर बहुपद (constant polynomals) कहलाते हैं।

0 को शून्य बहुपद कहते हैं।

एक पदवाले बहुपद को एकपदी (monomials) कहते हैं।

जैसे – $3x, 5x^2, -3x^3, 2, t^2, y$ आदि।

दो पदों वाले बहुपद को द्विपद (Binomials) कहते हैं।

जैसे – $x+2, x^2-2x, y^n+2, t^{30}-t^3$ आदि।

इसी प्रकार, तीन पदों वाले बहुपद को त्रिपद (Trinomials) कहते हैं।

जैसे– $p(x)=x^2+x+1$

$g(x)=x-x^2+\sqrt{3}$

$t(y)=y^3+y+3$

$s(t)=t^4+t^2-2$

किसी बहुपद में स्थित चर की अधिकतम घात वाले पद के घातांक को उस बहुपद की घात (Degree of the Polynomials) कहते हैं।

बहुपद $p(x)=4x^3-2x^2+8x-21$ में अधिकतम घातांक वाले पद $4x^3$ की घात $=3$

बहुपद $q(y)=3y^7-4y^6+y+9$ में अधिकतम घातांक वाले पद $3y^7$ की घात $=7$

अतः बहुपद $p(x)$ और $q(y)$ की घात (Degree) क्रमशः 3 और 7 है।

अचर बहुपद $g(x)=2$ में अधिकतम घातांक वाले पद $2=2x^o$ की घात $=0$

अतः बहुपद $g(x)$ की घात (Degree) शून्य है

निष्कर्षतः एक शून्येतर अचर बहुपद की घात शून्य होती है।

बहुपद $p(x)=5x+4,\ g(y)=12y,\ r(t)=4-2t$ तथा $s(u)=\sqrt{3}+2u$ का अवलोकन कीजिए।

इन सभी बहुपदों की घात 1 (एक) है।

एक घात वाले बहुपद को रैखिक बहुपद (Linear Polynomial) कहते हैं।

रैखिक बहुपद को सामान्य रूप से $p(x) = ax + b,\ a \neq 0$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

एक रैखिक बहुपद में अधिकतम दो पद हो सकते हैं। अर्थात् रैखिक बहुपद एक पदी या द्विपदी हो सकता है।

बहुपद

$p(x) = 2x^2 - 3x + 15,\quad g(x) = 5x^2 + 3$ तथा $g(y) = y^2 + 2y$ का अवलोकन कीजिये।

इन घात वाले बहुपद को द्विघाती बहुपद (Quadratic Polynomial) कहते हैं।

द्विघाती बहुपद को सामान्य रूप से $p(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

एक द्विघाती बहुपद में अधिकतम तीन पद हो सकते हैं। अर्थात् द्विघाती बहुपद एक पदी, द्वि पदी या त्रिपदी हो सकता है।

इसी प्रकार,

तीन घात वाले बहुपद को त्रिघाती बहुपद (Cubic Polynomial) कहते हैं। त्रिघाती बहुपद को सामान्य रूप $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

त्रिघाती बहुपद में अधिकतम चार पद हो सकते हैं।

एक चर x में n घात वाले बहुपद का सामान्य व्यंजक

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ जहाँ $a_n \neq 0$ तथा $a_n, a_{n-1}, \ldots a,\ a_0$ अचर हैं।

यदि $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$ हो (अर्थात् सभी अचर शून्य हों) तो हमें शून्य बहुपद (Zero Polynomial) प्राप्त होता है। इसे हम 0 द्वारा प्रकट करते हैं। शून्य बहुपद की घात परिभाषित नहीं है।

बीजीय व्यंजक $x + \dfrac{1}{x}$ लीजिये

$$x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$$

व्यंजक के दूसरे पद x^{-1} का घातांक -1 है जो पूर्ण संख्या नहीं है।

व्यंजक $\sqrt{x} + 5 = x^{1/2} + 5$

व्यंजक के पद $x^{1/2}$ का घातांक $\dfrac{1}{2}$ है जो पूर्ण संख्या नहीं है।

व्यंजक $\sqrt[3]{y} + y^3 = y^{1/3} + y^3$

व्यंजक के पद $y^{1/3}$ का घातांक $\dfrac{1}{3}$ है जो पूर्ण संख्या नहीं है।

उपर्युक्त सभी व्यंजक बहुपद नहीं हैं क्योंकि इनके किसी एक पद का घातांक पूर्ण संख्या नहीं है

अभी तक हमने केवल एक चर वाले बहुपदों का अध्ययन किया है। एक से अधिक चर वाले बहुपद भी उपलब्ध हैं। उदाहरणार्थ– $x^2 + y^2 + xyz,\ p^2 + 8q^3 + r^4,\ t^2 + s^3$ क्रमशः 3, 3 व 2 चरों वाले बहुपद हैं जिनका अध्ययन आप आगे करेंगे।

प्रश्नमाला 3.1

1. निम्न व्यंजकों में से कौनसे बहुपद हैं? बहुपदों के चरों की संख्या ज्ञात कीजिए:

   (i) $3x^2-5x+13$ (ii) $y^2+2\sqrt{3}$ (iii) $y+\dfrac{3}{y}$

   (iv) 3 (v) $2\sqrt{x}+\sqrt{3}\,x$ (vi) $x^{12}+y^3+t^{20}$

2. निम्न व्यंजकों में प्रत्येक में x^2 का गुणांक लिखिये:

   (i) $12+3x+5x^2$ (ii) $7-11x+x^3$ (iii) $\sqrt{3}x-7$ (iv) $\dfrac{\pi}{2}x^2+x$

3. 45 घात के एक द्विपद का उदाहरण लिखिये।
4. 120 घात के एक एकपदी का उदाहरण लिखिये।
5. 8 घात के एक त्रिपदी का उदाहरण लिखिये।
6. प्रश्न संख्या 3, 4 व 5 में दिये गए उदाहरणों के अतिरिक्त पद भी क्या आप लिख सकते है? यदि हाँ तो प्रत्येक के दो उदाहरण लिखिये।
7. निम्न बहुपदों में प्रत्येक बहुपद की घात लिखिये:–

   (i) $12-3x+2x^3$ (ii) $5y-\sqrt{2}$ (iii) 9 (iv) $3+4t^2$

3.03 बहुपद के शून्यक

एक बहुपद लीजिये

$$p(x)=2x^3-3x^2+4x-2$$

यदि हम $P(x)$ में x के स्थान पर 2 प्रतिस्थापित करते हैं तो हमें $p(x)$ का मान प्राप्त होगा।

$$p(2)=2\times(2)^3-3\times(2)^2+4\times2-2$$
$$=2\times8-3\times4+4\times2-2$$
$$=16-12+8-2=10$$

हम कह सकते हैं कि $x=2$ पर $P(x)$ का मान 10 है।

इसी प्रकार, $p(0)=2\times(0)^3-3\times(0)^2+4\times0-2=-2$ होगा

और $p(-1)=2(-1)^3-3(-1)^2+4\times(-1)-2$

$=2\times-1-3\times1+4\times1-2=-11$ होगा

अतः हम कह सकते है कि किसी बहुपद $p(x)$ का $x=\alpha$ पर मान $p(\alpha)$ बहुपद में x को α से प्रतिस्थापित करके प्राप्त होता है।

उदाहरण 1: द्विघात बहुपद $p(x)=8x^2-3x+7$ का मान $x=-1$ एवं $x=2$ पर ज्ञात कीजिये।

हलः $p(-1)=8(-1)^2-3(-1)+7$

$= 8+3+7 = 18$

एवं $p(2) = 8(2)^2 - 3(2) + 7$

$= 32 - 6 + 7 = 33$

उदाहरण 2: बहुपद $p(x) = 2x^3 - 13x^2 + 17x + 12$ का $x = -\frac{1}{2}$ पर मान ज्ञात कीजिये।

हलः $p\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 13\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 17\left(-\frac{1}{2}\right) + 12$

$= 2 \times \frac{-1}{8} - 13 \times \frac{1}{4} + 17 \times \frac{-1}{2} + 12$

$= -\frac{1}{4} - \frac{13}{4} - \frac{17}{2} + 12 = 0$

उदाहरण 3: बहुपद $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ का $x = 1$ पर मान ज्ञात कीजिये।

हलः $p(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 11(1) - 6$

$= 1 - 6 + 11 - 6 = 0$

उक्त उदाहरण में क्योंकि $p(1) = 0$ है, तो हम यह कह सकते हैं कि 1, बहुपद $p(x)$ का एक शून्यक (zero) है।

सामान्य रूप में, हम यह कहते हैं कि बहुपद $P(x)$ का शून्यक एक ऐसी संख्या α (अल्फा) है कि $p(\alpha) = 0$ हो।

बहुपद $p(x) = x - 1$ में $p(1)$ का क्या मान है?

$p(1) = 1 - 1 = 0$

यहाँ ध्यान देने योग्य है कि बहुपद $p(x) = x - 1$ का शून्यक, बहुपद को 0 (शून्य) के बराबर (Equal) करके प्राप्त होता है। अर्थात् $x - 1 = 0$ करने से $x = 1$ प्राप्त होता है। तब हम कहते हैं कि $p(x) = 0$ एक बहुपद समीकरण है और 1 इस बहुपद समीकरण $p(x) = 0$ का एक मूल है। अतः हम कहते हैं कि 1, बहुपद $(x - 1)$ का शून्यक है या यह बहुपद समीकरण $x - 1 = 0$ का मूल (root) है।

एक अचर बहुपद 7 का शून्यक क्या है?

इस बहुपद का कोई शून्यक नहीं है क्योकि $7x^o$ में x के स्थान पर किसी भी संख्या का प्रतिस्थापन करने पर हमें 7 ही प्राप्त होता है। वास्तव में एक शून्येत्तर अचर बहुपद का कोई शून्यक नहीं होता है।

तो फिर शून्य बहुपद के शून्यक क्या होते हैं?

पारम्परिक रूप से प्रत्येक वास्तविक संख्या (Real Number), शून्य बहुपद का एक शून्यक (Zero) होती है।

उदाहरण 4: 3 अथवा –3 के बहुपद $p(x) = x + 3$ के शून्यक होने की जाँच कीजिए।

हलः $p(x) = x + 3$

$$p(3) = 3 + 3 = 6$$

$$p(-3) = -3 + 3 = 0$$

अतः –3 बहुपद $p(x) = x + 3$ का एक शून्यक है, जबकि 3 नहीं।

उदाहरण 5: बहुपद $p(x) = 3x + 2$ का शून्यक ज्ञात कीजिए।

हलः $p(x)$ का शून्यक हम समीकरण $p(x) = 0$ को हल करके ज्ञात कर सकते हैं।

$\therefore \quad p(x) = 3x + 2 = 0$

$$x = -\frac{2}{3}$$

अतः बहुपद $(3x + 2)$ का शून्यक $-\frac{2}{3}$ है।

इस प्रकार, यदि $p(x) = ax + b,\ a \neq 0$ एक रैखिक बहुपद हो, तो हम $p(x)$ का शून्यक उक्त उदाहरण की तरह ज्ञात करते हैं। अर्थात् बहुपद $p(x)$ का शून्यक ज्ञात करने का अर्थ है, बहुपद समीकरण $p(x) = 0$ को हल करना।

अर्थात् $p(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0,\ \ a \neq 0$

$$ax = -b$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

अतः $x = -\frac{b}{a}$ ही $p(x)$ का केवल एक शून्यक है। अर्थात् रैखिक बहुपद का एक और केवल एक शून्यक होता है।

उदाहरण 6: सत्यापित कीजिए कि 3 और 0, बहुपद $x^2 - 3x$ के शून्यक हैं।

हलः $p(x) = x^2 - 3x$

तो $p(3) = (3)^2 - 3(3) = 9 - 9 = 0$

और $p(0) = (0)^2 - 3(0) = 0 - 0 = 0$

अतः 3 और 0 दोनों ही बहुपद $p(x) = x^2 - 3x$ के शून्यक हैं।

सार रूप में हमने यह निष्कर्ष निकाला कि–

1. बहुपद का शून्यक, शून्य ही होना आवश्यक नहीं है।
2. बहुपद का एक शून्यक 0 भी हो सकता है।
3. रैखिक बहुपद का एक और केवल एक शून्यक होता है।
4. एक बहुपद के एक से अधिक शून्यक हो सकते हैं।

प्रश्नमाला 3.2

1. बहुपद $2x^3 - 13x^2 + 17x + 12$ के मान x के निम्नलिखित मानों पर ज्ञात कीजिए।

   (i) $x = 2$ (ii) $x = -3$ (iii) $x = 0$ (iv) $x = -1$

2. निम्नलिखित बहुपदों में से प्रत्येक बहुपद के लिए $P(2), P(1)$ और $P(0)$ का मान ज्ञात कीजिए।

   (i) $p(x) = x^2 - x + 1$ (ii) $p(y) = (y+1)(y-1)$

   (iii) $p(x) = x^3$ (iv) $p(t) = 2 + t + t^2 - t^3$

3. निम्नलिखित बहुपदों के सम्मुख अंकित मान बहुपद के शून्यक है, सत्यापित कीजिए।

   (i) $p(x) = x^2 - 1;\ x = 1, -1$ (ii) $p(x) = 2x + 1;\ x = -\frac{1}{2}$

   (iii) $p(x) = 4x + 5\ ;\ x = \frac{-5}{4}$ (iv) $p(x) = 3x^2;\ x = 0$

   (v) $p(x) = (x-3)(x+5);\ x = 3, -5$ (vi) $p(x) = ax + b;\ x = -\frac{b}{a}$

   (vii) $p(x) = 3x^2 - 1;\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ (viii) $p(x) = 3x + 2;\ x = \frac{-2}{3}$

4. निम्नलिखित बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए।

   (i) $p(x) = x - 4$ (ii) $p(x) = 4x$

   (iii) $p(x) = bx,\ b \neq 0$ (iv) $p(x) = x + 3$

   (v) $p(x) = 2x - 1$ (vi) $p(x) = 3x + 7$

   (vii) $p(x) = cx + d,\ c \neq 0,\ c, d$ वास्तविक संख्याएँ हैं।

शेषफल प्रमेय

हमें ज्ञात है कि 25 में 7 का भाग देने पर भागफल 3 और शेषफल 4 प्राप्त होता है। गणितीय रूप से इसे हम इस प्रकार लिखते हैं–

$$25 = (3 \times 7) + 4$$

इसी प्रकार 48 में 8 का भाग देने पर हमें प्राप्त होता है

$$48 = (6 \times 8) + 0$$

यहाँ शेषफल शून्य (0) है।

इसे हम कहते हैं कि 8, 48 का एक गुणनखण्ड (Factor) है अथवा 48, 8 का एक गुणज (Multiple) है। इसी प्रकार हम एक बहुपद में दूसरे बहुपद का भाग दे सकते हैं। प्रथम स्थिति में, यदि भाजक एक पदी हो। उदाहरणार्थ– बहुपद $3x^3+2x^2+x$ में एक पदी x का भाग देने पर $\left(3x^3+2x^2+x\right)\div x=\frac{3x^3}{x}+\frac{2x^2}{x}+\frac{x}{x}=3x^2+2x+1$, यहाँ $\left(3x^3+2x^2+x\right)$ में x सर्वनिष्ठ (common) है $\quad 3x^3+2x^2+x=x\left(3x^2+2x+1\right)$

अर्थात् x और $\left(3x^2+2x+1\right)$ बहुपद $3x^3+2x^2+x$ के गुणनखण्ड हैं। अब $5x^2+x+1$ में x का भाग देने पर

$$\left(5x^2+x+1\right)\div x=\left(5x^2\div x\right)+\left(x\div x\right)+\left(1\div x\right)$$

यहाँ 1 को x से भाग देने पर बहुपद प्राप्त नहीं होता है।

अतः $5x^2+x+1=\left[\left(5x+1\right)\times x\right]+1$

यहाँ $\left(5x+1\right)$ भागफल और शेषफल 1 है। शेषफल होने के कारण यह गुणनखण्ड नहीं है।
अर्थात् भाज्य = (भाजक × भागफल) + शेषफल
सामान्य रूप से व्यक्त करने पर

यदि $p(x)$ और $g(x)$ दो ऐसे बहुपद हों कि बहुपद $p(x)$ की घात बहुपद $g(x)$ की घात से बड़ी अथवा बराबर हो तथा $g(x)\neq 0$ हो तो हमें ऐसे दो बहुपद $q(x)$ और $r(x)$ प्राप्त होते हैं कि–

$$p(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$$

जहाँ $r(x)=0$ या $r(x)$ की घात $g(x)$ की घात से छोटी है।

अर्थात् $p(x)$ में $g(x)$ से भाग देने पर भागफल $q(x)$ और शेषफल $r(x)$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 7 : $p(x)$ में $g(x)$ का भाग दीजिए जहाँ $p(x)=7x+5x^2+3$ और $g(x)=x+1$ है।

हलः

$$\begin{array}{r|l}
 & 5x+2 \\ \hline
x+1 & 5x^2+7x+3 \\
 & 5x^2+5x \\
 & -\quad - \\ \hline
 & 2x+3 \\
 & 2x+2 \\
 & -\quad - \\ \hline
 & 1
\end{array}$$

ध्यातव्यः इस हल में हमने भाग देने की प्रक्रिया निम्न चरणों में पूर्ण की है।

चरण **I** – सर्वप्रथम भाज्य $7x+5x^2+3$ और भाजक $x+1$ को मानक रूप से लिखते हुऐ पदों को अवरोही (Descending) क्रम में लिखा। अर्थात् भाज्य $5x^2+7x+3$ और भाजक $x+1$

चरण **II** – भाज्य के प्रथम पद को भाजक के प्रथम पद से भाग देकर अर्थात् $5x^2$ को x से भाग देकर $5x$ प्राप्त हुआ।

चरण **III** – भाजक को भागफल के प्रथम पद $5x$ से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल $5x^2+5x$ को भाज्य में से घटाया। इस प्रकार शेषफल $2x+3$ प्राप्त हुआ।

चरण **IV** – शेषफल $2x+3$ को नया भाज्य मानकर पुनः चरण II की प्रक्रिया अपनाई। इस प्रकार भागफल का दूसरा पद 2 प्राप्त हुआ।

चरण **V** – चरण III की तरह ही भागफल के दूसरे पद 2 को भाजक $x+1$ से गुणा करके प्राप्त गुणनफल $2x+2$ को भाज्य $2x+3$ में से घटाया। इससे शेषफल 1 प्राप्त हुआ।

यह प्रक्रिया हम तब तक जारी रखते हैं। जब तक कि नये भाज्य की घात भाजक की घात से न्यून नहीं हो जाती है। अन्तिम चरण में भाज्य शेषफल बन जाता है और भागफलों के योग से पूर्ण भागफल बन जाता है।

इस उदाहरण में भाजक एक रैखिक बहुपद है। इसमें हम शेषफल और भाज्य के कुछ मानों में सम्बन्ध के बारे में विचार करते हैं।

$p(x)=5x^2+7x+3$ में x के स्थान पर -1 प्रतिस्थापित करने पर

$p(-1)=5(-1)^2+7(-1)+3=5-7+3=1$ प्राप्त होता है।

अतः $p(x)=5x^2+7x+3$ को $(x+1)$ से भाग देने पर जो शेषफल प्राप्त होता है। वह बहुपद $(x+1)$ के शून्यक -1, पर बहुपद $p(x)$ के मान के बराबर होता है।

कुछ अन्य उदाहरणों पर विचार कीजिए।

उदाहरण 8: $2x^4-3x^3+3x+1$ में $x+1$ का भाग दीजिए।

हल: भागविधि से

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^3-5x^2+5x-2 \\
\hline
x+1 & 2x^4-3x^3+3x+1 \\
 & 2x^4+2x^3 \\
 & -\quad - \\
\cline{2-2}
 & -5x^3 \qquad +3x+1 \\
 & -5x^3-5x^2 \\
 & +\quad + \\
\cline{2-2}
 & 5x^2+3x+1 \\
 & 5x^2+5x \\
 & -\quad - \\
\cline{2-2}
 & -2x+1 \\
 & -2x-2 \\
 & +\quad + \\
\cline{2-2}
 & 3
\end{array}$$

शेषफल $=3$

भाजक $x+1$ का शून्यक -1 है। अतः $p(x)$ में $x=-1$ रखने पर

$$p(-1)=2(-1)^4-3(-1)^3+3(-1)+1$$
$$=2+3-3+1=3$$
$$= \text{शेषफल}$$

उदाहरण 9: $p(x)=x^3-1$ में $x-1$ का भाग देने पर शेषफल क्या होगा ?

हलः

$$\begin{array}{r|l} & x^2+x+1 \\ \hline x-1 & x^3-1 \\ & x^3 \quad -x^2 \\ & - \quad\quad + \\ \hline & x^2 \quad -1 \\ & x^2-x \\ & - \quad + \\ \hline & x-1 \\ & x-1 \\ & - \quad + \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$= \text{शेषफल}$$

$x-1=0$ का मूल $x=1$ है तथा $p(x)=x^3-1$ है।

$p(1)=(1)^3-1=1-1=0$

अतः $p(1)=0$ भागविधि से प्राप्त शेषफल के बराबर है।

इस प्रकार, यह एक बहुपद को रैखिक बहुपद से भाग देने पर शेषफल ज्ञात करने की एक सरल विधि है।

इस तथ्य को हम प्रमेय के रूप में व्यक्त कर सकते है।

शेषफल प्रमेय

यदि $p(x)$ एक या उससे अधिक घात वाला बहुपद है और a एक वास्तविक संख्या है। यदि $p(x)$ को रैखिक बहुपद $x-a$ से भाग दिया जाए तो शेषफल $p(a)$ प्राप्त होता है।

उपपत्तिः माना कि $p(x)$ एक या उससे अधिक घात वाला बहुपद है और $p(x)$ को $x-a$ से भाग देने पर भागफल $q(x)$ और शेषफल $r(x)$ प्राप्त होता है। अर्थात्

$$p(x)=(x-a)q(x)+r(x)$$

चूंकि $x-a$ की घात 1 है और $r(x)$ की घात $(x-a)$ की घात से कम है। अतः $r(x)$ की घात 0 है। अर्थात् $r(x)$ एक अचर है। माना यह अचर r है।

अतः x के प्रत्येक मान के लिए $r(x)=r$ है।

$$p(x)=(x-a)q(x)+r$$

यदि $x=a$ हो तो

$$p(a)=(a-a)q(x)+r$$

$$=0\times q(x)+r=r$$

इति सिद्धम्

उदाहरण 10: $x^4-4x^2+x^3+2x+1$ को $x-1$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

हल: $p(x)=x^4-4x^2+x^3+2x+1$

$x-1$ का शून्यक 1 है।

$$\therefore \quad P(1)=(1)^4-4(1)^2+(1)^3+2(1)+1$$

$$=1-4+1+2+1=5-4=1$$

अतः शेषफल $=1$

उदाहरण 11: सत्यापित कीजिए कि बहुपद $p(x)=4x^3-12x^2+13x-4$, $g(x)=2x-1$ का एक गुणज है।

हल: $p(x), g(x)$ का गुणज केवल तभी होगा जबकि $p(x)$ को $g(x)$ से भाग देने पर शेषफल शून्य हो।

अतः $g(x)=2x-1=0$

$$x=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad p\left(\frac{1}{2}\right)=4\left(\frac{1}{2}\right)^3-12\left(\frac{1}{2}\right)^2+13\left(\frac{1}{2}\right)-4$$

$$=\frac{1}{2}-3+\frac{13}{2}-4=0$$

अतः $g(x)$ बहुपद $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है अर्थात् $p(x), g(x)$ का एक गुणज है।

प्रश्नमाला 3.3

1. बहुपद $x^4+x^3-3x^2+3x+1$ में निम्नलिखित एक घातीय व्यंजक से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

   (i) $x-1$ (ii) $x-\frac{1}{2}$ (iii) $x+\pi$ (iv) $3+2x$ (v) x

2. $2x^3+2ax^2-5x+a$ को $x+a$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

3. जाँच कीजिये कि $x+1, x^3+3x^2+3x+1$ का एक गुणनखण्ड है या नहीं।

4. बहुपद x^3+x^2-4x+a और $2x^3+ax^2+3x-3$ को $x-2$ से भाग देने पर समान शेषफल प्राप्त होता है तो a का मान ज्ञात कीजिए।

बहुपदों के गुणनखण्डः

उपर्युक्त उदाहरण संख्या 10 का अवलोकन करने का ज्ञात होता है कि चूँकि $p\left(\frac{1}{2}\right)=0$ है,

अतः $g(x)=(2x-1), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है। अर्थात् किसी बहुपद $p(x)$ के लिए

$$p(x)=(2x-1)q(x)$$

यह निम्नलिखित प्रमेय की विशेष स्थिति है।

गुणनखण्ड प्रमेयः यदि $p(x)$ एक या उससे अधिक घात वाला बहुपद हो और a इस प्रकार की वास्तविक संख्या हो कि $p(a)=0$ तो $(x-a)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड होता है। अर्थात् यदि $(x-a), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है तो $p(a)=0$ होता है।

उदाहरण 12: $x-3$ के बहुपद $x^3-3x^2+4x-12$ एवं बहुपद $3x-9$ का एक गुणनखण्ड होने की जाँच कीजिए।

हलः $p(x)=x^3-3x^2 4x-12,\ q(x)=3x-9$

गुणनखण्ड प्रमेयानुसार $(x-3)$ के $p(x)$ व $q(x)$ का एक गुणनखण्ड होने पर

$$p(3)=q(3)=0$$

$(x-3)$ का शून्यक $=3$

$$p(3)=(3)^3-3(3)^2+4(3)-12$$
$$=27-27+12-12=0$$

अतः $x-3, p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

इसी प्रकार, $q(3)=3\times3-9=0$, अतः

$x-3, q(x)$ का भी एक गुणनखण्ड है।

उदाहरण 13: यदि $x-5, x^3-3x^2+ax-10$ का एक गुणनखण्ड है तो a का मान ज्ञात कीजिए।

हलः $x-5, p(x)=x^3-3x^2+ax-10$ का एक गुणनखण्ड है

$\therefore$ $p(5)=0$ होगा।

अर्थात् $p(5)=(5)^3-3(5)^2+a(5)-10=0$

तो $125-75+5a-10=0$

या $40+5a=0$

$$a=-\frac{40}{5}=-8$$

2 व 3 घात वाले बहुपदों के गुणनखण्ड ज्ञात करने के लिए गुणनखण्ड प्रमेय का प्रयोग ax^2+bx+c जहाँ $a\neq 0$ व a, b, c अचर हैं, गुणनखण्ड सामान्यतया मध्य पद को विभक्त करके होता है।

माना $ax^2+bx+c=(px+q)(rx+s)$

$$=prx^2+(ps+qr)x+qs$$

गुणांको की तुलना करने पर

$$a=pr$$

$$b=ps+qr$$

$$c=qs$$

यहाँ b दो संख्याओं ps व qr का योगफल है जिनका गुणनफल

$(ps)(qr)=(pr)(qs)=a\cdot c$ है।

अतः हम ax^2+bx+c का गुणनखण्ड करने के लिए b को ऐसी दो संख्याओं के योगफल के रूप में लिखते हैं जिनका गुणनफल ac हो।

उदाहरण 14: $6x^2+17x+5$ का गुणनखण्ड मध्यपद को विभक्त कर तथा गुणनखण्ड प्रमेय के प्रयोग द्वारा कीजिए।

हल: 1. मध्य पद को विभक्त करके–

हमें मध्यपद 17 को विभक्त कर ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात करनी है जिनका योगफल 17 तथा गुणनफल 6 × 5= 30 हो।

30 के गुणनखण्ड $1\times 30=30$

$$2\times 15=30$$

$$3\times 10=30$$

$$5\times 6=30$$

इनमें से 2 व 15 का योगफल 17 है। अतः

$$6x^2+17x+5=6x^2+(2+15)x+5$$

$$=6x^2+2x+15x+5$$

$$=2x(3x+1)+5(3x+1)$$

$$=(3x+1)(2x+5)$$

2. गुणनखण्ड प्रमेय द्वारा

$$6x^2+17x+5=6\left(x^2+\frac{17}{6}x+\frac{5}{6}\right)=6\cdot p(x)$$

माना कि $p(x)$ के शून्यक a और b हैं। तो

$$6x^2+17x+5=6(x-a)(x-b)$$

$$ab=\frac{5}{6}$$

अब a, b के संभावित मान $=\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{5}{2},\pm\frac{5}{3},\pm 1$ अब क्रमशः ज्ञात करने पर

$$p\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{17}{12}+\frac{5}{6}\neq 0$$

$$p\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}+\frac{17}{6}\times\frac{-1}{3}+\frac{5}{6}$$

$$=\frac{1}{9}-\frac{17}{18}+\frac{5}{6}=0$$

अतः $\left(x+\frac{1}{3}\right)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

इसी प्रकार जाँच करने पर हमें ज्ञात होता है कि $\left(x+\frac{5}{2}\right)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

$$\therefore\quad 6x^2+17x+5=6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)$$

$$=6\left(\frac{3x+1}{3}\right)\left(\frac{2x+5}{2}\right)$$

$$=(3x+1)(2x+5)$$

उदाहरण 15: गुणनखण्ड प्रमेय की सहायता से $x^2-7x+12$ का गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हलः $p(x)=x^2-7x+12$

अब यदि $p(x)=(x-a)(x-b)$

तो अचर पद $ab=12$

अतः $p(x)$ के गुणनखण्ड ज्ञात करने के लिए 12 के गुणनखण्ड ज्ञात करते हैं।

12 के गुणनखण्ड 1, 2, 3, 4, 6 हैं।

$p(3)=(3)^2-7(3)+12=0$

अतः $(x-3)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

इसी तरह, $p(4)=(4)^2-7(4)+12=0$

अतः $(x-4)$ भी $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

इस प्रकार $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$

उदाहरण 16: गुणनखण्ड प्रमेय का उपोग करते हुए बहुपद $x^4+x^3-7x^2-x+6$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल: माना $p(x)=x^4+x^3-7x^2-x+6$

अचर पद 6 के गुणनखण्ड – $\pm 1, \pm 2, \pm 3$, व ± 6

$$p(1)=(1)^4+(1)^3-7(1)^2-1+6=8-8=0$$

अतः $(x-1)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

इसी प्रकार, $p(-1)=(-1)^4+(-1)^3-7(-1)^2-(-1)+6=8-8=0$

अतः $(x-1)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

$$p(2)=(2)^4+(2)^3-7(2)^2-(2)+6=30-30=0$$

अतः $(x-2)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

$$p(-2)=(-2)^4+(-2)^3-7(-2)^2-(-2)+6=24-36\neq 0$$

अतः $(x+2)$, $p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं हैं।

$$p(-3)=(-3)^4+(-3)^3-7(-3)^2-(-3)+6=90-90=0$$

अतः $(x+3)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

चूँकि $p(x)4$ घात वाला बहुपद है। अतः इसके 4 से अधिक रैखिक गुणनखण्ड नहीं हो सकते हैं।

$\therefore \quad p(x)=k(x-1)(x+1)(x-2)(x+3)$

$\Rightarrow \quad x^4+x^3-7x^2-x+6=k(x-1)(x+1)(x-2)(x+3)$. . . (1)

दोनों तरफ $x=0$ रखने पर

$$0+0+0-0+6=k(-1)(1)(-2)(3)$$

$$6=6k$$

$$k=1$$

$k=1$ समीकरण (i) में प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है।

$$x^4+x^3-7x^2-x+6=(x-1)(x+1)(x-2)(x+3)$$

प्रश्नमाला 3.4

1. $x-1$ निम्न में से किस–किस बहुपद का एक गुणनखण्ड है?

   (i) $x^4-2x^3-3x^2+2x+2$ (ii) $x^4+x^3+x^2+x+1$

   (iii) $x^4+3x^3-3x^2+x-2$ (iv) $x^3-x^2-(2+\sqrt{3})x+\sqrt{3}$

2. गुणनखण्ड प्रमेय का प्रयोग करते हुए ज्ञात कीजिए कि क्या $g(x)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है?

   (i) $p(x)=3x^3-x^2-3x+1;\ g(x)=x+1$

   (ii) $p(x)=2x^4-7x^3-13x^2+63x-45;\ g(x)=x-1$

   (iii) $p(x)=3x^3+3x^2+3x+1;\ g(x)=x+2$

   (iv) $p(x)=2x^3+x^2-2x-1;\ g(x)=2x+1$

3. k का मान ज्ञात कीजिए जबकि $(x-5)$ बहुपद $x^3-3x^2+kx-10$ का एक गुणनखण्ड है।

4. k का मान ज्ञात कीजिए जबकि $(x-1)$ बहुपद $2x^2+kx+\sqrt{2}$ का एक गुणनखण्ड है।

5. यदि $(x+1)$ और $(x-1)$ बहुपद $x^4+ax^3-3x^2+2x+b$ के गुणनखण्ड हों तो a और b के मान ज्ञात कीजिए।

6. गुणनखण्ड कीजिए:

   (i) $3x^2+7x+2$ (ii) $4x^2-x-3$

   (iii) $12x^2-7x+1$ (iv) $6x^2+5x-6$

7. बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए:

   (i) $x^3+6x^2+11x+6$ (ii) x^3+2x^2-x-2

   (iii) $x^4-2x^3-7x^2+8x+12$ (iv) x^3-2x^2-x+2

   (v) x^3-3x^2-9x-5 (vi) $x^3-23x^2+142x-120$

बीजीय सर्वसमिकाएँ

पूर्व कक्षाओं में हमने अध्ययन किया है कि बीजीय सर्वसमिका (Algebric Identift) एक ऐसी बीजीय समीकरण होती है जो चर के सभी वास्तविक मानों के लिए सत्य होती हैं पूर्व कक्षाओं में हमने निम्न बीजीय सर्वसमिकाओं का अध्ययन किया है:–

सर्वसमिका I : $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

सर्वसमिका II : $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$

सर्वसमिका III : $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

सर्वसमिका IV : $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

उपर्युक्त सभी सर्वसमिकाएँ द्विपदों के गुणनफलों से सम्बन्धित रही हैं।

V सर्वसमिका I को त्रिपद $x+y+z$ पर लागू करने पर हम $(x+y+z)^2$ का अभिकलन करते हैं।

माना $x+y=t$

$$\therefore \quad (x+y+z)^2=(t+z)^2$$

$=t^2+2tz+z^2$ [सर्वसमिका I के अनुसार]

$=(x+y)^2+2(x+y)z+z^2$ [t का प्रतिस्थापन करने पर]

$$=x^2+2xy+y^2+2xz+2yz+z^2$$

$$=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$$

अतः सर्वसमिका V : $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

उदाहरण 17: $(2x+4y+3z)^2$ का विस्तार कीजिए।

हल: सर्वसमिका से तुलना करने पर

$x=2x,\ y=4y,\ z=3z$

सर्वसमिका V का प्रयोग करने पर

$$(2x+4y+3z)^2=(2x)^2+(4y)^2+(3z)^2+2(2x)(4y)+2(4y)(3z)+2(3z)(2x)$$

$$=4x^2+16y^2+9z^2+16xy+24yz+12zx$$

उदाहरण 18: $(2a-3b-4c)^2$ का विस्तार कीजिए।

हल: सर्वसमिका V का प्रयोग करने पर

$$(2a-3b-4c)^2=[2a+(-3b)+(-4c)]^2$$

$$=(2a)^2+(-3b)^2+(-4c)^2+2(2a)(-3b)+2(-3b)(-4c)+2(-4c)(2a)$$

$$=4a^2+9b^2+16c^2-12ab+24bc-16ac$$

उदाहरण 19: $4x^2+y^2+z^2-4xy-2yz+4xz$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल: $4x^2+y^2+z^2-4xy-2yz+4xz$

$$=(2x)^2+(-y)^2+(z)^2+2(2x)(-y)+2(-y)(z)+2(z)(2x)$$

$=(2x-y+z)^2$ [सर्वसमिका V के अनुसार]

$$=(2x-y+z)(2x-y+z)$$

सर्वसमिका I को $(x+y)^3$ ज्ञात करने में उपयोग करने पर

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)^2$$
$$= (x+y)(x^2+2xy+y^2)$$
$$= x(x^2+2xy+y^2)+y(x^2+2xy+y^2)$$
$$= x^3+2x^2y+xy^2+x^2y+2xy^2+y^3$$
$$= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$
$$= x^3+y^3+3xy(x+y)$$

इस प्रकार हमें सर्वसमिका प्राप्त होती है–

सर्वसमिका VI : $(x+y)^3 = x^3+y^3+3xy(x+y)$

उक्त सर्वसमिका VI में y को $-y$ से प्रतिस्थापित करने पर

सर्वसमिका VII : $(x-y)^3 = x^3-y^3-3xy(x-y)$

$$= x^3-y^3-3x^2y+3xy^2$$

उदाहरण 20ः सर्वसमिकाओं के प्रयोग से निम्न व्यंजकों का विस्तार कीजिएः

(i) $(4a+3b)^3$ (ii) $(3x-5y)^3$

हलः (i) $(4a+3b)^3$ की सर्वसमिका $(x+y)^3$ से तुलना करने पर $x=4a$ और $y=3b$

$$(4a+3b)^3 = (4a)^3+(3b)^3+3(4a)(3b)(4a+3b)$$
$$= 64a^3+27b^3+144a^2b+108ab^2$$

(ii) सर्वसमिका $(x-y)^3$ के साथ $(3x-5y)^3$ की तुलना करने पर

$$x=3x,\ y=5y$$

$\therefore$ $(3x-5y)^3 = (3x)^3-(5y)^3-3(3x)(5y)(3x-5y)$

$$= 27x^3-125y^3-135x^2y+225xy^2$$

उदाहरण 21ः उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग करते हुए हल कीजिए।

(i) $(102)^3$ (ii) $(998)^3$

हलः (i) $(102)^3 = (100+2)^3$

$= (100)^3+(2)^3+3(100)(2)(100+2)$ [सर्वसमिका VI का प्रयोग करने पर]

$$= 1000000+8+60000+1200$$
$$= 1061208$$

(ii) $(998)^3 = (1000-2)^3$

$= (1000)^3 - (2)^3 - 3(1000)(2)(1000-2)$

$= 1000000000 - 8 - 6000000 + 12000$

$= 994011992$

उदाहरण 22: $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल: $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$

$= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2$

$= (2x+3y)^3$ [सर्वसमिका VI के अनुसार]

$= (2x+3y)(2x+3y)(2x+3y)$

आइए हम एक अन्य महत्वपूर्ण सर्वसमिका ज्ञात करते है

$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ का विस्तार करने पर

$$= x^2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) + y(x^2+y^2+z^2-xy-yz-2x) + z(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

$$= x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - xyz - x^2z + x^2y + y^3 + yz^2 - xy^2 - y^2z - xyz + x^2z + y^2z + z^3 - xyz - yz^2 - xz^2$$

$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ (सरल करने पर प्राप्त)

इस प्रकार हमें निम्न सर्वसमिका प्राप्त होती हैः–

सर्वसमिका VIII: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

उदाहरण 23: $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल: $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz = (3x)^3 + (y)^3 + (z)^3 - 3(3x)(y)(z)$

$= (3x+y+z)\left[(3x)^2 + y^2 + z^2 - 3x \cdot y - y \cdot z - z \cdot 3x\right]$

[सर्वसमिका VIII का प्रयोग करने पर]

$= (3x+y+z)(9x^2 + y^2 + z^2 - 3xy - yz - 3zx)$

प्रश्नमाला 3.5

1. उपयुक्त सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(i) $(x+3)(x+7)$ (ii) $(x-5)(x+8)$ (iii) $(2x+7)(3x-5)$

(iv) $(5-3x)(3+2x)$ (v) $\left(x^2+\frac{3}{5}\right)\left(x^2-\frac{3}{5}\right)$ (vi) $(x+2)(x-5)$

2. बीजीय सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(i) 104×109 (ii) 94×97 (iii) 103×97

3. उपयुक्त सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके गुणनखण्ड कीजिए।

(i) $x^2 + 6xy + 9y^2$ (ii) $x^2 - 4x + 4$ (iii) $\dfrac{x^2}{100} - y^2$

4. उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग करके निम्नलिखित का विस्तार कीजिए।

(i) $(2a - 3b - c)^2$ (ii) $(2 + x - 2y)^2$ (iii) $(a + 2b + 4c)$

(iv) $(m + 2n - 5p)^2$ (v) $(3a - 7b - c^2)^2$ (vi) $\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}\right)^2$

5. गुणनखण्ड कीजिए:

(i) $9x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 12xy - 16yz + 24xz$

(ii) $x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 2\sqrt{2}xy - 8yz - 4\sqrt{2}xz$

6. निम्न घनों का विस्तार कीजिए:

(i) $(3a - 2b)^3$ (ii) $(1 + 2x)^3$ (iii) $\left(\dfrac{2}{5}x + 3\right)^3$ (iv) $\left(x - \dfrac{2}{3}y\right)^3$

7. उपयुक्त सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके मान ज्ञात कीजिए:

(i) $(98)^3$ (ii) $(103)^3$ (iii) $(999)^3$

8. गुणनखण्ड कीजिए:

(i) $x^3 + 8y^3 + 6x^2y + 12xy^2$ (ii) $27a^3 - 8b^3 - 54a^2b + 36ab^2$

(iii) $27 - 125x^3 - 135x + 225x^2$ (iv) $125x^3 - 64y^3 - 300x^2y + 240xy^2$

9. गुणनखण्ड कीजिए:

(i) $64a^3 + 27b^3$ (ii) $125x^3 - 8y^3$

10. सत्यापित कीजिए:

(i) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \dfrac{1}{2}(x + y + z)\left[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\right]$

(ii) $27a^3 + b^3 + c^3 = (3a + b + c)\left[3a^2 + b^2 + c^2 - 3ab - bc - 3ac\right]$

11. यदि $x + y + z = 0$ हो तो सत्यापित कीजिए कि $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

12. उपयुक्त बीजीय सर्वसमिका का प्रयोग करते हुए गणना कीजिए:

(i) $(30)^3 + (20)^3 + (-50)^3$ (ii) $(-15)^3 + (28)^3 + (-13)^3$

[संकेत : सर्वसमिका का प्रयोग करें, यदि $x + y + z = 0$ हो तो $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$]

महत्वपूर्ण बिन्दु

इस अध्याय हमने निम्नलिखित बिन्दुओं का अध्ययन किया हैः–

1. एक चर वाला बहुपद $p(x)$ निम्न रूप में x का एक बीजीय व्यंजक है

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots. + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

जहाँ $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, a_n$ अचर तथा $a_n \neq 0$ है। $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n$ क्रमशः $x^o, x, x^2, \ldots, a^n$ के गुणांक हैं और n बहुपद की घात है। प्रत्येक $a_n x^n, a_{n-1}, x^{n-1}, \ldots, a_0$ जहाँ $a_n \neq 0$, को बहुपद $p(x)$ का पद कहते हैं।

2. एक पद वाले बहुपद को एकपदी कहते हैं।
3. दो पदों वाले बहुपद को द्विपद कहते हैं।
4. तीन पदों वाले बहुपद को त्रिपद कहते हैं।
5. एक घात वाले बहुपद को रैखिक बहुपद कहते हैं।
6. दो घात वाले बहुपद को द्विघाती बहुपद कहते हैं।
7. तीन घात वाले बहुपद को त्रिघाती बहुपद कहते हैं।
8. वास्तविक संख्या a, बहुपद $p(x)$ का एक शून्यक होती है, यदि $p(a) = 0$ हो।
9. एक चर में प्रत्येक रैखिक बहुपद का एक अद्वितीयक शून्यक होता है। एक शून्येतर अचर बहुपद का कोई शून्यक नहीं है और प्रत्येक वास्तविक संख्या शून्य बहुपद का एक शून्यक होती है।
10. शेषफल प्रमेय : यदि $p(x)$ एक या उससे अधिक घात वाला बहुपद है और a एक वास्तविक संख्या है। यदि $p(x)$ में रैखिक बहुपद $(x-a)$ से भाग दिया जाए तो शेषफल $p(a)$ प्राप्त होता है।
11. यदि $p(a) = 0$ हो, तो $x-a$ बहुपद $p(x)$ का एक गुणनखण्ड होता है और यदि $x-a$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड हो, तो $p(a) = 0$ होता है।
12. $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$
13. $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$
14. $(x-y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$
15. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 3.1

1. (i) बहुपद है, एक चर

(ii) बहुपद है, एक चर

(iii) व (v) बहुपद नहीं, क्योंकि प्रत्येक घातांक पूर्ण संख्या नहीं

(iv) अचर बहुपद है

(vi) बहुपद है, तीन चर

2. (i) 1 (ii) 0 (iii) 0 (iv) $\frac{\pi}{2}$

3. $5x^{45}+7$ (अन्य बहुपद भी संभव हैं।)

4. $3x^{120}$ (अन्य बहुपद भी संभव हैं।)

5. $2x^8+3x^4+5x$ (अन्य बहुपद भी संभव हैं।)

6. संभव हैं। आप स्वयं लिखिए।

7. (i) 3 (ii) 1 (iii) 0 (iv) 2

प्रश्नमाला 3.2

1. (i) 10 (ii) –210 (iii) 12 (iv) –20

2. (i) 3, 1, 1 (ii) 3, 0, –1 (iii) 8, 1, 0 (iv) 0, 3, 2

4. (i) 4 (ii) 0 (iii) 0 (iv) –3

(v) $\frac{1}{2}$ (vi) $-\frac{7}{3}$ (vii) $-\frac{d}{c}$

प्रश्नमाला 3.3

1. (i) 1 (ii) $\frac{31}{16}$ (iii) $\pi^4-\pi^3-3\pi^2-3\pi+1$

(iv) $-\frac{137}{16}$ (v) 1

2. 6a

3. है, क्योंकि शेषफल शून्य है।

4. $a=-5$

प्रश्नमाला 3.4

1. (i) व (iii) का $(x-1)$ एक गुणनखण्ड है।

(ii) व (iv) का $(x-1)$ एक गुणनखण्ड नहीं है।

2. (i) हाँ (ii) हाँ (iii) नहीं (iv) हाँ

3. (i) $k=-8$

4. $k=-\left(2+\sqrt{2}\right)$

5. $a=-2, b=2$

6. (i) $(x+2)(3x+1)$; (ii) $(x-1)(4x+3)$;

(iii) $(3x-1)(4x-1)$; (iv) $(2x+3)(3x-2)$

7. (i) $-1, -2, -3$; (ii) $-2, -1, 1$; (iii) $-2, -1, 2, 3$;

(iv) $-1, 1, 2$; (v) $-1, 5$; (vi) $1, 10, 12$

प्रश्नमाला 3.5

1. (i) $x^2+10x+21$ (ii) $x^2+3x-40$ (iii) $6x^2+11x-35$

(iv) $15+x-6x^2$ (v) $x^4-\dfrac{9}{25}$ (vi) $x^2-3x-10$

2. (i) 11336 (ii) 9118 (iii) 9991

3. (i) $(x+3y)(x+3y)$ (ii) $(x-2)(x-2)$ (iii) $\left(\dfrac{x}{10}+y\right)\left(\dfrac{x}{10}-y\right)$

4. (i) $4a^2\times 9b^2+c^2-12ab+6bc-4ac$

(ii) $4+x^2+4y^2+4x-4xy-8y$

(iii) $a^2+4b^2+16c^2+4ab+16bc+8ac$

(iv) $m^2+4n^2+25p^2+4mn-20np-10pm$

(v) $9a^2+49b^2+c^2-42ab+14bc-6ac$

(vi) $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{z^2}+\dfrac{z^2}{x^2}+\dfrac{2x}{z}+\dfrac{2y}{x}+\dfrac{2z}{y}$

5. (i) $\left(3x-2y+4z\right)^2$ (ii) $\left(x+\sqrt{2}y-2\sqrt{2}z\right)^2$

6. (i) $27a^3-8b^3-54a^2b+36ab^2$ (ii) $1+8x^3+6x+12x^2$

(iii) $\frac{8}{125}x^3+27+\frac{36}{25}x^2+\frac{54}{5}x$ (iv) $x^3-\frac{8}{27}y^3-2x^2y+\frac{4}{3}xy^2$

7. (i) 941192 ; (ii) 1092727; (iii) 997002999

8. (i) $\left(x+2y\right)^3$; (ii) $\left(3a-2b\right)^3$; (iii) $\left(3-5x\right)^3$; (iv) $\left(5x-4y\right)^3$

9. (i) $\left(4a+3b\right)\left(16a^2-12ab+9b^2\right)$; (ii) $\left(5x-2y\right)\left(25x^2+10xy+4y^2\right)$

12. (i) –90000; (ii) 16380