पाठ 3
परिमेय घातांक

आइए सीखें

- परिमेय घातांक की अवधारणा को समझना।
- परिमेय घातांकों के लिए घातांक के नियमों का अनुप्रयोग करना।
- व्युत्क्रम घात एवं व्युत्क्रम घातांक की अवधारणा को समझना।
- घनात्मक परिमेय संख्याएँ घातांक के रूप में प्रयोग करना।
- ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ घातांक के रूप में प्रयोग करना।
- परिमेय घातांकों के नियमों की सहायता से आंकिक प्रश्नों को हल करना।

3.1 पिछली कक्षा में हम घातांक संबंधी अवधारणाओं के बारे में पढ़ चुके हैं। घनात्मक पूर्णांक घातांक वाली परिमेय संख्याओं व ऋणात्मक पूर्णांक घातांक वाली परिमेय संख्याओं का अध्ययन करने के साथ ही घातांकों के विषय में निम्नलिखित नियम भी पढ़ चुके हैं।

(I) यदि x, y कोई शून्येतर परिमेय संख्याएँ तथा m कोई पूर्णांक हो, तब

$x^m \times y^m = (x \times y)^m$, $\qquad \frac{x^m}{y^m} = \left(\frac{x}{y}\right)^m$

यदि $\frac{p}{q}$ कोई परिमेय संख्या है और m कोई घनात्मक पूर्णांक हो, तो $\left[\frac{p}{q}\right]^m = \frac{p^m}{q^m}$

(II) यदि x कोई शून्येतर परिमेय संख्या तथा m और n कोई पूर्णांक हो, तब

$x^m \times x^n = x^{m+n}$

तथा $(x^m)^n = x^{mn}$

(III) यदि x कोई शून्येतर परिमेय संख्या हो और m तथा n ऐसे धनात्मक पूर्णांक हो कि m>n तब

$x^m \div x^n = x^{m-n}$

इस कक्षा में हम परिमेय घातांक की अवधारणा, परिमेय घातांकों के लिए घातांक के नियमों का अनुप्रयोग तथा व्युत्क्रम घात एवं व्युत्क्रम घातांक को समझेंगे।

स्मरण कीजिए कि परिमेय संख्या वह संख्या है जो या तो $\frac{p}{q}$ के रूप में हो या $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त की जा सके, जहां p, q पूर्णांक हैं और q शून्य नहीं है।

3.2 धनात्मक पूर्णांक घातांक को व्युत्क्रम घातांक के रूप में लिखना

हम जानते हैं कि $5^2 = 25,\ 5^3 = 125,\ 5^4 = 625$

उपर्युक्त में $5^2 = 25$ को इस प्रकार लिख सकते हैं

$5 = (25)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25}$ या $\sqrt[2]{25}$

इसी प्रकार, $5^3 = 125$ को $\sqrt[3]{125} = 5$ या $(125)^{\frac{1}{3}} = 5$ [125 की घात $\frac{1}{3}$ का मान 5 है]

तथा $5^4 = 625$ को $(625)^{\frac{1}{4}} = 5$ भी लिख सकते हैं।

एक अन्य उदाहरण भी लेते हैं

$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$ को $\left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{5}$ भी लिख सकते हैं।

$(625)^{\frac{1}{4}} = 5$

उपर्युक्त उदाहरणों से यह निष्कर्ष निकलता है कि

> यदि q >1 कोई पूर्णांक हो तथा x और y ऐसी परिमेय संख्याएँ हो कि $x^q = y$, तब $y^{\frac{1}{q}} = x$, या इसे $x = \sqrt[q]{y}$ के रूप में भी लिखा जा सकता है। यहाँ y का qवाँ मूल x, पढ़ते हैं।
>
> $\sqrt[q]{y}$, y का एक 'मूल' कहलाता है तथा q इस मूल का घातांक कहलाता है।

प्रश्नावली 3.1

1. निम्नलिखित को घातांक रूप में लिखिए

$\sqrt{7}, \sqrt{24}, \sqrt[3]{36}, \sqrt[9]{512}, \sqrt[6]{729}, \sqrt[5]{\frac{32}{243}}, \sqrt[4]{37}$

2. निम्नलिखित संख्याओं को मूलों के रूप में लिखिए

$$(16)^{\frac{1}{2}},\ (243)^{\frac{1}{3}},\ \left(\frac{81}{256}\right)^{\frac{1}{4}},\ \left(\frac{1}{1331}\right)^{\frac{1}{3}},\ \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{m}}$$

3. सरल कीजिए

$$\left(\frac{9}{25}\right)^{2},\ \left(\frac{2}{5}\right)^{3},\ \left(\frac{a}{b}\right)^{3},\ \left(\frac{x^3}{y^3}\right)^{n}$$

आइए, अब परिमेय संख्याओं को घातांक के रूप में जानें।

3.3 धनात्मक परिमेय संख्याएँ घातांक के रूप में

माना कि $\frac{p}{q}$ कोई धनात्मक परिमेय संख्या है तथा x कोई परिमेय संख्या है। अब हम $\frac{p}{q}$ पर ध्यान देंगे।

$x^{\frac{p}{q}}$ का $\left(x^p\right)^{\frac{1}{q}}$ के रूप में परिभाषित करते हैं, अर्थात $\left(x^p\right)^{\frac{1}{q}}$ को x^p का qवाँ मूल कहते हैं।

$x^{\frac{p}{q}}$ का मान उपर्युक्त परिभाषा के आधार पर ज्ञात करते हैं।

जैसे $$(8)^{\frac{5}{3}} = \left(8^5\right)^{\frac{1}{3}} = \left[\left(2^3\right)^5\right]^{\frac{1}{3}} = \left(2^{15}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^5 = 32$$

$$(64)^{\frac{5}{6}} = \left(64^5\right)^{\frac{1}{6}} = \left[\left(2^6\right)^5\right]^{\frac{1}{6}} = \left(2^{30}\right)^{\frac{1}{6}} = 2^5 = 32$$

$$\sqrt[3]{27^2} = \left(27^2\right)^{\frac{1}{3}} = \left[\left(3^3\right)^2\right]^{\frac{1}{3}} = \left(3^6\right)^{\frac{1}{3}} = 3^2 = 9$$

$$\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{4}{5}} = \left[\left(\frac{32}{243}\right)^4\right]^{\frac{1}{5}} = \left[\left(\frac{2^5}{3^5}\right)^4\right]^{\frac{1}{5}}$$

$$=\left[\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^5\right\}^4\right]^{\frac{1}{5}},$$ $\frac{x^n}{y^n}=\left(\frac{x}{y}\right)^n$ के प्रयोग द्वारा

$$=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{20}\right]^{\frac{1}{5}},$$ $\left(x^m\right)^n=x^{mn}$ के प्रयोग द्वारा

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^{20\times\frac{1}{5}}$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$=\frac{2^4}{3^4},$$ $\left(\frac{x}{y}\right)^n=\frac{x^n}{y^n}$ के प्रयोग द्वारा

$$=\frac{16}{81}$$

उदाहरण 1 $(16)^{\frac{1}{4}}\times(81)^{\frac{1}{4}}$ को हल कीजिए।

हल : $(16)^{\frac{1}{4}}\times(81)^{\frac{1}{4}}$

$$=(16\times81)^{\frac{1}{4}}$$

$$=(2\times2\times2\times2\times3\times3\times3\times3)^{\frac{1}{4}}=\left(2^4\times3^4\right)^{\frac{1}{4}}=(2\times3)^{4\times\frac{1}{4}}$$

$= 2 \times 3$

$= 6$

$x^m \times y^m = (x \times y)^m$

जहाँ x और y कोई धनात्मक परिमेय संख्याएँ हैं और m भी एक शून्येतर परिमेय संख्या है।

प्रश्नावली 3.2

मान बताइए

1. $4^{\frac{3}{2}}$
2. $8^{\frac{2}{3}}$
3. $27^{\frac{2}{3}}$
4. $(64)^{\frac{2}{3}}$
5. $\sqrt[3]{125^2}$
6. $(64)^{\frac{5}{6}}$
7. $(343)^{\frac{2}{3}}$
8. $\sqrt[3]{1331^2}$
9. $(1296)^{\frac{1}{4}}$
10. $(1000000)^{\frac{2}{3}}$
11. $\left(27a^3b^3\right)^{\frac{1}{3}}$
12. $\left(\frac{625}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$
13. $\left(\frac{343}{1331}\right)^{\frac{1}{3}}$
14. $\left(\frac{256}{6561}\right)^{\frac{3}{8}}$

3.4 ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ घातांक के रूप में

यदि $\frac{p}{q}$ एक धनात्मक परिमेय संख्या हो, तो किसी भी शून्येतर परिमेय संख्या x के लिये

$(x)^{\frac{-p}{q}}$ को $(x \neq 0)$, $\frac{1}{x^{\frac{p}{q}}}$ लिखा जा सकता है,

अर्थात
$$x^{\frac{-p}{q}} = \frac{1}{x^{\frac{p}{q}}}$$

जैसे : $(32)^{\frac{-1}{5}}$ को इस प्रकार हल करते हैं

$$(32)^{\frac{-1}{5}} = \frac{1}{(32)^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{\left(2^5\right)^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{2}$$

उदाहरण 2. $\left(9^3\right)^{\frac{-2}{3}}$ को हल कीजिए।

हल : $\left(9^3\right)^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{(9^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{(9)^2} = \frac{1}{81}$

उदाहरण 3. $(64)^{\frac{-5}{2}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $(64)^{\frac{-5}{2}} = \frac{1}{(64)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{\left(2^6\right)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{30}{2}}}$

$\frac{1}{2^{15}} = \frac{1}{32768}$

प्रश्नावली 3.3

मान बताइए

1. $(32)^{\frac{-1}{5}}$
2. $(128)^{\frac{-2}{7}}$
3. $\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{-3}{5}}$
4. $(512)^{\frac{-2}{3}}$
5. $\sqrt[5]{243^{-1}}$
6. $\sqrt[3]{x^6y^{-3}}$
7. $4^{\frac{-3}{2}}$
8. $8^{\frac{-2}{3}}$
9. $(512)^{\frac{-2}{9}}$
10. $(16)^{\frac{-3}{4}}$
11. $\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-2}{3}}$
12. $\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-4}{3}}$

3.5 परिमेय घातांकों के लिए घातांक नियम

हम पूर्व में पूर्णांक घातांकों के लिए घातांक नियम का अध्ययन कर चुके हैं। अब हम देखेंगे कि परिमेय संख्याओं के लिए क्या नियम बनते हैं।

(i) $27^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{1}{3}}$

$$(27\times8)^{\frac{1}{3}}=(216)^{\frac{1}{3}}=(6^3)^{\frac{1}{3}}=6$$

अत: $27^{\frac{1}{3}}\times8^{\frac{1}{3}}=(27\times8)^{\frac{1}{3}}=6$

इसी प्रकार (ii) $5^{\frac{4}{5}}\times5^{\frac{1}{5}}=(5^4\times5)^{\frac{1}{5}}=\left(5^5\right)^{\frac{1}{5}}=5$

$$5^{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}}=5^{\frac{5}{5}}=5$$

अत: $5^{\frac{4}{5}}\times5^{\frac{1}{5}}=5^{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}}$

(iii) $7^{\frac{6}{5}}\div7^{\frac{1}{5}}=\left(7^6\div7\right)^{\frac{1}{5}}=\left(7^5\right)^{\frac{1}{5}}=7$

$$7^{\frac{6}{5}-\frac{1}{5}}=7^{\frac{5}{5}}=7$$

अत: $7^{\frac{6}{5}}\div7^{\frac{1}{5}}=7^{\frac{6}{5}-\frac{1}{5}}$

(iv) $(2^3)^2 = (2\times2\times2)^2 = (2\times2\times2)\times(2\times2\times2)$

$= 2^3 \times 2^3$

$= 2^{3+3} = 2^6 = 64$

$2^{3\times2} = 2^6 = 2\times2\times2\times2\times2\times2 = 2^6 = 64$

अत: $(2^3)^2 = 2^{3\times2}$

उक्त उदाहरणों को देखते हुए निम्नलिखित नियम प्रतिपादित करते हैं

यदि x और y कोई शून्येतर परिमेय संख्याएँ हैं तथा m कोई परिमेय संख्या है, तब

$x^m \times y^m = (x\times y)^m$

यदि x कोई परिमेय संख्या है और m तथा n कोई परिमेय संख्याएँ हैं तब

$x^m \times x^n = x^{m+n}$

$x^m \div x^n = x^{m-n}$

$(x^m)^n = x^{mn}$

उपर्युक्त से स्पष्ट होता है कि पूर्णांक घातांकों के लिए जो घातांक के नियम हैं वे परिमेय घातांकों के लिए भी सत्य हैं।

टिप्पणी : $x^{\frac{p}{q}}$ को $\sqrt[q]{x^p}$ के रूप में परिभाषित किया है। यदि q एक पूर्णांक हो तथा $q \neq 0$

उदाहरण 4. $64^{\frac{1}{6}} \times 729^{\frac{1}{6}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $64^{\frac{1}{6}} \times 729^{\frac{1}{6}}$

$$=\left(2^3 \times 2^3\right)^{\frac{1}{6}} \times \left(3^3 \times 3^3\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$=\left(2^3 \times 2^3 \times 3^3 \times 3^3\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$=\left(2^6 \times 3^6\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$=\sqrt[6]{2^6 \times 3^6} = \left[(2 \times 3)^6\right]^{\frac{1}{6}} = (2 \times 3)^{6 \times \frac{1}{6}}$$

$= 6$

$q \neq 0$

उदाहरण 5. $27^{\frac{-2}{3}} \times 64^{\frac{-2}{3}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $27^{\frac{-2}{3}} \times 64^{\frac{-2}{3}} = (27 \times 64)^{\frac{-2}{3}}$

$$=\left(3^3 \times 4^3\right)^{\frac{-2}{3}} = \left[(3 \times 4)^3\right]^{\frac{-2}{3}}$$

$$=\left(12^3\right)^{\frac{-2}{3}} = (12)^{-2}$$

$$=\frac{1}{12^2} = \frac{1}{144}$$

उदाहरण 6. $12^{\frac{2}{3}} \times 12^{\frac{1}{3}}$ का मान निकालिए।

हल : $12^{\frac{2}{3}} \times 12^{\frac{1}{3}} = 12^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}$

$12^1 = 12$

उदाहरण 7. $13^{\frac{1}{3}} \times 13^{\frac{1}{3}} \times 13^{\frac{1}{3}}$ का क्या मान होगा?

हल : $13^{\frac{1}{3}} \times 13^{\frac{1}{3}} \times 13^{\frac{1}{3}}$

$$= \left(13^{\frac{1}{3}} \times 13^{\frac{1}{3}}\right) \times 13^{\frac{1}{3}} = \left(13^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}\right) \times 13^{\frac{1}{3}}$$

$$= 13^{\frac{2}{3}} \times 13^{\frac{1}{3}} = 13^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}$$

$$= 13^{\frac{3}{3}} = 13$$

इसे हम $\sqrt[3]{13^3}$ भी लिख सकते हैं।

उदाहरण 8. $\left(729^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$ का मान निकालिए।

हल : $\left(729^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = (729)^{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}} = (729)^{\frac{2}{6}}$

$$= (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)^{\frac{2}{6}}$$

$$= (3^6)^{\frac{2}{6}} = 3^{6\times\frac{2}{6}}$$

$$= 3^2 = 9$$

उदाहरण 9. $21^{\frac{5}{3}} \div 21^{\frac{2}{3}}$ का मान निकालिए।

हल : $21^{\frac{5}{3}} \div 21^{\frac{2}{3}} = 21^{\frac{5}{3}-\frac{2}{3}} = 21^{\frac{3}{3}}$

$= 21$

प्रश्नावली 3.4

1. निम्नलिखित के घातांक रूप लिखिए

   (i) $\sqrt[4]{37}$ (ii) $\sqrt[5]{27}$ (iii) $\sqrt[3]{1000}$

2. मूल रूप में व्यक्त कीजिए

   (i) $5^{\frac{1}{4}}$ (ii) $2^{\frac{3}{6}}$ (iii) $(-215)^{\frac{1}{7}}$

3. मान ज्ञात कीजिए

(i) $32^{\frac{1}{5}}$ (ii) $16^{\frac{-3}{4}}$ (iii) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$

4. सरल कीजिए

(i) $9^{\frac{1}{2}} \times 9^{\frac{3}{2}}$ (ii) $2 \times 9^{\frac{3}{2}} \times 9^{\frac{-1}{2}}$

5. सरल कीजिए

(i) $81^{\frac{1}{3}} \times 576^{\frac{1}{3}}$ (ii) $64^{\frac{-2}{3}} \times 27^{\frac{-2}{3}}$

6. सरल कीजिए

(i) $13^{\frac{4}{3}} \div 13^{\frac{1}{3}}$ (ii) $100^{\frac{3}{2}} \div 100^{\frac{1}{2}}$ (iii) $16^{\frac{3}{2}} \div 16^{\frac{1}{2}}$

7. मान निकालिए

(i) $\left(64^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$ (ii) $\left(11^{\frac{1}{2}}\right)^{4}$ (iii) $\left(5^{10}\right)^{0}$

8. मान निकालिए

(i) $16^{\frac{5}{2}} \div 16^{\frac{1}{2}}$ (ii) $x^{a} \div x^{b}$ (iii) $17^{\frac{2}{3}} \div 17^{\frac{-1}{3}}$

9. मान निकालिए

(i) $(.04)^{\frac{3}{2}}$ (ii) $(.008)^{\frac{2}{3}}$ (iii) $(.0009)^{\frac{-1}{2}}$

10. सरल कीजिए तथा उत्तर को धनात्मक घातांक के रूप में लिखिए

(i) $(x^{-3})^{4}$ (ii) $3x^{\frac{1}{5}} \times 3x^{\frac{-6}{5}}$ (iii) $x^{\frac{2m}{n}} \div x^{\frac{-m}{n}}$