अध्याय

4

# दो चरों वाले रैखिक समीकरण
# (Linear Equations in Two Variables)

## 4.01 परिचय

पिछली कक्षाओं में आप एक अज्ञात राशि (चर) वाली समीकरणों का अध्ययन कर चुके हैं। इन समीकरणों में चर की घात एक होती है, वे रैखिक समीकरण कहलाते हैं।

(i) $x+3=8$   (ii) $2y+10=28$

(iii) $4x-7=2x+3$   (iv) $5m=40$

कुछ उदाहरण हैं।

किसी चर का वह मान जिसे समीकरण में प्रयुक्त चर के स्थान पर रखने से समीकरण सन्तुष्ट होता है, अर्थात् समीकरण के वाम पक्ष एवं दक्षिण पक्ष का मान समान हो जाता है, उसी समीकरण का हल कहलाता है। समीकरण के सम्बन्ध में यह भी जान चुके हैं कि

(i) समीकरण के दोनों पक्ष में किसी समान राशि के जोड़ने अथवा घटाने पर समीकरण पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता।

(ii) समीकरण के दोनों पक्ष में समान संख्या का गुणा करने अथवा समान शून्येत्तर संख्या का भाग देने पर समीकरण अप्रभावित रहता हैं।

एक चर वाले रैखिक समीकरण को व्यापक रूप से $ax+b=0$ के द्वारा निरूपित किया जा सकता है, जहाँ $a$ व $b$ वास्तविक संख्याएँ हैं। $a \neq 0$ तथा $x$ चर है। $ax+b=0$ का हल $x=\dfrac{-b}{a}$ होता है। एक चर वाले रैखिक समीकरण का एक अद्वितीय (एक और केवल एक) हल होता है,

इसे समीकरण का मूल कहते हैं।

**दो चर वाले रैखिक समीकरण:**

ऐसे समीकरण जिनमें दो अज्ञात राशि (चर) हों तथा चर की घातांक एक हो, दो चर वाले रैखिक समीकरण कहलाते हैं।

आइए दो चर वाले रैखिक समीकरण के अध्ययन से पूर्व, निर्देशांक पद्धति को समझ लेते हैं।

## 4.02 आयतीय निर्देशांक पद्धतिः

लेखाचित्र की विधि से युगपत् रेखीय समीकरणों का हल ज्ञात करने से पूर्व हम आयतीय निर्देशांक पद्धति (Rectangular Co-ordinate system) की अवधारणा को स्पष्ट करेंगे।

**(क) आयतीय निर्देशांक पद्धति** (Rectangular Co-ordinate system) :

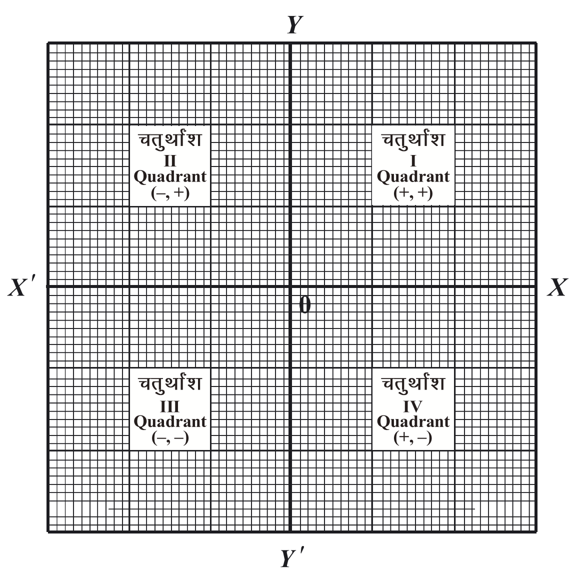
हमने उसका अध्ययन कर लिया है कि वास्तविक संख्याओं को संख्या रेखा (Number line) के बिन्दुओं से सम्बद्ध किया जा सकता है। कभी कभी कोई बिन्दु संख्या रेखा पर न होकर समतल में विद्यमान होता है। इस कारण हम पूर्व के संख्या रेखा से सम्बद्धता के सिद्धान्त का विस्तार करते हुए संख्याओं का समतल के बिन्दुओं से सम्बद्धता के सिद्धान्त का प्रतिपादन करते हैं। इस प्रकार समतल में निर्देशांक पद्धति की अवधारणा स्थापित होती है।

इस हेतु हम दो संख्या रेखाएँ लेते हैं जिसमें एक क्षैतिज (Horizontal) तथा दूसरी उर्ध्वाधर (Vertical) होती है। क्षैतिज रेखा $x$-अक्ष एवं उर्ध्वाधर रेखा $y$-अक्ष कहलाती है तथा उनको क्रमशः $XOX'$ व $YOY'$ से निरूपित करते हैं।

इन अक्षों के प्रतिच्छेद बिन्दु $O$ को मूल बिन्दु (origin) कहते हैं। $x$-अक्ष पर धनात्मक संख्याओं को मूल बिन्दु के दाहिनी और ($OX$ की ओर) तथा ऋणात्मक संख्याओं को मूल बिन्दु के बाँई ओर ($OX'$ की ओर) दर्शाते हैं। इसी प्रकार $y$-अक्ष पर धनात्मक संख्याओं को मूल बिन्दु के ऊपर ($OY$ की ओर) तथा ऋणात्मक संख्याओं को मूल बिन्दु के नीचे की ओर ($OY'$ की ओर) दर्शाते हैं।

**(ख) चतुर्थांश** (Quadrants) :

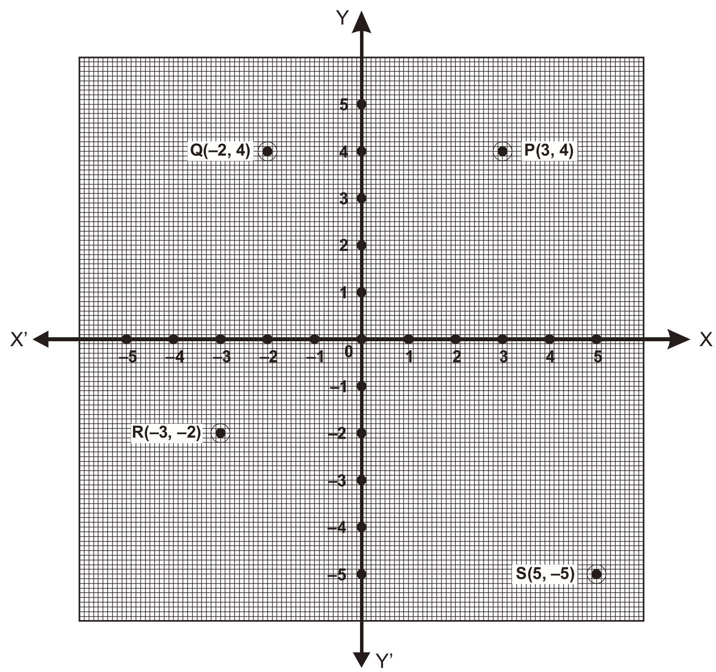
दो अक्ष $XX'$ तथा $YY'$ समतल को चार भागों में विभाजित करते हैं जिन्हें चतुर्थांश या पाद (Quadrants) कहते हैं। इनका क्षेत्र विस्तार असीमित होता है। $XOY, YOX', X'OY'$ तथा $Y'OX$ क्रमशः प्रथम, द्वितीय, तृतीय एवं चतुर्थ पाद या चतुर्थांश कहलाते हैं।




चित्र 4.01

**(ग) बिन्दु का आलेख** (Plotting of Points) :

माना कि एक बिन्दु $P$ प्रथम पाद में है। यदि इस बिन्दु तक पहुँचने के लिए $OX$ की ओर 3 इकाई तथा $OY$ के समान्तर 4 इकाई चलना पड़ता है तब इस बिन्दु को $P(3,4)$ से निरूपित करते हैं। 3, बिन्दु $P$ का $x$-निर्देशांक तथा 4, बिन्दु $P$ का $y$-निर्देशांक कहलाता है। **$x$-निर्देशांक को भुज (abscissa) तथा $y$-निर्देशांक को कोटि (ordinate) भी कहते हैं।** इस प्रकार समतल के प्रत्येक बिन्दु $(x,y)$ के संगत एक भुज $x$ तथा एक कोटि $y$ होती है। किसी बिन्दु का भुज तथा कोटि मिलकर उस बिन्दु के निर्देशांक कहलाते हैं। इन्हें क्रमित युग्म $P(x,y)$ से प्रकट करते हैं।




चित्र 4.02

हम बिन्दु $P(3,4)$ पर विचार करें तो ध्यान में आता है कि यह बिन्दु $x$-अक्ष के ऊपर तथा $y$-अक्ष के दाहिनी ओर है अतः इसके भुज तथा कोटि दोनों धनात्मक है इसलिये यह बिन्दु $P$ प्रथम पाद $XOY$ में स्थित होगा।

इसी प्रकार हम देख सकते हैं कि बिन्दुओं $Q, R$ तथा $S$ के संगत क्रमित युग्म के रूप में निर्देशांक क्रमशः $(-2,4), (-3,-2)$ तथा $(5,-5)$ है जो कि चित्र 5.02 में दर्शाये गये हैं।

पुनः यदि हमें बिन्दु $P(3,4)$ का आलेखन करना है तो हम $O$ से दाहिनी ओर ($OX$ की ओर) 3 इकाई चलते हैं फिर यहीं से ऊपर की ओर ($OY$ के समान्तर) 4 इकाई चलते हैं। यहीं $P(3,4)$ की समतल में वास्तविक स्थिति है।

इसी प्रकार बिन्दु $(-2,4)$ का आलेखन करने के लिए $O$ से की $OX'$ ओर 2 इकाई चल कर वहीं से ऊपर की ओर $OY$ के समान्तर 4 इकाई चलकर बिन्दु $(-2,4)$ का आलेखन कर देते हैं।

इसी प्रकार बिन्दुओं $(-3,-2)$ तथा $(5,-5)$ का भी आलेखन किया जा सकता है।

**टिप्पणी**

1. $x$-अक्ष पर प्रत्येक बिन्दु की कोटि शून्य होती है।
2. $y$-अक्ष पर प्रत्येक बिन्दु का भुज शून्य होता है।
3. मूल बिन्दु $O$ के निर्देशांक $(0,0)$ होते हैं।

## 4.03 दो चरों की रैखिक समीकरण आलेखन

## (Graph of Linear equation in two variables)

$x+y=9$ एक उदाहरण है।

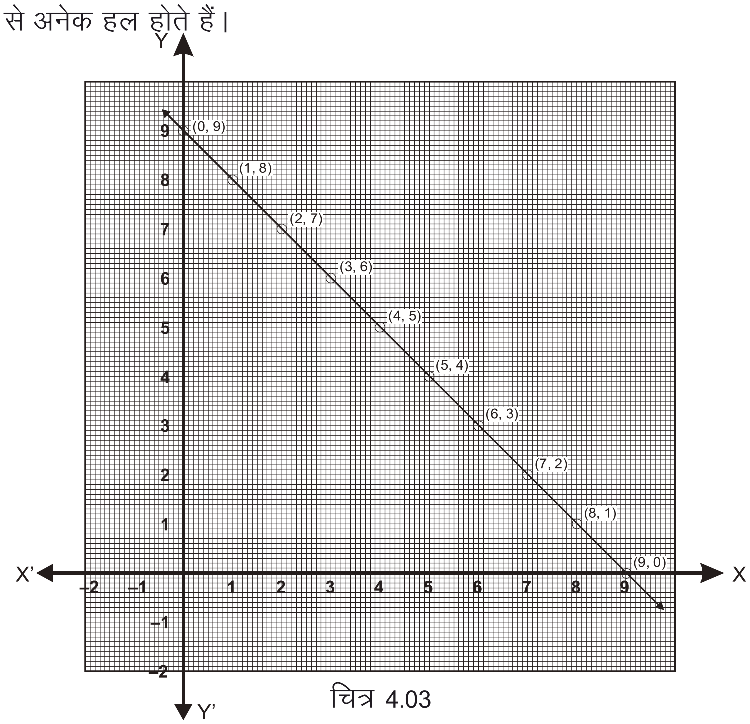
समीकरण का हल $x$ तथा $y$ के वे मान हैं जिन्हें चरों के स्थान पर रखने पर समीकरण सन्तुष्ट होता है। देखते हैं कि समीकरण में $x$ तथा $y$ के अनेको मानों का युग्म समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं। इन मानों को सारणी में रखें

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $y$ | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 |

समीकरण के ये कुछ हल हैं। परन्तु ऐसे हल और भी प्राप्त हो सकते हैं। $x$ तथा $y$ के अपरिमित मानों का युग्म समीकरण को सन्तुष्ट करता है।

कार्तीय तल में चर $x$ के मान को $x$- अक्ष पर तथा $y$ के मान को $y$- अक्ष पर ले, इन हलों को बिन्दु के निर्देशांक $(x, y)$ रूप में आलेखित कर सकते हैं। इन बिन्दुओं का आलेखन कर उनको मिलाने पर समीकरण का आलेख प्राप्त होता है। आलेख एक सरल रेखा है। समीकरण के हल उस रेखा पर आलेखित है तथा आलेख के अनुसार रेखा पर स्थित प्रत्येक बिन्दु समीकरण का हल होता है।

किसी रेखा का निर्माण अपरिमित बिन्दुओं की सतत् शृंखला है। अतः कह सकते हैं कि समीकरण के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं।




चित्र 4.03

**टिप्पणीः**

1. दो चरों वाले रैखिक समीकरण का आलेख (graph) सदैव एक सरल रेखा होती है।
2. यदि कोई बिन्दु रैखिक समीकरण के आलेख पर स्थित है तो उस बिन्दु के निर्देशांक समीकरण को सन्तुष्ट करेंगे।
3. यदि कोई बिन्दु रैखिक समीकरण के आलेख पर स्थित नहीं है, तो उसके निर्देशांक समीकरण को सन्तुष्ट नहीं करेंगे।

दो चरों वाले रैखिक समीकरण के आलेख हेतु उसके दो बिन्दुओं का आलेखन ही पर्याप्त होता है। परन्तु आलेखन शुद्धता एवं सत्यता के लिए कम–से–कम तीन बिन्दुओं का आलेखन करना चाहिए।

**उदाहरण 1** : समीकरण $3x + y = 2$ को आलेखित कीजिए।

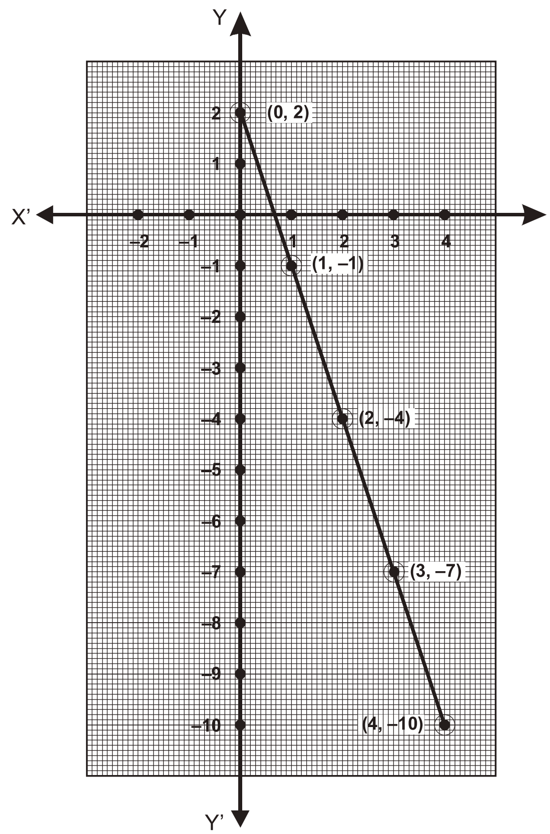
**हल** : दिया गया समीकरण है।

$$3x + y = 2$$

या $\quad y = 2 - 3x$

समीकरण को सन्तुष्ट करने वाले $x$ तथा $y$ के मानों को एक सारणी में लिखते हैं।

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | –1 | –4 | –7 | –10 |




चित्र 4.04

समीकरण के आलेखन से यह निश्चित है कि आलेखित सरल रेखा का प्रत्येक बिन्दु समीकरण का हल होता है। यदि दो चर वाले एक से अधिक समीकरण एक ही वर्गांकित कागज पर आलेखित किए जाए तो निम्न स्थितियाँ प्राप्त हो सकती हैं

(i) दो समीकरणों के आलेखों द्वारा प्राप्त सरल रेखाएँ एक दूसरे को किसी बिन्दु पर प्रतिच्छेद करें।

(ii) दो समीकरणों के आलेख द्वारा प्राप्त सरल रेखाएँ समान्तर हों, तथा परस्पर कभी प्रतिच्छेद न करें।

(iii) दोनों सरल रेखाएँ संपाती हों।

प्रथम स्थिति में दोनों सरल रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु दोनों रेखाओं पर स्थित होने के कारण वेनो समीकरणों के हल को दर्शाता है। अतः उस बिन्दु के निर्देशांक दोनों समीकरणों के हल को दर्शाता है।अतः उस बिन्दु के निर्देशांक दोनों समीकरणों को सन्तुष्ट करेंगे।

दो चरों वाले रैखिक समीकरण का निश्चित हल प्राप्त करने हेतु दो समीकरण अपेक्षित हैं। दो चरों वाले ऐसे दो समीकरण एक निकाय के रूप में युगपत समीकरण कहलाते हैं।

युगपत समीकरणों का आलेख द्वारा हलः

## दृष्टान्तीय उदाहरण

**उदाहरण 2 :** निम्न समीकरणों का आलेख विधि से हल कीजिए।

$x+y=3 \qquad 3x-2y=4$

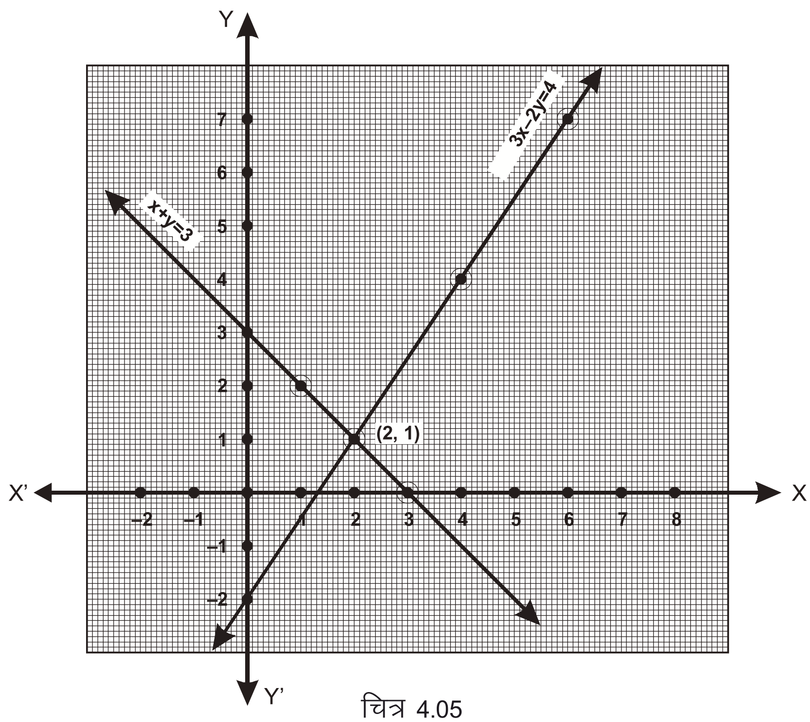
**हल :** दिए गए समीकरणों के सम्भावित हलों को ज्ञात कर पृथक–पृथक सारणी का निर्माण करते हैं।

$x+y=3$ ...(1)

या $x=3-y$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 2 | 3 |
| $y$ | 2 | 1 | 0 |

$3x-2y=4$ या $x=\dfrac{4+2y}{3}$ ...(2)




चित्र 4.05

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | 2 | 4 | 6 |
| $y$ | 1 | 4 | 7 |

दोनों समीकरणों को आलेखित करने पर प्राप्त सरल रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं तथा प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक $(2, 1)$ समीकरण का हल है। अतः समीकरणों का हल $x=2,\ y=1$

**उदाहरण 3:** निम्न समीकरणों का आलेख विधि से हल ज्ञात कीजिए।

$\mathbf{2x+3y=13\ ;\quad 5x-2y=4}$

**हल** : दिया गया समीकरण निकाय है

$$2x+3y=13 \qquad \ldots(1)$$

$$5x-2y=4 \qquad \ldots(2)$$

चूँकि दो समीकरण $x$ तथा $y$ की प्रथम घात में हैं। अतः इनके आलेख(graph) सरल रेखाएँ होगी।

अब समीकरण $2x+3y=13$ या $y=\dfrac{13-2x}{3}$

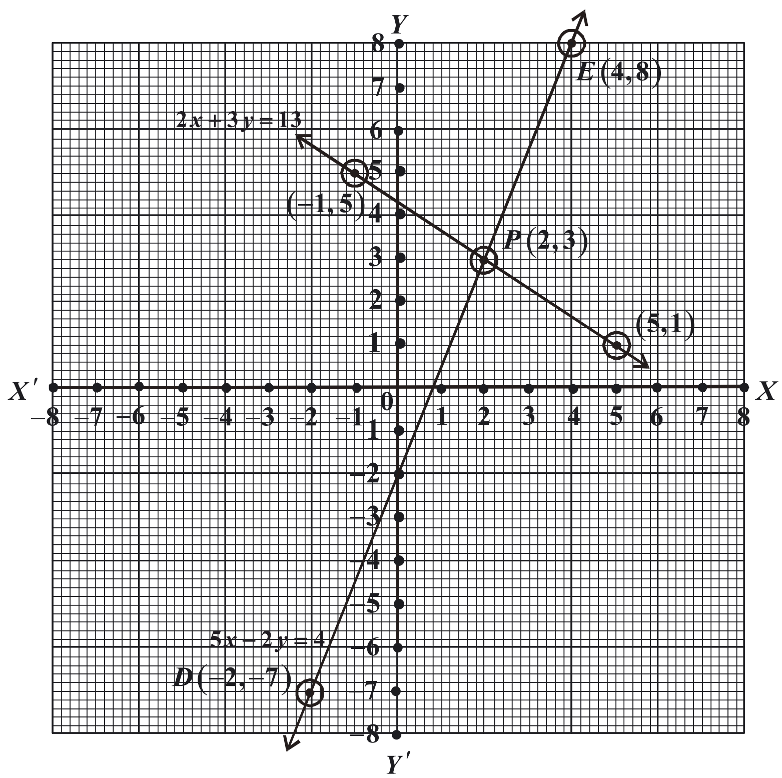
$(x,y)$ के विभिन्न मानों से निम्न सारणी प्राप्त होती है।

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | $-1$ | 2 | 5 |
| $y$ | 5 | 3 | 1 |

इसी प्रकार समीकरण $5x-2y=4$ या $y=\dfrac{5x-4}{2}$ से $(x,y)$ के मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है।

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | $-2$ | 4 | 2 |
| $y$ | $-7$ | 8 | 3 |

अब बिन्दुओं $(-1,5),(2,3)$ तथा $(5,1)$ का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $2x+3y=13$ का आलेख तथा $(-2,-7),(4,8)$ तथा $(2,3)$ के आलेखन से समीकरण $5x-2y=4$ का आलेख प्राप्त होता है।




चित्र 4.06

ये आलेख (सरल रेखाएं) बिन्दु $P$ पर प्रतिच्छेदित होते हैं, जिसके कि निर्देशांक $(2,3)$ है।

अतः $x=2, y=3$ दिये गये समीकरण निकाय के अद्वितीय हल है।

**उदाहरण 4**: आलेखीय विधि से निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$\mathbf{2x-6y+10=0\,;\,3x-9y+15=0}$$

**हल** : दिया गया समीकरण निकाय है

$$2x-6y+10=0 \qquad ...(1)$$

$$3x-9y+15=0 \qquad ...(2)$$

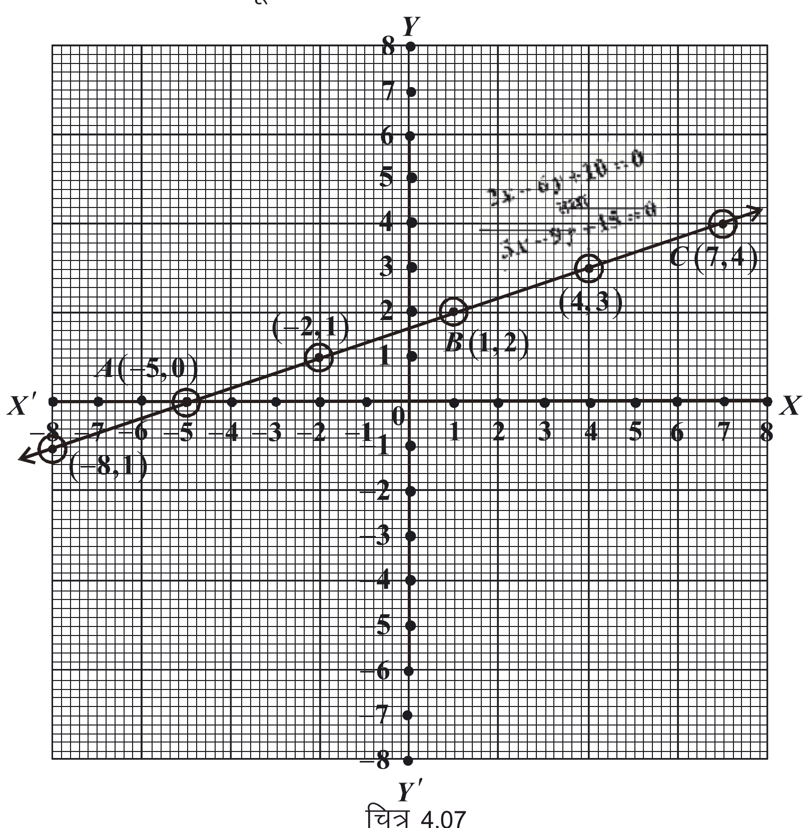
$2x-6y+10=0$ के लिए सारणी

| $x$ | 1 | $-5$ | 7 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | 0 | 4 |

$3x-9y+15=0$ के लिए सारणी

| $x$ | 4 | $-2$ | $-8$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | 3 | 1 | $-1$ |

अब बिन्दुओं $(1,2),(-5,0)$ तथा $(7,4)$ को आलेखित कर मुक्त हस्त (Free hand) से मिलाने पर $2x-6y+10=0$ का आलेख सरल रेखा $AB$ प्राप्त होती है। पुनः बिन्दुओं $(4,3),(-2,-1)$ तथा $(-8,-1)$ को आलेखित करते है। हम देखते हैं कि ये तीनों बिन्दु रेखा$AB$ पर विद्यमान है। इसलिए दोनों रेखाएं सम्पाती होगी अतः दिया गया निकाय संगत है तथा इसके अनन्त हल होंगे। समीकरण $2x-6y+10=0$ का प्रत्येक हल पूरे निकाय का हल होगा।




चित्र 4.07

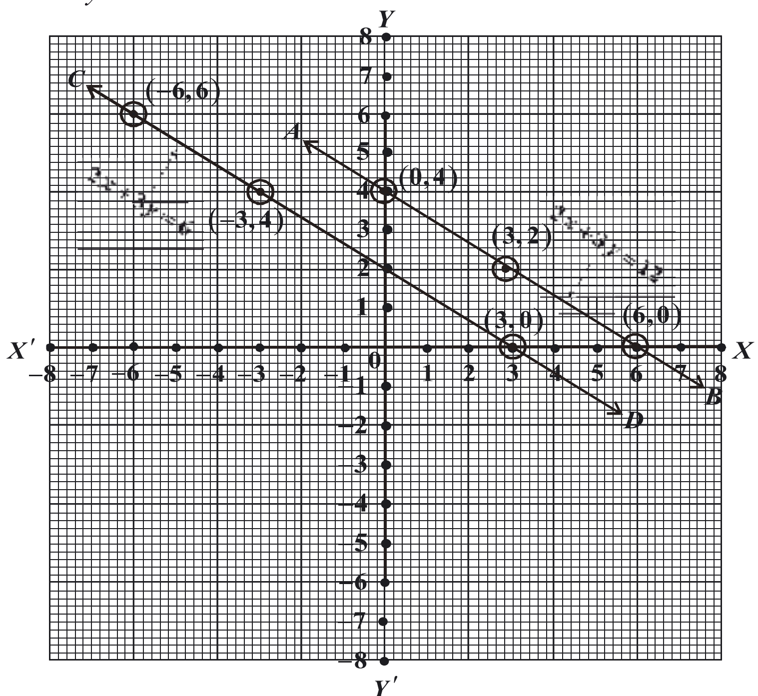
**उदाहरण 5:** निम्न समीकरण निकाय का आलेख विधि से हल ज्ञात कीजिए। निकाय की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

$$\mathbf{2x+3y=12\ ;\ 2x+3y=6}$$

**हल** : हमें निम्न दो रैखिक समीकरण दिये हुए है।

$$2x+3y=12 \quad \ldots (1)$$

$$2x+3y=6 \quad \ldots (2)$$




चित्र 4.08

अब बिन्दुओं $(6,0),(3,2),(0,4)$ का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $2x+3y-12=0$ का आलेख, एक सरल रेखा $AB$ प्राप्त होती है।

पुनः बिन्दुओं $(3,0),(-3,4)$ तथा $(-6,6)$ का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $2x+3y=6$ का आलेख, सरल रेखा $CD$ प्राप्त होती है।

अतः दिये गये समीकरणों के आलेख दो रेखाएं $AB$ तथा $CD$ है जो कि परस्पर समान्तर हैं। इसलिए दिया गया समीकरण निकाय असंगत (Inconsistent) है तथा इसका कोई हल विद्यमान नहीं है।

## प्रश्नमाला 4.1

निम्न समीकरणों को आलेखीय विधि से हल कीजिए:

1. $x+3y=6$, $2x-3y=12$
2. $2x+y=6$, $2x-y+2=0$
3. $x-2y=6$, $3x-6y=0$
4. $x+y=4$, $2x-3y=3$

5. $2x - 3y + 13 = 0$

$3x - 2y + 12 = 0$

6. $3x - 4y = 1; -2x + \frac{8}{3}y = 5$

7. $2x + \frac{y}{2} - 5 = 0; \frac{x}{2} + y = -4$

8. $0 \cdot 3x + 0 \cdot 4y = 3 \cdot 2; 0 \cdot 6x + 0 \cdot 8y = 2 \cdot 4$

9. $2x + 3y = 8; 4x - \frac{3}{2}y = 1$

10. $3x - y = 2; 6x - 2y = 4$

11. $3x + 2y = 0; 2x + y = -1$

## 4.04 युगपत समीकरणों का बीजीय हल

### (Al gebraic methods of solving simultaneous linear equation)

युगपत समीकरण दो चरों वाले रैखिक समीकरणों के जोड़े का एक निकाय है। दोनों चरों के वे मान जो दोनों समीकरणों को सन्तुष्ट करते हैं, युगपत समीकरण का हल कहलाते हैं।

दो चरों वाले समीकरणों के युगपत समीकरण निकाय हल करने की निम्न बीजीय विधियाँ हैं।

(i) विलोपन विधि (प्रतिस्थापन द्वारा)
[Method of elimination (by substitution)]

(ii) विलोपन विधि (गुणांको को समान कर)
[Method of elimination (by equating the co-efficient)]

(iii) व्रज गुणन विधि (व्यापक विधि)
[Method of cross multiplication (General method)]

### (i) विलोपन विधि (प्रतिस्थापन द्वारा)

इस विधि में युगपत समीकरण निकाय के एक समीकरण से एक चर का मान दूसरे चर के रूप में व्यक्त कर लेते हैं। अब दूसरे चर के रूप में लिए गए इस चर के मान को समीकरण निकाय के दूसरे समीकरण में प्रतिस्थापित कर देते हैं। परिणाम स्वरूप दूसरा समीकरण एक चर वाले समीकरण के रूप में परिवर्तित हो जाता है। एक चर वाले समीकरण को हल करके चर का मान ज्ञात कर लेते हैं। अब चर के इस ज्ञात मान को दिए गए समीकरणों में से किसी एक में प्रतिस्थापित कर अन्य चर का मान ज्ञात कर लेते हैं। विधि नीचे दिए गए उदाहरण से स्पष्ट हो जाती है।

**उदाहरण 6:** प्रतिस्थापन विधि द्वारा निम्न समीकरणों के हल ज्ञात कीजिए।

$x + 3y = 11$

$4x - y = 5$

**हल** : दिए गए समीकरण हैं

$x + 3y = 11$ . . . (1)

$4x - y = 5$ . . . (2)

समीकरण (1) से

$$x = 11 - 3y \qquad \ldots (3)$$

समीकरण (3) से $x$ का मान समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर

$$4(11 - 3y) - y = 5$$

या $\quad 44 - 12y - y = 5$

या $\quad 44 - 13y = 5$

या $\quad 13y = 39$

$\therefore \quad y = 3$

$y$ के इस मान को समीकरण (3) में रखने पर

$$x = 11 - 3(3)$$

या $\quad x = 11 - 9$

या $\quad x = 2$

अतः हल है $x = 2,\ y = 3$

(ii) विलोपन विधि (गुणांको को समान बना कर)

इस विधि में समीकरण निकाय के दोनों समीकरणों को ऐसी उपयुक्त संख्याओं से गुणा करते हैं, जिससे प्राप्त हुए दोनों समीकरणों के दो चरों में से एक के गुणांक समान हो जाएं। अब दोनों समीकरणों को स्थिति के अनुसार योग अथवा व्यवकलन करने पर हमें एक समीकरण प्राप्त होता है, जिसमें एक ही चर होता है (क्योंकि अन्य चर निरस्त हो जाता है) प्राप्त एक चर वाले समीकरण को हल कर चर का मान ज्ञात कर लेते हैं तथा चर के ज्ञात मान को दिए गए किसी समीकरण में प्रतिस्थापित करके दूसरे चर का मान भी ज्ञात कर लेते हैं।

**उदाहरण 7** : गुणांको को समान कर विलोपन विधि से निम्न समीकरणों का हल ज्ञात कीजिए

$$4x + 5y = 31$$

$$7x - 2y = 22$$

**हल** : दिए गए समीकरण है

$$4x + 5y = 31 \qquad \ldots (1)$$

$$7x - 2y = 22 \qquad \ldots (2)$$

$y$ को विलोपित करने के लिए हम देखते हैं कि समीकरण(1) व (2) में $y$ के गुणांक क्रमशः 5 व 2 हैं। 5 व 2 का ल.स. 10 होता है। अतः दोनों समीकरणों में $y$ के गुणांको को समान अर्थात् 10 बनाने के लिए समीकरण (1) को 2 से तथा समीकरण (2) को 5 गुणा करने पर

$$8x + 10y = 62 \qquad \ldots (3)$$

$$35x - 10y = 110 \qquad \ldots (4)$$

समीकरण (3) व (4) को जोड़ने पर

$$43x = 172 \quad \text{या} \quad x = \frac{172}{43}$$

$\therefore \quad x = 4$

$x$ के इस मान को समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$$4(4) + 5y = 31 \quad \text{या} \quad 16 + 5y = 31$$

या $\quad 5y = 31 - 16 \quad$ या $\quad y = \frac{15}{5}$

$\therefore \quad y = 3$

अतः दिए गए समीकरणों का हल है

$$x = 4,\ y = 3$$

इसी विधि से हम चरों के व्युत्क्रमों से बने समीकरणों का भी हल प्राप्त कर सकते हैं। **विधि नीचे दिए गए उदाहरण से स्पष्ट हो जाती है।**

**उदाहरण 8** : समीकरण $\frac{20}{x} + \frac{2}{y} = 6,\ \frac{10}{x} - \frac{1}{y} = 2$ के हल ज्ञात कीजिए।

**हल** : दिए गए समीकरण हैं

$$\frac{20}{x} + \frac{2}{y} = 6 \qquad \ldots(1)$$

$$\frac{10}{x} - \frac{1}{y} = 2 \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (2) को 2 से गुणा करने पर

$$\frac{20}{x} - \frac{2}{y} = 4 \qquad \ldots(3)$$

समीकरण (1) व (3) को जोड़ने पर

$$\frac{40}{x} = 10 \quad \text{या} \quad x = \frac{40}{10}$$

या $\quad x = 4$

$x$ का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{20}{4} + \frac{2}{y} = 6 \quad \text{या} \quad 5 + \frac{2}{y} = 6$$

या $\frac{2}{y} = 6 - 5$ या $\frac{2}{y} = 1$

या $y = 2$

अतः समीकरण के हल हैं, $x = 4,\ y = 2$

**उदाहरण 9** : समीकरण $5x + 6y = 3xy,\ \ 10x + 9y = 5xy$ का हल ज्ञात कीजिए।

**हल** : दिए गए समीकरण है

$$5x + 6y = 3xy \qquad \ldots(1)$$

$$10x + 9y = 5xy \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (1) व (2) में $xy$ का भाग देने पर

$$\frac{5}{y} + \frac{6}{x} = 3 \qquad \ldots(3)$$

$$\frac{10}{y} + \frac{9}{x} = 5 \qquad \ldots(4)$$

अब $\frac{1}{x} = m$ तथा $\frac{1}{y} = n$ मानने पर समीकरण (3) व (4) इस रूप में लिखे जा सकते हैं।

$$5n + 6m = 3 \qquad \ldots(5)$$

$$10n + 9m = 5 \qquad \ldots(6)$$

समीकरण (5) को 2 से गुणा करने पर

$$10n + 12m = 6 \qquad \ldots(7)$$

समीकरण (7) में से समीकरण (6) घटाने पर

$3m = 1$ या $m = \frac{1}{3}$

$m$ का मान समीकरण (6) में रखने पर

$$10n + 9\left(\frac{1}{3}\right) = 5$$

या $10n + 3 = 5$ या $10n = 5 - 3$

या $10n = 2$ या $n = \frac{2}{10}$

या $n = \frac{1}{5}$

अब $m = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 3$ तथा $n = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \Rightarrow y = 5$

अतः समीकरण के हल है $x = 3,\ y = 5$

## प्रश्नमाला 4.2

निम्न समीकरणों को विलोपन विधि (प्रतिस्थापन) द्वारा हल कीजिए (प्रश्न 1 से 6)

1. $2x + 3y = 9$
   $3x + 4y = 5$

2. $x + 2y = -1$
   $2x - 3y = 12$

3. $3x + 2y = 11$
   $2x + 3y = 4$

4. $8x + 5y = 9$
   $3x + 2y = 4$

5. $4x - 5y = 39$
   $2x - 7y = 51$

6. $5x - 2y = 19$
   $3x + y = 18$

गुणांकों को समान बना कर विलोपन विधि द्वारा निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए (प्रश्न 7 से 12)

7. $2x + y = 13$
   $5x - 3y = 16$

8. $0.4x + 0.3y = 1.7$
   $0.7x - 0.2y = 0.8$

9. $\frac{x}{7} + \frac{y}{3} = 5$
   $\frac{x}{2} - \frac{y}{9} = 6$

10. $11x + 15y = -23$
    $7x - 2y = 20$

11. $3x - 7y + 10 = 0$
    $y - 2x = 3$

12. $x + 2y = \frac{3}{2}$
    $2x + y = \frac{3}{2}$

समीकरण हल कीजिए (प्रश्न 13 से 15)

13. $8v - 3u = 5uv$
    $6v - 5u = -2uv$

14. $\frac{1}{2x} - \frac{1}{y} = -1$
    $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = 8$

15. $\frac{5}{(x+y)} - \frac{2}{(x-y)} = -1$
    $\frac{15}{(x+y)} + \frac{7}{(x-y)} = 10$

**वज्र–गुणन विधि**

युगपत समीकरणों को हल करने के लिए वज्र गुणन विधि एक व्यापक विधि है। यहाँ हम नीचे दिए गए समीकरणों को हल करने की विधि स्पष्ट कर रहे हैं।

माना दिए गए समीकरण हैः

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad \ldots(1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (1) को $b_2$ से तथा समीकरण (2) को $b_1$ से गुणा करने पर

$$a_1b_2x + b_1b_2y + b_2c_1 = 0 \qquad \ldots(3)$$

तथा $$a_2b_1x + b_1b_2y + b_1c_2 = 0 \qquad \ldots(4)$$

समीकरण (3) में से समीकरण (4) को घटाने पर

$$\left(a_1b_2 - a_2b_1\right)x + b_2c_1 - b_1c_2 = 0$$

या $$\left(a_1b_2 - a_2b_1\right)x = b_1c_2 - b_2c_1 \qquad \ldots(5)$$

इसी प्रकार समीकरण (1) को $a_2$ से तथा समीकरण (2) को $a_1$ से गुणा करने पर

$$a_1b_2x + a_2b_1y + c_1a_2 = 0 \qquad \ldots(6)$$

$$a_1a_2x + a_1b_2y + c_2a_1 = 0 \qquad \ldots(7)$$

समीकरण (6) में से समीकरण (7) को घटाने पर

$$\left(a_2b_1 - a_1b_2\right)y + c_1a_2 - c_2a_1 = 0$$

या $$\left(a_2b_1 - a_1b_2\right)y = -c_1a_2 + c_2a_1$$

या $$y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad \ldots(8)$$

समीकरण (5) से

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad \ldots(9)$$

उपर्युक्त समीकरण हल को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

इस परिणाम को निम्न रचना के माध्यम से दर्शा सकते है जिससे समीकरणों के हल को सुगमता से स्मरण कर सकें।

$$\frac{x}{\begin{matrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{matrix}} = \frac{y}{\begin{matrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{matrix}} = \frac{x}{\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}}$$

रचना में तीर के निशान का अर्थ दो संख्याओं के गुणा को दर्शाना है। पहले नीचे की ओर गुणा करना है फिर इसमें से ऊपर की ओर गुणा कर गुणन फल घटाना है।

वज्र गुणा के प्रकार के कारण यह वज्र गुणन विधि कहलाती है। इस विधि का प्रयोग करने से पूर्व समीकरणों के सभी पदों को पहले वाम पक्ष में लेकर दक्षिण पक्ष को शून्य बना देते हैं।

प्रथम समीकरण एवं द्वितीय समीकरण में प्रथम चर के गुणांक क्रमशः $a_1, a_2$ द्वितीय चर के गुणांक $b_1, b_2$ तथा स्वतंत्र अंक $c_1, c_2$ से प्रदर्शित करते हैं।

## 4.05 साधनीयता के लिए प्रतिबन्ध (Condition for solvability)

यदि समीकरण निकाय $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ हो तो संगत चरों के गुणांकों का अनुपात देखने पर निम्न स्थिति के अनुसार निर्णय किया जाता है।

(i) प्रथम स्थितिः

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

निकाय संगत है तथा हल अद्बितीय होते हैं।

(ii) द्वितीय स्थितिः

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

निकाय असंगत है तथा इसके कोई हल नहीं होते।

(iii) तृतीय स्थिति

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

समीकरण निकाय संगत, इसके अनन्त हल होते हैं।

**उदाहरण 10** : दिए गए समीकरणों का हल वज्र गुणन विधि से कीजिए।

$$2x + 3y - 17 = 0$$

$$3x - 2y - 6 = 0$$

**हल** : वज्र–गुणन विधि से हल

$$\frac{x}{\begin{matrix} 3 & -17 \\ -2 & -6 \end{matrix}} = \frac{y}{\begin{matrix} -17 & 2 \\ -6 & 3 \end{matrix}} = \frac{1}{\begin{matrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{matrix}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{(3)(-6)-(-2)(-17)} = \frac{y}{(-17)(3)-(-6)(2)} = \frac{1}{(2)(-2)-(3)(3)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{-18-34} = \frac{y}{-51+12} = \frac{1}{-4-9}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{-52} = \frac{y}{-39} = \frac{1}{-13}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-52}{-13} \text{ तथा } y = \frac{-39}{-13}$$

$$\Rightarrow \quad x = 4 \text{ तथा } y = 3$$

अतः समीकरण के हल हैं $x = 4,\ y = 3$

**उदाहरण 11** : दिए गए समीकरण निकाय की संगतता की जाँच कीजिए। यदि निकाय संगत है तो हल ज्ञात कीजिए।

$$2x + 3y = 7$$

$$6x + 9y = 15$$

**हल** : दिए गए समीकरण हैं

$$2x + 3y = 7$$

$$6x + 9y = 15$$

समीकरण के सभी पदों को वाम पक्ष में लेने पर

$$2x + 3y - 7 = 0$$

तथा $6x + 9y - 15 = 0$

यहाँ $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{-7}{-15} = \frac{7}{15}$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$

अतः दिया गया समीकरण निकाय असंगत है तथा इसके कोई हल नहीं है।

## प्रश्नमाला 4.3

निम्नलिखित समीकरणों के बारे में जाँच कीजिए कि समीकरण निकाय के अद्वितीय हल है, कोई हल नहीं है या अपरिमित हल हैं। यदि किसी निकाय के अद्वितीय हल हैं तो उन्हें ज्ञात कीजिए।

1. $2x + y = 35$, $3x + 4y = 65$
2. $2x - y = 6$, $x - y = 2$
3. $3x + 2y + 25 = 0$, $2x + y + 10 = 0$
4. $x + 2y + 1 = 0$, $2x - 3y - 12 = 0$
5. K का मान ज्ञात कीजिए यदि समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है

   (i) $2x + ky = 1$, $3x - 5y = 7$

   (ii) $kx + 2y = 5$, $3x + y = 1$
6. समीकरण निकाय का हल ज्ञात कीजिएः $mx - ny = m^2 + n^2$, $x + y = 2m$
7. $\lambda$ के वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए निकाय

   $3x + \lambda y + 1 = 0$, $2x + y - 9 = 0$

   के (i) अद्वितीय हल (ii) कोई हल नहीं

## 4.06 दो चरों वाले रैखिक समीकरणों के अनुप्रयोग

### (Application of linear equations in two variables)

दो चरों वाले रैखिक समीकरणों (युगपत समीकरण निकाय) की सहायता से हम कुछ व्यवहारिक समस्याओं को हल कर सकते हैं। इसके लिए निम्न प्रकार से कार्य करते हैः

(i) समस्या में उपस्थित अज्ञात राशियों के लिए चरों (अक्षरों) को प्रयुक्त करते हैं।

(ii) समस्या में शब्दों के रूप में दिए गए प्रतिबन्धों को चरों का उपयोग कर समीकरणों में परिवर्तित करते हैं।

(iii) इन समीकरणों को यथोचित विधि द्वारा हल करके चरों का मान प्राप्त कर लेते हैं।

**उदाहरण 12 :** एक कक्षा के 10 विद्यार्थियों ने निबन्ध प्रतियोगिता में भाग लिया। यदि प्रतियोगियों में लड़कों की संख्या लड़कियों की संख्या से 4 अधिक हो तो लड़के और लड़कियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

**हल :** माना प्रतियोगिता में भाग लेने वाले लड़को की संख्या $x$ तथा लड़कियों की संख्या $y$ है।

यह दिया हुआ है कि कुल विद्यार्थियों की संख्या 10 है।

अर्थात् लड़कों की संख्या + लड़कियों की संख्या = 10

$$x + y = 10$$

यह भी दिया है, कि लड़कों की संख्या लड़कियों की संख्या से 4 अधिक है।

अतः लड़कों की संख्या − लड़कियों की संख्या = 4

$$x - y = 4$$

दी हुई स्थिति के अनुसार समीकरण

$$x + y = 10 \qquad \ldots(1)$$

$$x - y = 4 \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर

$$2x = 14$$

या $\quad x = 7$

$x$ का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$7 + y = 10$$

या $\quad y = 10 - 7$

या $\quad y = 3$

$x = 7,\ y = 3$ अतः लड़कों की संख्या 7 तथा लड़कियों की संख्या 3 है।

**उदाहरण 13** : दो व्यक्तियों के वेतन का अनुपात 9 : 7 है तथा उनके व्यय का अनुपात 4 : 3 है यदि प्रत्येक व्यक्ति 2000 रुपए प्रतिमाह की बचत करता है, तो उनकी मासिक वेतन ज्ञात कीजिए।

**हल** : माना पहले व्यक्ति का वेतन $x$ रुपए तथा दूसरे व्यक्ति का वेतन $y$ रुपए है

प्रश्नानुसार उनके वेतन का अनुपात $x : y = 9 : 7$

$$\frac{x}{y} = \frac{9}{7}$$

या $\quad 7x = 9y$

या $\quad 7x - 9y = 0 \qquad \ldots(1)$

दोनों व्यक्ति प्रतिमाह 2000 रुपए बचाते हैं।

उनका प्रतिमाह व्यय क्रमशः $x - 2000$ तथा $y - 2000$ है।

दिया हुआ है कि उनके व्यय का अनुपात 4 : 3 है

$$\therefore \quad (x - 2000) : (y - 2000) = 4 : 3$$

$$\frac{(x - 2000)}{(y - 2000)} = \frac{4}{3}$$

या $\quad 3(x - 2000) = 4(y - 2000)$

या $\quad 3x - 6000 = 4y - 8000$

या $\quad 3x - 4y + 2000 = 0 \qquad \ldots(2)$

समीकरण (1) से $x$ का मान $y$ के रूप में लिखने पर

$$x = \frac{9y}{7}$$

$x$ के इस मान को समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर

$$3\left(\frac{9y}{7}\right) - 4y + 2000 = 0$$

या $\frac{27y}{7} - 4y + 2000 = 0$

या $27y - 28y + 14000 = 0$

या $-y = -14000$

या $y = 14000$

$y$ का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$7x - 9(14000) = 0$$

या $7x = 126000$

या $x = 18000$

अतः उनका वेतन 18000 रुपए एवं 14000 रुपए है।

**उदाहरण 14** : दो अंको की एक संख्या के अंको का योग 12 है। यदि संख्या में से 18 घटा दिए जाए तो संख्या के अंको का स्थान परस्पर बदल जाता है। संख्या ज्ञात कीजिए।

**हल** : माना संख्या का इकाई का अंक $x$ तथा दहाई का अंक $y$ है।

अतः संख्या $x + 10y$ है।

प्रश्नानुसार संख्या में से 18 घटाने पर संख्या के अंको का स्थान परस्पर बदल जाता है। अर्थात् $x$ दहाई के स्थान पर तथा $y$ इकाई के स्थान पर हो जाता है।

अतः नई प्राप्त संख्या $10x + y$ है

समस्या को समीकरण रूप में लिखने पर प्रश्नानुसार संख्या के अंको का योग 12 है

अतः $x + y = 12$ ...(1)

तथा $x + 10y - 18 = 10x + y$

या $9x - 9y = -18$

या $x - y = -2$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर

$$2x = 10$$

या $x = 5$

$x$ का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$5 + y = 12$$

या $y = 12 - 5$

या $y = 7$

अतः संख्या 75 है।

## प्रश्नमाला 4.4

निम्नलिखित समस्याओं का हल ज्ञात कीजिए:

1. दो अंको की एक संख्या में इकाई का अंक दहाई के अंक का 3 गुना है। संख्या के 2 गुने में 10 जोड़ने पर प्राप्त नई संख्या में अंक परस्पर अपना स्थान बदल लेते है। संख्या ज्ञात कीजिए।
2. एक आयत का परिमाप 56 सेमी है। उसकी लम्बाई तथा चौड़ाई का अनुपात 4 : 3 है। आयत की लम्बाई एवं चौड़ाई ज्ञात कीजिए।
3. दो संख्याओं का अनुपात 3 : 4 है। यदि प्रत्येक संख्या में से 5 घटा दिया जाए, तो उनका अनुपात 5 : 7 हो जाता है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
4. पिता की आयु अपने पुत्र की आयु के 6 गुना से 5 वर्ष अधिक है। 7 वर्ष पश्चात पिता की आयु पुत्र की आयु के 3 गुना से 3 अधिक होगी। दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।
5. राम ने श्याम से कहा कि "तुम मुझे अपने पास से 100 रुपए दे दो तो, मेरे पास तुमसे 2 गुना रुपए हो जाएंगे। तब श्याम ने राम से कहा कि "तुम यदि अपने पास से मुझे 10 रुपए दे दो तो मेरे पास तुमसे 6 गुना रुपए हो जाएंगे।" ज्ञात कीजिए कि दोनों के पास कितने–कितने रुपए हैं?
6. 4 कुर्सियो और 3 मेजों का मूल्य 2100 रुपए हैं तथा 5 कुर्सियों और 2 मेजों का मूल्य 1750 रुपए है, तो एक कुर्सी तथा एक मेज का मूल्य ज्ञात कीजिए।
7. दो संख्याएं इस प्रकार की है, कि बड़ी संख्या के 3 गुने में छोटी संख्या का भाग दिया जाता है, तो भागफल 4 तथा शेषफल 3 प्राप्त होता है और जब छोटी संख्या के 7 गुने में बड़ी संख्या का भाग दिया जाता है, तो भागफल 5 तथा शेषफल 1 प्राप्त होता है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
8. दो अंको की संख्या अपने अंको के योग की 4 गुनी तथा अंको के गुणनफल की 2 गुनी है। संख्या ज्ञात कीजिए।
9. एक भिन्न के अंश तथा हर में 1 जोड़ने पर वह $\frac{4}{5}$ बन जाती है, जब कि अंश व हर दोनों में से 5 घटाते है तो वह $\frac{1}{2}$ हो जाती है। भिन्न ज्ञात कीजिए।
10. 5 वर्ष पूर्व गीता की आयु कमला की आयु की 3 गुना थी। 10 वर्ष बाद गीता की आयु कमला की आयु की 2 गुना होगी। दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।
11. एक व्यक्ति 370 किमी की यात्रा में सें कुछ दूरी रेल द्वारा तथा कुछ दूरी कार द्वारा तय करता है। यदि वह 250 किमी रेल द्वारा तथा शेष दूरी कार द्वारा तय करता है, तो उसे 4 घण्टे लगते है। परन्तु जब वह 130 किमी रेल द्वारा तथा शेष दूरी कार द्वारा तय करता है तो उसे 18 मिनट अधिक लगते है। रेल तथा कार की चाल ज्ञात कीजिए।

## महत्वपूर्ण बिन्दु

1. दो चरों वाला रैखिक समीकरण $ax+by+c=0$ रूप वाला होता है, जहाँ $a, b, c$ वास्तविक संख्याएँ होती है तथा $a \neq 0, b \neq 0$.
2. दो चरों वाले एक रैखिक समीकरण के अनन्त हल होते हैं।
3. दो रैखिक समीकरणों के निकाय $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x+b_2y+c_2=0$ की प्रकृति निम्न प्रकार की होती है :

   (क) संगत तथा अद्वितीय हल, यदि $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

   (ख) संगत तथा अनन्त हल, यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

   (ग) असंगत तथा कोई हल नहीं, यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$
4. यदि $x$ तथा $y$ किसी दो अंकों वाली संख्या के क्रमशः इकाई तथा दहाई के अंक हों तो संख्या $10y+x$ होती है

## विविध प्रश्नमाला 4

सही उतर को चुनिए : [ प्रश्न 1 से 10 ]

1. यदि $y=2x-3$ तथा $y=5$ हो तो $x$ का मान होगा :

   (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 [ ]
2. यदि $2x+y=6$ हो तो इसको संतुष्ट करने वाला युग्म है :

   (A) (1, 2) (B) (2, 1) (C) (2, 2) (D) (1, 1) [ ]
3. यदि $\frac{4}{x}+5y=7$ तथा $x=-\frac{4}{3}$ हो तो $y$ का मान होगा :

   (A) $\frac{37}{15}$ (B) 2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$ [ ]
4. यदि $\frac{3}{x}+4y=5$ तथा $y=1$ हो तो $x$ का मान होगा :

   (A) 3 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $-3$ (D) $-\frac{1}{3}$ [ ]
5. यदि $x=1$ हो तो समीकरण $\frac{4}{x}+\frac{3}{y}=5$ में $y$ का मान है :

   (A) 1 (B) $\frac{1}{3}$ (C) 3 (D) $-3$ [ ]
6. यदि किसी संख्या के इकाई तथा दहाई के स्थान पर अंक क्रमशः $y$ तथा $x$ हों तो संख्या होगी :

   (A) $10x+y$ (B) $10y+x$ (C) $x+y$ (D) $xy$ [ ]
7. एक लड़के की आयु अभी अपनी माता की आयु की एक तिहाई है। यदि माता की वर्तमान आयु $x$ वर्ष है तो 12 वर्ष पश्चात् लड़के की आयु होगी :

   (A) $\frac{x}{3}+12$ (B) $\frac{x+12}{3}$ (C) $x+4$ (D) $\frac{x}{3}-12$ [ ]

8. $x$- अक्ष पर बिन्दु है –

(A) $(2,3)$ (B) $(2,0)$ (C) $(0,2)$ (D) $(2,2)$ [ ]

9. मूल बिन्दु के निर्देशांक है :

(A) $(0,0)$ (B) $(0,1)$ (C) $(1,0)$ (D) $(1,1)$ [ ]

10. बिन्दु $(3,-4)$ किस पाद में विद्यमान है –

(A) प्रथम (B) द्वितीय (C) तृतीय (D) चतुर्थ [ ]

11. समीकरण $5y-3x-10=0$ में $y$ को $x$ के रूप में व्यक्त कीजिए। वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जहाँ समीकरण $5y-3x-10=0$ द्वारा निरुपित रेखा $y$- अक्ष को काटती है।

12. $x$ के मान $x=-2$ से $x=2$ तक एवं इनके के मध्य लेते हुए समीकरण $y=2x+1$ के मानों से सारणी का निर्माण कीजिए तथा उक्त समीकरण का आलेख खींचिये।

13. निम्न युगपत् समकरणों का हल ज्ञात कीजिए :

$0\cdot5x+0\cdot6y=2\cdot3;\ 0\cdot2x+0\cdot7y=2\cdot3$

14. समीकरण निकाय $2x+3y=9\,;3x+4y=5$ का हल ज्ञात कीजिए।

15. समीकरण निकाय $\frac{1}{2x}-\frac{1}{y}=-1;\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}=8;x\neq0,y\neq0$ का हल ज्ञात कीजिए।

16. दो संख्याएँ इस प्रकार की हैं कि यदि छोटी संख्या में 7 जोड़ दिया जाय तो योग बड़ी संख्या से दुगुना हो जाता है तथा यदि बड़ी संख्या में 4 जोड दिया जाय तो योग छोटी संख्या से तिगुना हो जाता है। दोनों संख्याओं को ज्ञात कीजिए।

17. किसी भिन्न का अंश, हर से 4 कम है। यदि अंश में से 2 घटा दिया जाए तथा हर में 1 जोड़ दिया जाए तो हर, अंश का 8 गुणा हो जाता है। भिन्न ज्ञात कीजिए।

18. 5 पुस्तकों तथा 7 कलमों का कुल मूल्य 79 रु. है जबकि 7 पुस्तकों तथा 5 कलमों का कुल मूल्य 77 रु. है। 1 पुस्तक तथा 2 कलमों का कुल मूल्य ज्ञात कीजिए।

19. दो अंकों की एक संख्या इस प्रकार की है कि जब इसे 9 से गुणा किया जाए तो वह उस संख्या की दुगुनी हो जाएगी जो मूल संख्या के अंकों के स्थान परस्पर बदलने से बनती है। यदि संख्या के दोनों अंकों का अंतर 7 हो, तो संख्या ज्ञात कीजिए।

20. एक त्रिभुज में $\angle A=x^\circ,\angle B=3x^\circ$ तथा $\angle C=y^\circ$ है। यदि $5x-3y+30=0$ हो तो सिद्ध कीजिए कि यह समकोण त्रिभुज है।

21. निम्न युगपत् समीकरणों का हल आलेख विधि से ज्ञात कीजिए।

(A) $x+y=4\,;\ \ x=y$ (B) $x+y=3\,;\ \ 2x+5y=12$

(C) $2x-3y-6=0\,;\ \ 2x+y+10=0$ (D) $2x+y-3=0\,;\ \ 2x-3y-7=0$

22. समीकरण निकाय $2x-y=1;x+2y=8$ का आलेख विधि से हल ज्ञात कीजिए तथा इनके संगत रेखाएं $y-$ अक्ष को जिन बिन्दुओं पर मिलती हैं उन बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

## उत्तरमाला 4.1

(1) $x=6,\ y=0$ (2) $x=1,\ y=4$ (3) कोई हल नहीं (4) $x=3,\ y=1$

(5) $x=-2,\ y=3$ (6) असंगत, कोई हल नहीं (7) $(4, -6)$

(8) असंगत कोई हल नहीं (9) $(1, 2)$ (10) सम्पाती, अनन्त हल द्विमान (11) $(-2, 3)$

## उत्तरमाला 4.2

(1) $x=-21,\ y=17$ (2) $x=3,\ y=-2$ (3) $x=5,\ y=-2$ (4) $x=-2,\ y=5$

(5) $x=1,\ y=-7$ (6) $x=5,\ y=3$ (7) $x=5,\ y=3$ (8) $x=2,\ y=3$

(9) $x=14,\ y=9$ (10) $x=2,\ y=-3$ (11) $x=-1,\ y=1$ (12) $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2}$

(13) $u=\frac{22}{31},\ v=\frac{11}{23}$ (14) $x=\frac{1}{6},\ y=\frac{1}{4}$ (15) $x=3,\ y=2$

## उत्तरमाला 4.3

(1) $x=15,\ y=5$ (2) $x=4,\ y=2$ (3) $x=5,\ y=-20$ (4) $x=3,\ y=-2$

(5) (i) $k=-\frac{10}{3}$; (ii) $k=6$ (6) $x=(m+n),\ y=m-n$

(7) (i) अद्वितीय हल के लिए $\lambda \neq \frac{3}{2}$ (ii) कोई हल नहीं के लिए $\lambda=\frac{3}{2}$

## उत्तरमाला 4.4

(1) 26 (2) लम्बाई 16 सेमी, चौड़ाई 12 सेमी (3) 30 व 40

(4) पिता की आयु 29 वर्ष पुत्र की आयु 4 वर्ष (5) राम के पास 40 रुपए, श्याम के पास 170 रुपए

(6) कुर्सी 150 रुपए तथा मेज 500 रुपए (7) बड़ी संख्या 25 एवं छोटी संख्या 18

(8) 36 (9) 7/9 (10) गीता की आयु 50 वर्ष, कमला की आयु 20 वर्ष

(11) रेल 100 किमी/घ तथा कार 80 किमी/घं

## विविध प्रश्नमाला 4

1. (D) 2. (C) 3. (B) 4. (A) 5. (C) 6. (A) 7. (A)

8. (B) 9. (A) 10. (D) 11. $y=\frac{3x+10}{5}$, $(0,2)$

12.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
| $y$ | $-3$ | $-1$ | 1 | 3 | 5 |

13. $x=1, y=3$ 14. $x=-21, y=17$

15. $x=\frac{1}{6}, y=\frac{1}{4}$ 16. 5,3 17. $\frac{3}{7}$ 18. 20 रुपये 19. 18

21. (क) $x=2, y=2$ (ख) $x=1, y=2$ (ग) $x=-3, y=-4$ (घ) $x=2, y=-1$

22. $x=2, y=3$ प्रथम रेखा $y$-अक्ष को बिन्दु $(0,-1)$ पर तथा अद्वितीय रेखा $y$-अक्ष को बिन्दु $(0,4)$ पर मिलती है।