अध्याय

5

समतल ज्यामिती परिचय एवं रेखाएँ व कोण (Plane Geometry and Line & Angle)

5.01 ऐतिहासिक परिचयः

हड़प्पा और मोहनजोद्ड़ो (दोनों अब पाकिस्तान में), कालीबंगा (राजस्थान) एवं लोथल (गुजरात) में खुदाइयों से प्राप्त अवशेषों के आधार पर यह स्पष्ट रूप से प्रमाणित होता है कि प्राचीन भारत में 2500 ईसा पूर्व से 1750 ईसा पूर्व की काल अवधि में, एक बड़े क्षेत्र में विकसित सभ्यता फली–फूली। इस सभ्यता के अवशेषों से यह भी प्रमाणित होता है कि यहाँ के निवासियों को ज्यामिति एवं ज्यामितीय रचनाओं का विशेष ज्ञान था। इसी ज्ञान के आधार पर इन्होंने भवनों, सड़कों, वृत्तों, अर्द्ध गोलों का निर्माण किया था जिसमें क्षेत्रमिति का विशेष महत्व होता है। 1650 ईसा पूर्व के बेबीलोन निवासियों ने अपना रेखा गणितीय तथा क्षेत्रफल ज्ञान ''रिण्ड पेपिरस'' (Rhind Papyrus) में संजोये हुए थे।

रेखागणित एवं ज्यामिति की जन्मस्थली भी भारत रहा है। 1000 ईसा पूर्व से 500 ईसा पूर्व के शुल्व काल या वेदांग – ज्योतिषकाल में ही रेखागणित तथा ज्यामिति की नींव पड़ गई थी। इस काल में इसे विभिन्न नामों से जाना जाता था, जैसे शुल्व गणित, शुल्व विज्ञान, रज्जु गणित, रज्जु–संख्यान्। शुल्व का पर्यायवाची रज्जु होने के कारण इसे रज्जु गणित भी कहा गया जो आगे चलकर ''रेखागणित'' में परिणित हो गया।

इसी प्रकार क्षेत्रों के मापने के कार्य के लिए रज्जु–क्षेत्रगणित, क्षेत्र समास, क्षेत्र व्यवहार, क्षेत्रमिति रूप, भूमिति एवं ज्यामिति नामों का प्रयोग किया गया है। प्राचीन काल से यज्ञों के लिए वेदियाँ बनाई जाती थी, उनका आधार भी ज्यामिति ही रहता था। वेदांग ज्योतिष में कहा गया है कि :

''वेदा हि यज्ञार्थमभिप्रवृत्ताः''

अर्थात् वेद भी यज्ञों के लिए प्रवृत हुए। यज्ञों के अनुसार भिन्न–भिन्न आकार प्रकार की वेदियां बनाने की आवश्यकता पड़ी जिसके लिए विभिन्न प्रकार की आकृतियों जैसे वर्गाकार, वृत्ताकार, अर्द्धवृत्ताकार, आयताकार, त्रिभुजाकार इत्यादि का विकास हुआ। वेदियों की रचना में इस बात का भी ध्यान रखना आवश्यक था कि सभी वेदियों का क्षेत्रफल मानक वेदी के बराबर हो। अतः इसके लिए ज्यामितीय रचनाओं का ज्ञान अत्यन्त आवश्यक था, जैसे सरल रेखा पर वर्ग बनाना, वर्ग को बराबर क्षेत्रफल वाले वृत्त में परिवर्तित करना, वर्ग के परिगत वृत्त खींचना एवं वर्ग के अन्तर्गत वृत्त खींचना, वृत्त के क्षेत्र को द्विगुणित करना इत्यादि।

अर्थात् गम्भीरता पूर्वक विचार करें तो दो शब्द अत्यन्त महत्वपूर्ण हैं (1) रज्जु (रस्सी) एवं (2) माप। अतः

वह विज्ञान या गणित जो शुल्व की सहायता से विकसित किया गया, उसे शुल्व विज्ञान या शुल्व गणित कहा गया। भारतीय गणितज्ञों ने इस क्षेत्र में बहुत काम किया है। विभिन्न रेखाकृतियों के अंकन हेतु शुल्व सूत्रों की रचनाएँ की, जो उन्हीं गणितज्ञों के नाम से विख्यात हुए जैसे : बौधायन शुल्व सूत्र, आपस्तम्ब शुल्व सूत्र, कात्यान शुल्व सूत्र, मानव शुल्व सूत्र, मैत्रायण शुल्व सूत्र, वाराह शुल्व सूत्र, बौधुल शुल्व सूत्र इत्यादि।

शुल्व काल की प्रमुख उपलब्धियों में से एक है ''समकोण त्रिभुज का प्रमेय'' अर्थात् ''कर्ण पर बना वर्ग शेष दो भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर होता हैं।'' यह प्रमेय पाइथोगोरस (580 ईसा पूर्व) से 2 शताब्दी पूर्व भारत में व्यापक रूप में प्रचलित थी।

बौधायन प्रमेय (800 ईसा पूर्व) :

दीर्घचतुरसृस्याक्षणया रज्जुः पार्श्वमानी
तिर्यक्मानी यत्पृथग्भूते कुरुतस्तदुभयं करोति।

अर्थात् दीर्घचतुरसृ (आयत) की तिर्यक्मानी (लम्ब) और पार्श्वमानी (आधार) भुजाएँ जो दो वर्ग बनाती हैं, उनका योग अकेले कर्ण पर बने वर्ग के बराबर होता है। ज्ञातव्य है कि बौधायन ने पाइथोगोरस से लगभग 300 वर्ष पूर्व इस तथ्य को प्रतिपादित किया था। अतः इस प्रमेय को बौधायन प्रमेय कहना सुसंगत होगा।

भारतीय ज्यामितिविदों में बह्मगुप्त (598 ई.), जिन्होंने चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल उसकी भुजाओं और अर्द्ध परिमाप के रूप में ज्ञात किया। आर्यभट्ट (476 ई.), जिन्होंने समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल, पिरामिड का आयतन एवं π का सन्निकट मान प्राप्त किया। भास्कर – II (1114 ई.) ने बौधायन प्रमेय की उपपत्ति विच्छेदन विधि द्वारा दी।

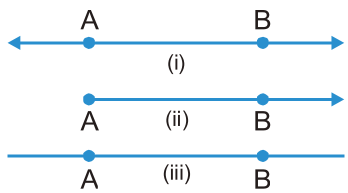
आगे चल कर यूनानी गणितज्ञों ने लगभग 300 वर्ष ईसा पूर्व इस ज्ञान का गहन अध्ययन कर इसके तथ्यों को निगमनिक तर्कों द्वारा सिद्ध करते हुए व्यवस्थित किया तथा इसे ''ऐलीमेन्ट्स''(Elements) नामक पुस्तक में प्रकाशित कर दिया। आज हम ज्यामिति का अध्ययन इसी रूप में करते हैं। ज्यामिति(Geometry) शब्द यूनानी भाषा के दो शब्दों ''जियो'' (Geo) और मेट्रन (Metron) से बना है। जियो का अर्थ है ''पृथ्वी'' और ''मेट्रन'' का अर्थ है ''मापना''।

5.02 आधारभूत संकल्पनाएँ :

कुछ मूलभूत संकल्पनाओं को आधार बना कर ज्यामिति का अध्ययन किया जाता है। इन आधारभूत संकल्पनाओं को अनुभवों एवं उदाहरणों द्वारा ही समझा जाता है, इनके लिए किसी भी प्रकार की उपपत्तियॉ नहीं दी जाती है। ज्यामिति के अध्ययन में तीन आधारभूत संकल्पनाएँ मानी जाती है– (1) बिन्दु (2) रेखा (3) समतल। जिन्हें कुछ उदाहरणों की सहायता से समझने का प्रयास करेंगे।

(1) **बिन्दु** : अत्यन्त तेज नोंक वाली बारीक पेंसिल द्वारा लगाया गया चिह्न एक बिन्दु का उदाहरण है। साधारणतः बिन्दु को अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों अर्थात् A, B, C, D इत्यादि द्वारा दर्शाते हैं।

(2) **रेखा** : सरल रेखा दो बिन्दुओं को उनके मध्य स्थित सभी बिन्दुओं को परस्पर सीधे मिलाते हुए खीचीं हुई दोनो तरफ अनन्त की और अग्रसर होती है। यदि इन दो बिन्दुओं में से एक बिन्दु को स्थिर करते हुए दूसरे बिन्दु को अनन्त की ओर ले जाया जाए तो यह एक किरण को निरूपित करेगी एवं यदि दोनों बिन्दुओं को स्थिर कर दिया जाए तो बनने वाली आकृति को रेखा खण्ड कह सकते है। निम्न चित्र (i), (ii) तथा (iii) क्रमशः रेखा $\overleftrightarrow{AB}$, किरण $\overrightarrow{AB}$ रेखा खण्ड $\overline{AB}$ कहते हैं।



चित्र 5.01

(3) **समतल** : वह पृष्ठ जिस पर स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं को परस्पर मिलाते हुए एक सरल रेखा खींचने पर उनके मध्य स्थित सभी बिन्दु उस पृष्ठ पर स्थित हो तो ऐसे पृष्ठ को समतल कहते हैं।

ज्यामिती का अध्ययन करने के लिए कुछ अभिगृहित (वे रचनाएं जिन्हें बिना प्रमाण सत्य माना जाता है तथा इनके आधार पर अन्य ज्यामितीय रचनाओं को सिद्ध किया जाता है) आवश्यक है, जो मुख्यतः निम्न है

(i) एक रेखा पर अनन्त बिन्दु होते हैं।

(ii) एक रेखा खण्ड को अपनी इच्छानुसार कितनी ही लम्बाई तक बढ़ाया जा सकता है।

(iii) एक बिन्दु से अनन्त रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

(iv) दो बिन्दुओं से गुजरती हुई एक और केवल एक ही सरल रेखा खींची जा सकती है।

(v) एक दी गई रेखा के समान्तर, किसी बाह्य बिन्दु से एक और केवल एक ही रेखा खींची जा सकती है।

(vi) सभी समकोण समान होते हैं।

(vii) समान पूरक एवं सम्पूरक कोण क्रमशः आपस में समान होते हैं।

(viii) एक रेखाखण्ड को केवल एक ही बिन्दु पर समद्विभाजित किया जा सकता है।

(ix) एक कोण को केवल एक ही रेखा द्वारा समद्विभाजित किया जा सकता है।

5.03 आगमनिक एवं निगमनिक तर्क :

गणित में विभिन्न नियम जो विभिन्न उदाहरणों या प्रायोगिक निष्कर्षों से स्थापित किये जाते हैं, आगमनिक तर्क कहलाते हैं। ऐसे निष्कर्ष सदैव सत्य हों, यह शंका रहती है।

एक नियम को सिद्ध करने के लिए एक विशेष प्रकार की तर्क विधि जिसमें नियम को चरणबद्ध तरीके से प्रमाण देते हुए सिद्ध किये जाते है, निगमनिक तर्क कहलाते हैं।

5.04 प्रमेय और निर्मेय :

(1) **प्रमेय** : निगमनिक तर्क विधि द्वारा सत्यापित नियमों (निष्कर्षों) को प्रमेय कहते हैं। ज्यामिति में किसी प्रमेय को सिद्ध करने के लिए विभिन्न चरणों का प्रयोग किया जाता है।

(2) **उपप्रमेय** : प्रमेय को सिद्ध करने के उपरान्त कुछ ऐसे परिणाम प्राप्त होते हैं, जिन्हें सरलतापूर्वक समझा जा सकता है, उपप्रमेय कहलाते है।

(3) **निर्मेय** : ज्यामितीय नियमों का उपयोग कर दी गई ज्यामितीय रचना को निर्मेय कहते हैं।

5.05 ज्यामितीय चिह्न :

ज्यामिति में बहुधा प्रयुक्त किये जाने वाले शब्दों को कई संकेतों के रूप में लिखा जाता है। कुछ शब्दों के संकेत की सारणी निम्नलिखित है :

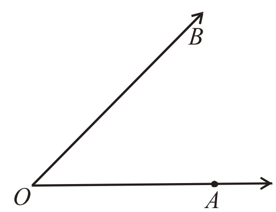
क्र.सं.	शब्द	संकेत चिह्न	क्र.सं.	शब्द	संकेत चिह्न
1.	चूँकि, क्योंकि	$\because$	8.	समकोण	∟
2.	इसलिए	$\therefore$	9.	लम्ब	$\perp$
3.	बड़ा	$>$	10.	त्रिभुज	□
4.	छोटा	$<$	11.	समान्तर	□
5.	सर्वांगसम	$\cong$	12.	वृत्त	□
6.	समरूप	$\sim$	13.	चाप	$\frown$
7.	कोण	$\angle$	14.	बराबर नहीं है	$\neq$

5.06 कोण एवं इसका मापन :

कोण :

"कोई भी दो किरणें जिनका प्रारम्भिक बिन्दु एक ही हो, कोण बनाती है"।

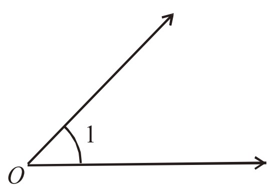
सामने चित्र 5.02 मे एक ही प्रारम्भिक बिन्दु O से दो किरणें $\overrightarrow{OA}$ तथा $\overrightarrow{OB}$ निकल रही हैं। इस आकृति को बिन्दु O पर बनने वाला कोण कहते हैं। चित्रानुसार, एक क्रिया पर कोई बिन्दु A तथा दूसरी किरण पर बिन्दु B हो तो इस कोण को $\angle AOB$ या $\angle BOA$ द्वारा व्यक्त करते है।



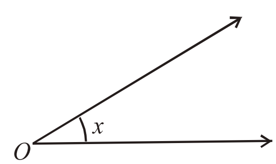
चित्र 5.02

OA तथा OB को $\angle AOB$ या $\angle BOA$ की भुजाएँ कहलाती हैं। उभयनिष्ठ बिन्दु O को कोण का शीर्ष कहते हैं।

कभी–कभी सुविधा के लिए कोण के भीतर कोई अंक या अक्षर लिखकर भी कोण को व्यक्त करते हैं। जैसे नीचे चित्र 5.03 तथा 5.04 में $\angle 1$ तथा $\angle x$ दर्शाये गये हैं।



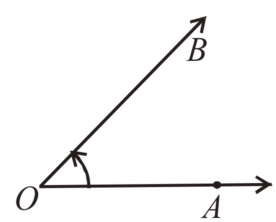
चित्र 5.03



चित्र 5.04

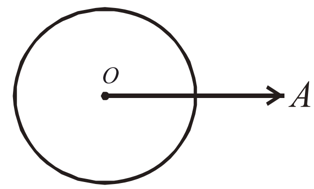
कोण का माप :

माना कि एक परिक्रामक रेखा एक बिन्दु O के सापेक्ष OA की स्थिति से परिक्रमण कर OB स्थिति में आ जाती है जैसा कि चित्र 5.05 में दर्शाया गया है, तो इस परिक्रमण की मात्रा को $\angle AOB$ का परिमाण कहते हैं।



चित्र 5.05

यदि रेखा OB बिन्दु O के चारों ओर एक पूरा चक्कर लगाकर अपनी पूर्व स्थिति OA पर आ जाये तो इस प्रकार बने कोण के परिमाण को 360 बराबर भागों में बाँटकर इसे 360 अंश (डिग्री) द्वारा व्यक्त किया जाता है।



(1 चक्कर का कोण $=360^\circ$)

चित्र 5.06

इस प्रकार 1 भाग = 1 अंश = 1° एवं 360 भाग = 360°

यदि एक अंश को 60 बराबर भागों में बाँटा जाये तो ऐसे प्रत्येक भाग को 1 कला (1 मिनट) कहते हैं। इसी प्रकार 1 कला को भी 60 भागों में बाँटने पर प्रत्येक भाग को एक विकला (सैकण्ड) कहा जाता है। सांकेतिक रूप में एक डिग्री, एक मिनट तथा सैकण्ड को क्रमशः $1^\circ, 1'$ तथा $1''$ से व्यक्त करते हैं।

अतः $1^\circ = 60$ कला (मिनट) $= 60^\circ$

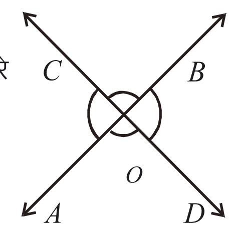
1 कला (मिनट) $= 60$ विकला (सैकण्ड) अर्थात् $1' = 60''$

कोण मापने के लिए चाँदे का उपयोग करते हैं, इसमें 0° से 180° तक के निशान होते हैं।

शीर्षाभिमुख कोण (Vertically opposite angles) :

यदि दो रेखाएँ एक दूसरे को प्रतिच्छेद करे, तो प्रतिच्छेद बिन्दु पर एक–दूसरे के विपरीत बने कोण, शीर्षाभिमुख कोण कहलाते हैं।

चित्र 5.07 में रेखाएँ AB एवं CD एक दूसरे को O बिन्दु पर प्रतिच्छेद कर रही हैं और इस प्रकार बिन्दु O पर बने कोण $\angle AOC$ तथा $\angle BOD$, $\angle AOD$ तथा $\angle BOC$ शीर्षाभिमुख कोण हैं। शीर्षाभिमुख कोण युग्म में कोणों की भुजाएँ परस्पर विपरीत किरणें होती हैं।



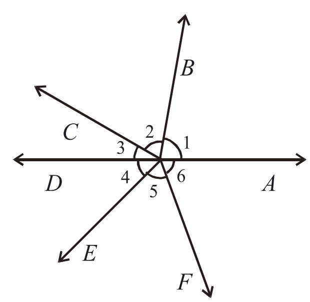
चित्र 5.07

एक बिन्दु के चारों ओर बनने वाले कोण :

यदि एक बिन्दु से विभिन्न किरणें निकले तो इस प्रकार प्राप्त कोणों को एक बिन्दु के चारों ओर बने कोण कहा जाता है। चित्र 5.08

जैसा कि कोण मापन में बताया गया है कि परिक्रामी रेखा द्वारा एक बिन्दु को चारों ओर पूरे एक परिक्रमण से बना कोण 360° के बराबर होता है। अतः यहाँ बिन्दु O के चारों ओर बनने वाले सभी कोणों का योग 360° है।

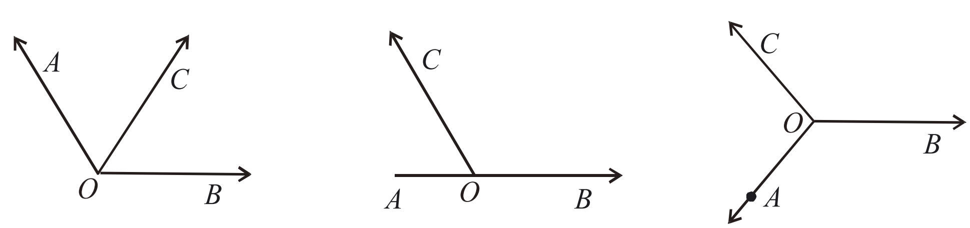
अर्थात्, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 360^\circ$ है।



चित्र 5.08

5.07 कोणों का रैखिक युग्म (A linear pair of angles) :

नीचे दी गई आकृतियों में दिए गए कोण युग्मों को ध्यान से देखिए।



(i) (ii) (iii)

चित्र 5.09

प्रत्येक कोण युग्म ($\angle AOC$ तथा $\angle BOC$) आसन्न कोण हैं।

इनमें चित्र 5.09 (ii) में अंकित कोण युग्म ऐसे हैं, कि इनके मापों का योगफल 180° के बराबर है। ऐसे कोण युग्म को "रैखिक कोण युग्म" कहते हैं। स्पष्ट है कि एक रैखिक कोण युग्म में आसन्न कोण सम्पूरक होते हैं।

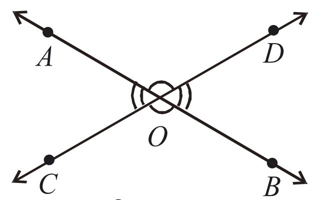
परिभाषा : "दो आसन्न कोणों को, जिनकी उभयनिष्ठ भुजा के अतिरिक्त भुजाएँ दो विपरीत किरणें हो, कोणों का रैखिक युग्म कहते हैं"।

रैखिक कोण–युग्म अभिगृहीत :

प्रमेय 5.1 *

यदि दो सरल रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करें तो, शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं।

दिया है : रेखाएँ AB एवं CD जो एक दूसरे को बिन्दु O पर प्रतिच्छेद कर रही है।



चित्र 5.10

सिद्ध करना है : शीर्षाभिमुख कोण $\angle AOC = \angle DOB$

एवं $\angle AOD = \angle BOC$

उपपत्ति :

$\because$ किरण OD का प्रारम्भिक बिन्दु, O, रेखा AB पर स्थित है। अतः रैखिक कोण युग्म अभिगृहीत से

$\therefore \quad \angle AOD + \angle DOB = 180^\circ$ ... (i)

इसी प्रकार, $\quad \angle AOC + \angle AOD = 180^\circ$ ... (ii)

समीकरण (i) एवं (ii) से

$$\angle AOD + \angle DOB = \angle AOC + \angle AOD \quad \Rightarrow \quad \angle AOC = \angle DOB$$

इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हैं कि

$\angle AOD = \angle BOC$ "इति सिद्धम्"।

उपप्रमेय 1

यदि दो या दो से अधिक सरल रेखाएँ एक दूसरे को एक ही बिन्दु पर प्रतिच्छेद करें ,तो प्रतिच्छेद बिन्दु पर बनने वाले सभी कोणों का योगफल 360° के बराबर होता है।

उपप्रमेय 2

शीर्षाभिमुख कोणों के अर्द्धक एक सरल रेखा में होते है।

दृष्टांतीय उदाहरण

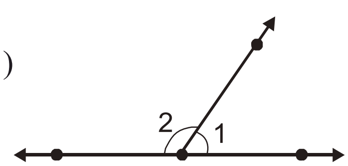
उदाहरण 1. चित्र 5.11 में $\angle 1$ तथा $\angle 2$ रैखिक कोण युग्म है। यदि $\angle 2 - \angle 1 = 18^\circ$ हो, तो $\angle 1$ तथा $\angle 2$ ज्ञात कीजिए।

हल : $\angle 2 + \angle 1 = 180^\circ$ (रैखिक कोण अभिगृहीत से) . . . (1)

$\angle 2 - \angle 1 = 18$ (दिया हुआ है) . . . (2)

(1) व (2) का योग करने पर

$2\angle 2 = 198$



चित्र 5.11

या $\angle 2 = \frac{198}{2} = 99^o$ . . . (3)

(1) व (3) से, $99^o + \angle 1 = 180^o$

या $\angle 1 = 180^o - 99^o = 81^o$

$\Rightarrow$ $\angle 1 = 81^o$ एवं $\angle 2 = 99^o$

उदाहरण 2: चित्र 5.12 से कोण $\angle AOB, \angle BOC, \angle COD$ तथा $\angle DOE$ के माप ज्ञात कीजिए, जहाँ $\angle AOE = 100^o$ है।

हल : एक बिन्दु पर बनने वाले सभी कोणों का योगफल $= 360°$.

$\therefore$ $y + 2y + 4y + 6y + 100° = 360°$

$\Rightarrow$ $13y = 260°$

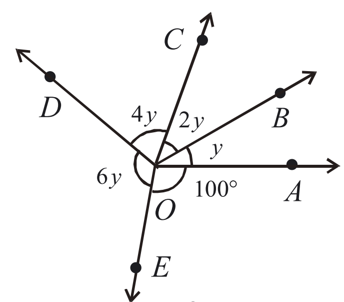
$\Rightarrow$ $y = \frac{260}{13} = 20°$

अतः $\angle AOB = y = 20°$,

$\angle BOC = 2y = 40°$,

$\angle COD = 4y = 80°$

तथा $\angle DOE = 6y = 120°$



चित्र 5.12

उदाहरण 3: चित्र 5.13 से $\angle x, \angle y$ एवं $\angle z$ के माप ज्ञात कीजिये।

हल : चित्र से

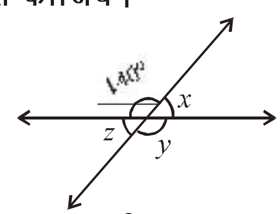
$\angle y = 140°$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\angle x + 140° = 180°$ (रैखिक कोण युग्म)

$\Rightarrow$ $\angle x = 40°$

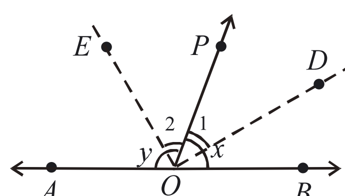
अब $\angle x = \angle z$ (शीर्षाभिमुख कोण)

अतः $\angle z = 40°$



चित्र 5.13

उदाहरण 4. चित्र 5.14 में *AB* एक रेखा है इससे दूसरी रेखा *OP*, बिन्दु *O* पर मिल रही है। रेखाएँ *OD* तथा *OE* क्रमशः कोण $\angle BOP$ और $\angle POA$ के समद्विभाजक हैं। $\angle EOD$ का माप ज्ञात कीजिए।



चित्र 5.14

हल : माना $\angle BOP = x$ तथा $\angle POA = y$

$\angle x + \angle y = 180°$ (रैखिक कोण युग्म है) . . . (i)

और $\angle x = 2\angle 1, \angle y = 2\angle 2$ (दिये हुए हैं) . . . (ii)

$\therefore$ (i) तथा (ii) से

$2\angle 1 + 2\angle 2 = 180°$

$\Rightarrow$ $2(\angle 1 + \angle 2) = 180°$ [समी. (i) से]

$\Rightarrow \qquad \angle 1 + \angle 2 = 90°$

$\Rightarrow \qquad \angle EOD = 90°$

उदाहरण 5. एक कोण अपने सम्पूरक कोण का आधा है तो प्रत्येक कोण का परिमाण ज्ञात कीजिए।

हल : माना कोण का मान x है

अतः प्रश्नानुसार, इसके सम्पूरक कोण का मान $\frac{x}{2}$ होगा।

हम जानते है कि सम्पूरक कोणों का योग 180^o होता है।

अतः $\quad x + \frac{x}{2} = 180^o$

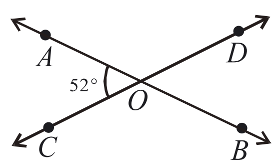
$\Rightarrow \quad x = 120^o$

$\therefore \quad \frac{x}{2} = 60^o$

अतः सम्पूरक कोणों के परिमाण 120^o तथा 60^o हैं।

प्रश्नमाला 5.1

1. $(2x+4)$ एवं $(x-1)$ अंश माप के कोण रैखिक कोण युग्म हैं, इन्हें ज्ञात कीजिए।
2. दिए गए चित्र 5.15 से



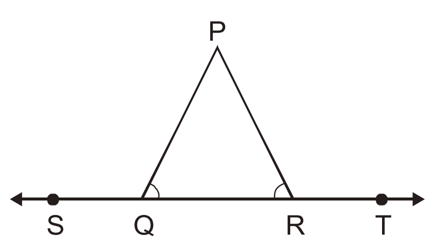
चित्र 5.15

(i) $\angle BOD$ का माप बताइए। (ii) $\angle AOD$ का माप बताइए।

(iii) शीर्षाभिमुख कोण युग्म कौन–कौन से हैं ?

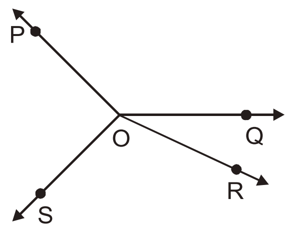
(iv) $\angle AOC$ के आसन्न सम्पूरक कोण कौन–कौन से हैं ? बताइए।

3. दिये गये चित्र 5.16 में यदि $\angle PQR = \angle PRQ$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\angle PQS = \angle PRT$



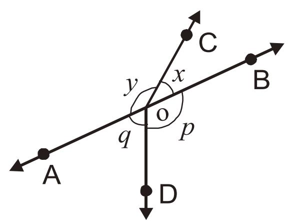
चित्र 5.16

4. चित्र 5.17 में, OP, OQ, OR और OS चार किरणें हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360^{o}$ है।



चित्र 5.18

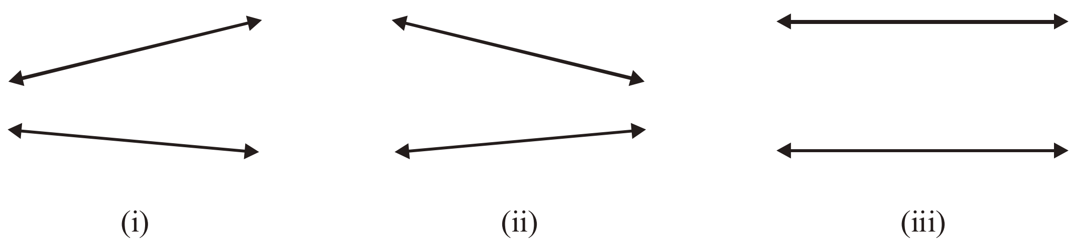
5. चित्र 5.18 में यदि $\angle x + \angle y = \angle p + \angle q$ है तो सिद्ध कीजिए कि AOB एक सरल रेखा है।



चित्र 5.18

5.08 प्रतिच्छेदी रेखाएँ तथा समान्तर रेखाएँ

यदि आप से किसी कागज या समतलन पृष्ठ पर दो–दो सरल रेखाओं के युग्म खींचने को कहा जाए तो निश्चित ही निम्न चित्रानुसार रेखा युग्म खींचेगे

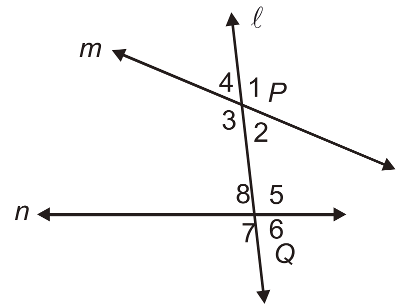


चित्र 5.19

अब प्रत्येक रेखा युग्मों के मध्य की दूरी कम से कम दो स्थानों से स्केल की सहायता से मापिए। आप क्या पातें है?

निःसन्देह आप देखेंगे कि चित्र 5.19 (i) एवं (ii) में रेखा युग्मों के मध्य दूरी प्रत्येक स्थान पर समान नहीं है। अर्थात् इन रेखाओं को आगे या पीछे बढ़ाने पर ये परस्पर एक स्थान पर प्रतिच्छेद करेंगे। अतः ये प्रतिच्छेदी रेखाएं हैं। चित्र 5.19 (iii) में दर्शाई गई रेखाओं के मध्य दूरी प्रत्येक स्थान पर समान है। इन्हें आगे या पीछे बढ़ाएँ तो ये अनन्त तक प्रतिच्छेद नहीं करेगी। अतः ये समान्तर रेखाएँ है।

तिर्यक रेखा– दो या दो से अधिक रेखाओं के समूह को कोई एक रेखा प्रत्येक रेखा को भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करें, तिर्यक रेखा कहलाती है (देखिए चित्र 5.20में) रेखा ℓ, रेखाओं m तथा n को क्रमशः P और Q पर प्रतिच्छेद करती है। इस प्रकार रेखा ℓ रेखाओं m व n के लिए एक तिर्यक रेखा है।



चित्र 5.20

क्या आपको प्रत्येक प्रतिच्छेदी बिन्दु P व Q पर चार कोण बनते दिखाई दे रहे हैं? हाँ।

बिन्दु P पर $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ और $\angle 4$ तथा Q पर $\angle 5, \angle 6, \angle 7$ एवं $\angle 8$ बने हैं।

इनमें से $\angle 1, \angle 4, \angle 6$ व $\angle 7$ बाह्म कोण तथा $\angle 2, \angle 3, \angle 5$ व $\angle 8$ को अन्तः कोण कहते हैं।

याद कीजिए पिछली कक्षाओं में, आपने कुछ कोणों के युग्मों का नामांकन किया था, जो एक तिर्यक रेखा द्वारा दो रेखाओं को प्रतिच्छेद करने से बनते हैं। इन युग्मों को पुनः स्मरण कर लेतें है।

(a) संगत कोण (corresponding angle):

(i) $\angle 1$ तथा $\angle 5$ (ii) $\angle 2$ तथा $\angle 6$

(iii) $\angle 3$ तथा $\angle 7$ (iv) $\angle 4$ तथा $\angle 8$

(b) एकान्तर अन्तः कोण (Alternate interior angles):

(i) $\angle 2$ तथा $\angle 8$ (ii) $\angle 3$ तथा $\angle 5$

यहाँ एकान्तर अन्तः कोणों के लिए हम केवल एकान्तर कोणों शब्दों का ही प्रयोग करेंगे।

(c) एकान्तर बाह्मः कोण (Alternate exterior angles):

(i) $\angle 1$ तथा $\angle 7$ (ii) $\angle 4$ तथा $\angle 6$

(d) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अन्तः कोण

(i) $\angle 2$ तथा $\angle 5$ (ii) $\angle 3$ तथा $\angle 8$

तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अन्तः कोणों के लिए क्रमागत अन्तः कोण या सम्बन्धित कोण या सह अन्तः कोण नाम से भी लिखा या पढ़ा जा सकता है। यहाँ तिर्यक रेखा के एक ओर के अन्तः कोण के लिए केवल अन्तः कोण का ही प्रयोग करेंगे।

सामान्यतः उपर्युक्त कोण युग्मों के मध्य कोई संबंध नहीं होता है, परन्तु यदि दो या अधिक समान्तर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा प्रतिच्छेद करें तो

(i) संगत कोण बराबर होते हैं।

(ii) एकान्तर कोण बराबर होते हैं।

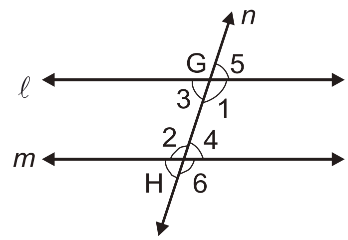
(iii) अन्तः कोण सम्पूरक होते हैं।

उपर्युक्त कथनों के विलोम भी सत्य होते हैं अर्थात् दो सरल रेखाओं को एक तिर्यक रेखा प्रतिच्छेद करे और संगत कोण बराबर हो तो वे रेखाएँ समान्तर होती हैं।

प्रमेय 5.2*

यदि दो समान्तर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा प्रतिच्छेद करे तो एकान्तर कोण बराबर होते हैं।

दिया है : दो समान्तर रेखाएँ ℓ तथा m हैं जिन्हें n तिर्यक रेखा क्रमशः G तथा H बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है। इस प्रकार एकान्तर कोण युग्म $(\angle 2, \angle 1)$ तथा $(\angle 3, \angle 4)$ बनते हैं।



चित्र 5.21

सिद्ध करना है : $\angle 1 = \angle 2$ एवं $\angle 3 = \angle 4$

उपपत्ति :

यहाँ	$\angle 2 = \angle 6$	(शीर्षाभिमुख कोण)	... (i)
एवं	$\angle 1 = \angle 6$	(संगत कोण अभिगृहीत से)	... (ii)

समीकरण (i) एवं (ii) से

$\Rightarrow$ $\angle 1 = \angle 2$

इसी प्रकार	$\angle 4 = \angle 5$	(संगत कोण अभिगृहीत से)	... (iii)
एवं	$\angle 3 = \angle 5$	(शीर्षाभिमुख कोण)	... (iv)

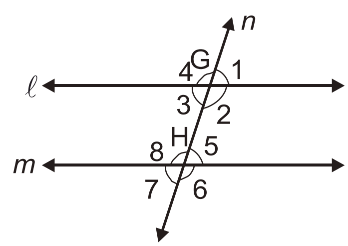
अतः समीकरण (iii) एवं (iv) से

$\Rightarrow$ $\angle 3 = \angle 4$ "इतिसिद्धम"।

प्रमेय 5.3 (प्रमेय 6.2 का विलोम)

यदि दो सरल रेखाओं को एक तिर्यक रेखा प्रतिच्छेद करे और इस प्रकार बने एकान्तर कोण बराबर हों तो रेखाएँ समान्तर होती हैं।

दिया है : ℓ तथा m दो रेखाएं हैं जिनको तिर्यक रेखा n क्रमशः G तथा H बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती हैं। एकान्तर कोण $\angle 2 = \angle 8$ तथा $\angle 3 = \angle 5$ हैं।



चित्र 5.22

सिद्ध करना है : $\ell \parallel \mathrm{m}$

उपपत्ति :

यहाँ	$\angle 1 = \angle 3$	(शीर्षाभिमुख कोण)	... (i)
एवं	$\angle 3 = \angle 5$	(दिया है)	... (ii)

समीकरण (i) एवं (ii) से

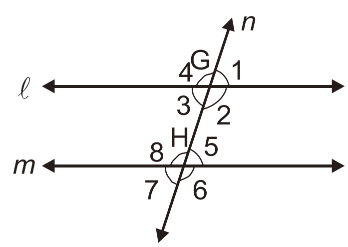
$\Rightarrow$ $\angle 1 = \angle 5$

अतः संगत कोण अभिगृहीत से

$\Rightarrow$ $\ell \parallel \mathrm{m}$ "इतिसिद्धम"।

प्रमेय 5.4 *

यदि दो समान्तर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा प्रतिच्छेद करे तो एक ओर के अन्तः कोणों का योग दो समकोण होता है।



चित्र 5.23

दिया है : ℓ तथा m दो समान्तर रेखाएँ हैं जिन्हें n तिर्यक

रेखा क्रमशः G तथा H बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है। बिन्दुओं G तथा H पर क्रमशः कोण $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ तथा $\angle 5, \angle 6, \angle 7, \angle 8$ बन रहे हैं। अन्तः कोण युग्म $\angle 2, \angle 5$ एवं $\angle 3, \angle 8$ हैं।

सिद्ध करना है : $\angle 2 + \angle 5 = 180°$ एवं $\angle 3 + \angle 8 = 180°$

उपपत्ति :

यहाँ $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (रैखिक कोण युग्म से) ...(i)

एवं $\angle 1 = \angle 5$ (संगत कोण अभिगृहीत से) ...(ii)

समीकरण (i) एवं (ii) से

$\angle 2 + \angle 5 = 180°$

इसी प्रकार $\angle 3 + \angle 4 = 180°$ (रैखिक कोण युग्म से) ... (iii)

$\angle 4 = \angle 8$ (संगत कोण अभिगृहीत से) ... (iv)

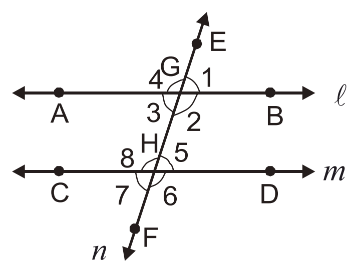
अतः समीकरण (iii) एवं (iv) से

$\angle 3 + \angle 8 = 180°$ "इतिसिद्धम"।

प्रमेय 5.5 (प्रमेय 2.4 का विलोम)

यदि दो सरल रेखाओं को एक तिर्यक रेखा प्रतिच्छेद करे और तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अन्तः कोणों का योग दो समकोण हो तो वे रेखाएँ समान्तर होगी।

दिया है : ℓ तथा m दो रेखाएँ हैं, जिन्हें तिर्यक रेखा n क्रमशः G एवं H बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है। इस प्रकार बिन्दु G एवं H पर क्रमशः $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ एवं $\angle 5, \angle 6, \angle 7, \angle 8$ बन रहे हैं।



चित्र 5.24

अन्तः कोण $\angle 2 + \angle 5 = 180°$ तथा $\angle 3 + \angle 8 = 180°$

सिद्ध करना है : $\ell \parallel m$

उपपत्ति :

यहाँ $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (रैखिक कोण युग्म) ...(i)

एवं $\angle 2 + \angle 5 = 180°$ (दिया है) ...(ii)

समीकरण (i) एवं (ii) से

$\angle 1 = \angle 5$

अतः संगत कोण अभिगृहीत से

$\ell \parallel m$ "इतिसिद्धम"।

प्रमेय 5.6*

यदि दो सरल रेखाएँ किसी तीसरी सरल रेखा के समान्तर हो, तो दोनों भी परस्पर समान्तर होगी।

$\ell \parallel n$ तथा $m \parallel n$ है।

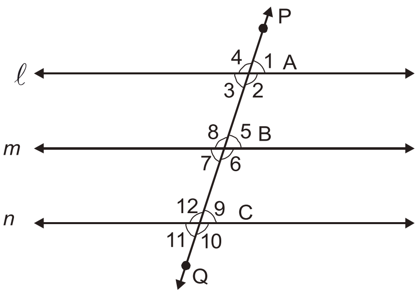
दिया हुआः $\ell \parallel m$ एक तिर्यक रेखा PQ खींची जो ℓ, m तथा n को A, B तथा C पर प्रतिच्छेद करती है।

सिद्ध करना : $\ell \parallel m$

उपपत्तिः $\ell \parallel n$ एवं PQ तिर्यक रेखा है

अतः $\angle 1 = \angle 9$

(संगत कोण अभिगृहीत) ...(1)



चित्र 5.25

m $\parallel$ n एवं PQ तिर्यक रेखा है

अतः $\angle 5 = \angle 9$ (संगत कोण अभिगृहीत) ...(2)

(1) व (2) से

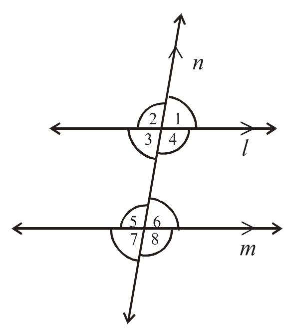
$\angle 1 = \angle 5$ ...(3)

$\angle 1$ तथा $\angle 5$ ℓ व m पर बने संगत कोण है और बराबर है अतः संगत कोण अभीगृहीत से $\ell \parallel m$ है।

"इतिसिद्धम"

उदाहरण 6: चित्र 5.26 में रेखाएँ ℓ m एवं n तिर्यक रेखा उन्हें काट रही है। यदि $\angle 1 = 55°$ हो तो शेष ज्ञात कीजिए।

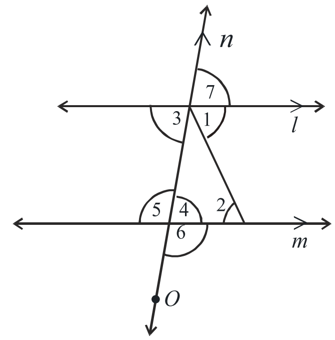
हल :



चित्र 5.26

यहाँ	$\angle 3 = \angle 1$	(शीर्षभिमुख कोण)	
और	$\angle 1 = 55°$	(दिया है)	
अतः	$\angle 3 = 55°$		
अब	$\angle 1 + \angle 4 = 180°$	(रैखिक कोण युग्म)	
$\Rightarrow$	$55° + \angle 4 = 180° \Rightarrow \angle 4 = 125°$		
$\because$	$\angle 2 = \angle 4$	(शीर्षाभिमुख कोण)	
अतः	$\angle 2 = 125°$		
$\because$	$\angle 1 = \angle 6$	(संगत कोण)	
और	$\angle 1 = 55°$	$\therefore$	$\angle 6 = 55°$
$\because$	$\angle 4 = \angle 8$	(संगत कोण)	
और	$\angle 4 = 125°$	$\therefore$	$\angle 8 = 125°$
$\because$	$\angle 7 = \angle 6$	(शीर्षाभिमुख कोण)	
और	$\angle 6 = 55°$		
	$\angle 7 = 55°$	(शीर्षाभिमुख कोण)	
	$\angle 5 = \angle 8$		
और	$\angle 8 = 125°$	$\therefore$	$\angle 5 = 125°$

उदाहरण 7. चित्र 5.27 में रेखाएँ ℓ m हो तो समान कोणों को ज्ञात कीजिए। कारण भी बताइए।



चित्र 5.27

हल :

यहाँ $\angle 1 = \angle 2$ (एकान्तर कोण)

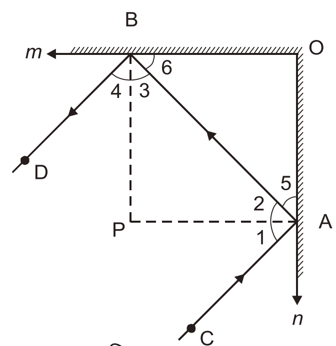
$\angle 3 = \angle 4$ (एकान्तर कोण)

$\angle 5 = \angle 6$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\angle 3 = \angle 7$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\angle 4 = \angle 7$ (संगत कोण)

उदाहरण 8: चित्र 5.28 में m और n दो समतल दर्पण हैं जो परस्पर लम्बवत् हैं। दर्शाइए कि आपतित किरण CA परावर्तित किरण BD के समान्तर है।



चित्र 5.28

हल : मान लीजिए कि A और B पर अभिलम्ब P पर मिलते हैं।

क्योंकि दर्पण परस्पर लम्बवत हैं, इसलिए $BP \parallel OA$ और $AP \parallel OB$ है।

चूंकि $BP \parallel OA$ तथा BA तिर्यक रेखा है

अतः $\angle 3 = \angle 5$ (एकान्तर कोण) . . . (1)

और $PA \perp OA$ अर्थात् $\angle PAO = 90^o$

और $\angle PAO = \angle 2 + \angle 5 = 90^o$ . . . (2)

(1) व (2) से $\angle 2 + \angle 3 = 90^o$ . . . (3)

चूंकि $\angle 1 = \angle 2$ एवं $\angle 4 = \angle 3$ (आपतन कोण = परावर्तन कोण) . . . (4)

(3) व (4) $\angle 1 + \angle 4 = 90^o$ . . . (5)

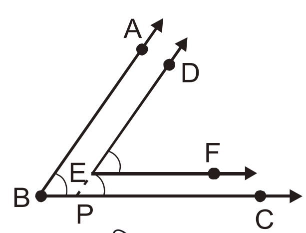
(3) व (5) को जोड़ने पर

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^o$$

अर्थात् $\angle CAB + \angle DBA = 180^o$ (तिर्यक रेखा AB के एक ही ओर के कोणें का योग 180^o है)

अतः $CA \parallel BD$

उदाहरण 9: चित्र 5.29 में $BA \parallel ED$ और $BC \parallel EF$ है दशाईइए कि $\angle ABC = \angle DEF$ है।



चित्र 5.29

हलः रचना DE को इतना आगे बढ़ाइए कि वह BC को P पर मिले चूंकि $BC \parallel EF$ (दिया हुआ) तथा को DP तिर्यक रेखा माने तो

$\angle DEF = \angle DPC$ (संगत कोण) . . . (1)

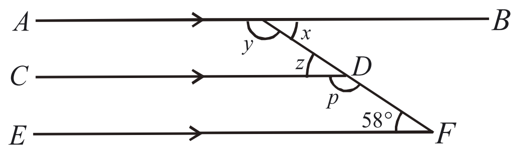
$AB \parallel DE$ (दिया हुआ) तो $AB \parallel DP$ (DE को ही P तक बढ़ाया गया है) तथा BC को तिर्यक रेखा माने तो

$\angle ABC = \angle DPC$ (संगत कोण) . . . (2)

(1) व (2) से $\angle ABC = \angle DEF$

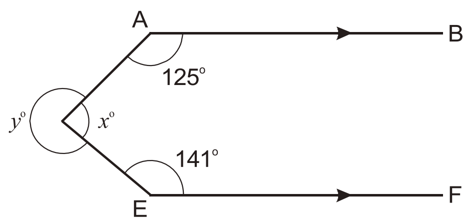
प्रश्नमाला 5.2

1. चित्र 5.30 में रेखाएँ AB, CD तथा EF परस्पर समान्तर हैं तो $\angle x, \angle y, \angle z$ और $\angle p$ ज्ञात कीजिए।



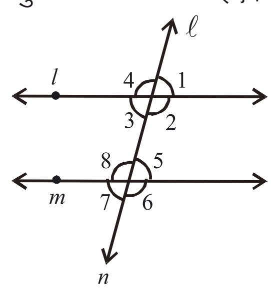
चित्र 5.30

2. चित्र 5.31 में $AB \quad EF$ हैं। $\angle x$ एवं $\angle y$ ज्ञात कीजिए।



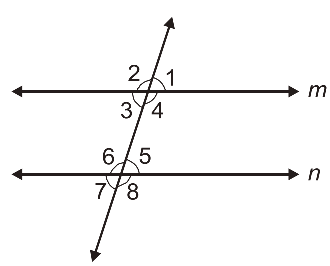
चित्र 5.31

3. चित्र 5.32 में $\ell \quad m$ तो $\angle 1$ के तुल्य कोणों को बताइए।



चित्र 5.32

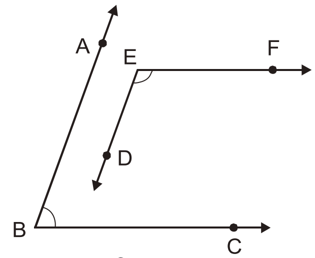
4. चित्र चित्र 5.33 में $\angle 1 = 60^\circ$ और $\angle 6 = 120^\circ$ है। दर्शाइए कि m और n समांतर है।



चित्र 5.33

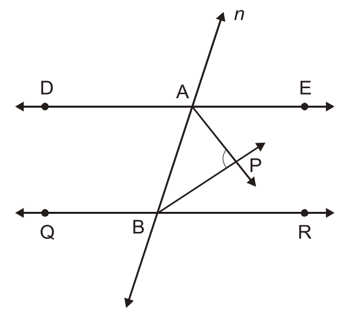
5. AP और BQ उन दो एकान्तर कोणों के समद्विभाजक हैं जो समान्तर रेखाओं ℓ और m के तिर्यक रेखा n द्वारा प्रतिच्छेद से बनते हैं दर्शाइए कि AP||BQ है।

6. चित्र 5.34 में $BA \parallel ED$ और $BC \parallel EF$ है। दर्शाइए कि $\angle ABC + \angle DEF = 180^{\circ}$ है।



चित्र 5.34

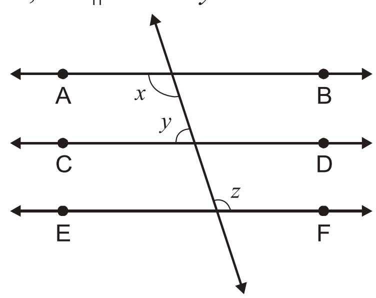
7. चित्र 5.35 में $DE \parallel QR$ तथा AP और BP क्रमशः $\angle EAB$ और $\angle RBA$ के समद्विभाजक हैं। $\angle APB$ का मान ज्ञात कीजिए।



चित्र 5.35

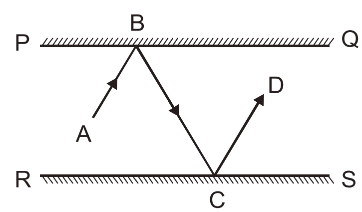
8. दो सरल रेखाएँ क्रमशः दो समान्तर रेखाओं पर लम्ब हैं। दर्शाइए कि ये दोनों सरल रेँखाएंस्पर समान्तर हैं।

9. fp= 5-36 es fn $AB \parallel CD, CD \parallel EF$ और $y : z = 3 : 7$ है तो x का मान ज्ञात कीजिए।



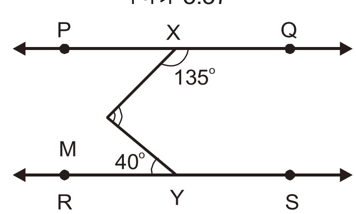
चित्र 5.36

10. चित्र 5.37 में PQ और RS दो दर्पण हैं जो परस्पर समांतर हैं। एक आपतित किरण AB दर्पण PQ के बिन्दु B से परावर्तित होकर पथ BC पर चलकर दर्पण RS के बिन्दु C से पुनः परावर्तित होकर पथ CD के अनुदिश चलती है, तो सिद्ध कीजिए $AB \parallel CD$ है।



चित्र 5.37

11. चित्र 5.38 में यदि $PQ \parallel RS$, $\angle MXQ = 13.5^{\circ}$ और $\angle MYR = 40^{\circ}$ है, तो $\angle XMY$ ज्ञात कीजिए।



चित्र 5.38