अध्याय

7

त्रिभुजों की सर्वांगसमता एवं असमिकाएँ
(Congruence and Inequalities of Triangles)

7.01 प्रस्तावना

पूर्व में आप त्रिभुज एवं त्रिभुजों के गुणधर्मों का अध्ययन कर चुके हैं। इस अध्याय में आप त्रिभुजों की सर्वांगसमता, सर्वांगसता के नियमों, त्रिभुजों के कुछ अन्य गुणधर्मों तथा त्रिभुज की असमिकाओं का विस्तार से अध्ययन करेंगे।

7.02 त्रिभुजों की सर्वांगसमता (Congruence of triangles) :

आपने कभी एक फोटोग्राफर से स्वयं की एक ही साइज की एक से अधिक फोटों प्रतियाँ अवश्य बनवाई होगी। इसी प्रकार अपनी माँ के हाथों में एक ही माप की चूड़ियाँ तथा एक ही फोटो युक्त डाक टिकिट आदि देखें होंगे। ऐसी सभी आकृतियाँ सर्वांगसम (identical) होती है। आप यदि इनमें से किन्ही दो सर्वसम आकृतियों का चयन करके एक को दूसरे पर रख कर देखेंगे तो, वे एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेते हैं।

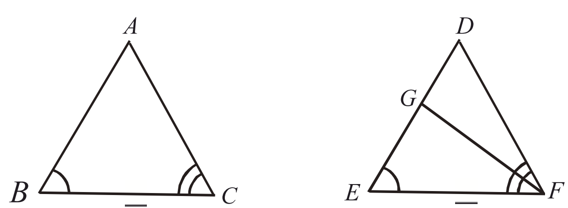
क्या आप जानते हैं कि ऐसी आकृतियाँ ज्यॉमिति में किस नाम से जानी जाती है? इन्हें सर्वांगसम आकृतियाँ (Congruent figures) कहते हैं।

सर्वांगसम का अर्थ है 'सभी प्रकार से समान' अर्थात वे आकृतियाँ जिनका आकार एवं माप समान हो।

प्रमेय 6.1* : कोण–भुजा–कोण नियम (A S A Rule) :

यदि एक त्रिभुज के कोई दो कोण और उनकी अन्तरित भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और उनकी अन्तरित भुजा के बराबर हो, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

दिया है : ABC एवं DEF दो त्रिभुज हैं, जहाँ $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle ACB = \angle DFE$ एवं $BC = EF$ है।



चित्र 7.01

सिद्ध करना है : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

उपपत्ति : यहाँ दोनों त्रिभुजों ABC एवं DEF की भुजा AB एवं DE की लम्बाई की तुलना करने पर निम्न तीन स्थितियाँ संभव है :

(i) $AB = DE$ (ii) $AB < DE$ एवं (iii) $AB > DE$

स्थिति (i) : यदि $AB = DE$ हो तों ΔABC एवं ΔDEF में

$AB = DE$ (माना)

$\angle ABC = \angle DEF$ (दिया है)

$BC = EF$ (दिया है)

अतः ΔABC एवं ΔDEF भुजा–कोण–भुजा नियम से सर्वांगसम हैं।

अर्थात् $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

स्थिति (ii) : जब $AB < DE$ हो तो भुजा DE पर एक बिन्दु G इस प्रकार लिया कि $AB = GE$ एवं GF को (चित्र 6.01) मिलाया।

ΔABC एवं ΔGEF के लिए

$AB = GE$ (माना)

$BC = EF$ (दिया है)

$\angle ABC = \angle GEF$ (दिया है) $[\because \angle GEF = \angle DEF]$

अर्थात् भुजा –कोण–भुजा नियम से $\Delta ABC \cong \Delta GEF$

अतः $\angle ACB = \angle GFE$ $\ldots(1)$

एवं $\angle ACB = \angle DFE$ (दिया है) $\ldots(2)$

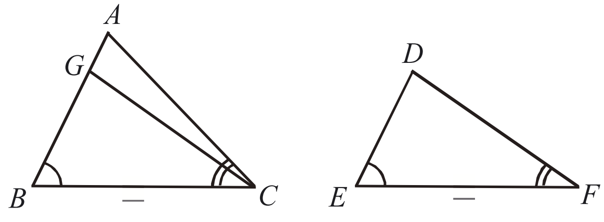
(1) व (2) से $\angle GFE = \angle DFE$ जो तब तक असंभव है जब तक GF, DF के साथ सम्पाती नहीं हो जाये अर्थात्

G एवं D सम्पाती है। $\therefore$ $AB = DE$

अतः भुजा–कोण–भुजा नियम से

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

स्थिति (iii) : जब $AB > DE$ हो तो चित्र 7.02 के अनुसार ΔABC में भुजा AB पर एक बिन्दु G इस प्रकार लिया कि $BG = ED$ हो,



चित्र 7.02

यहाँ स्थिति (ii) के अनुसार हम सिद्ध कर सकते है कि बिन्दु G, बिन्दु A के सम्पाती होगा अर्थात् $AB = DE$ और भुजा–कोण– भुजा नियम से $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

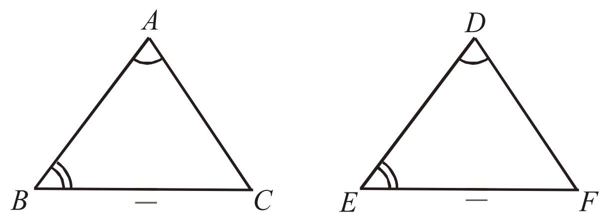
इसलिए सभी तीनों स्थितियों में $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. "इतिसिद्धम्"

टिप्पणी : हम जानते हैं कि त्रिभुज के तीनों अन्तः कोणों का योग $180°$ होता हैं, इसलिए जब त्रिभुज के दो कोण दूसरे त्रिभुज के दो कोणों के बराबर हो, तो दोनों त्रिभुजों के तीसरे कोण स्वतः ही समान हो जायेंगे। इस नियम के आधार पर निम्न उप प्रमेय को सिद्ध करेंगे।

उप प्रमेय : कोण–कोण–भुजा नियम : (AAS)

यदि एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों और संगत भुजा के बराबर हो तो त्रिभुज सर्वांगसम होते है।

दिया है : ΔABC एवं ΔDEF में $\angle B = \angle E; \angle A = \angle D$ एवं भुजा BC =भुजा EF.



चित्र 7.03

सिद्ध करना है : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

उपपत्ति : हम जानते हैं कि त्रिभुज के तीनों अन्तः कोणों का योग $180°$ होता है, अतः

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180° \quad \ldots(1)$$

$$\angle D + \angle E + \angle F = 180° \quad \ldots(2)$$

(1) व (2) से $\angle A + \angle B + \angle C = \angle D + \angle E + \angle F \quad \ldots(3)$

दिया है कि $\angle B = \angle E \qquad \angle A = \angle D$

अतः $\angle C = \angle F$ [(3) से] $\ldots(4)$

अब ΔABC एवं ΔDEF में

$\angle B = \angle E$ (दिया है)

$BC = EF$ (दिया है)

$\angle C = \angle F$ [(4) से]

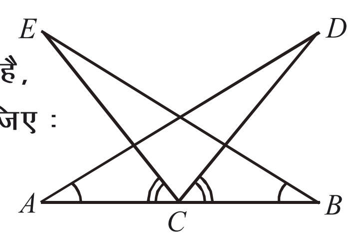
अर्थात् कोण–भुजा–कोण नियम से $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. इतिसिद्धम्।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1: चित्र 7.04 में, AB का मध्य बिन्दु C है, $\angle BCD = \angle ACE$ एवं $\angle DAB = \angle EBA$ हो, तो सिद्ध कीजिए :

(i) $\Delta DAC \cong \Delta EBC$

(ii) $DA = EB$.



चित्र 7.04

हल : दिया है : चित्र 6.04 में

$AC = BC,\ \angle DAB = \angle EBA$ एवं $\angle BCD = \angle ACE$

सिद्ध करना है : (i) $\Delta DAC \cong \Delta EBC$ (ii) $DA = EB.$

उपपत्ति : दिया हुआ है कि C, भुजा AB का मध्य बिन्दु है

अतः $AC = BC$ $\quad\ldots(1)$

एवं $\angle BCD = \angle ACE$ (दिया हुआ है) $\quad\ldots(2)$

दोनों पक्षों में $\angle DCE$ जोड़ने पर

$$\angle BCD + \angle DCE = \angle ACE + \angle DCE$$

या $\angle ECB = \angle DCA$ $\quad\ldots(3)$

अब ΔDAC एवं ΔEBC में

$\angle DAC = \angle EBC$ (दिया हुआ है)

$AC = BC$ $\left[(1) \text{ से}\right]$

$\angle DCA = \angle ECB$ $\left[(3) \text{ से}\right]$

$\because$ कोण–भुजा–कोण गुणधर्म से

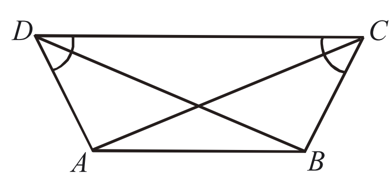
$\Delta DAC \cong \Delta EBC$

एवं सर्वांगसमता गुणधर्म से दोनों त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होती हैं।

अतः $DA = EB$ "इतिसिद्धम्"।

उदाहरण 2: चित्र 7.05 में, एक चतुर्भुज $ABCD$ में $BC = AD$ एवं $\angle ADC = \angle BCD$ हो, तो सिद्ध कीजिए :

(i) $AC = BD$ (ii) $\angle ACD = \angle CDB$.



चित्र 7.05

हल : चित्र 6.05 के अनुसार दिया हुआ है कि

$BC = AD$ एवं $\angle ADC = \angle BCD$

अतः ΔADC एवं ΔBCD में

$AD = BC$ (दिया है)

$CD = CD$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle ADC = \angle BCD$ (दिया है)

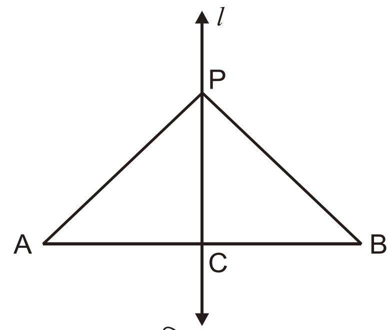
अतः भुजा–कोण–भुजा से $\Delta ADC \cong \Delta BCD$ है।

अतः संगत भुजाएँ एवं संगत कोण समान होंगे

अर्थात् $AC = BD$ एवं $\angle ACD = \angle CDB$. "इतिसिद्धम्"।

उदाहरण 3: AB एक रेखाखंड है और रेखा ℓ इसका लम्ब समद्विभाजक है। यदि ℓ पर स्थित कोई बिन्दु P है, तो दर्शाइए कि P, बिन्दुओं A और B से समदूरस्थ (equidistant) है।

हल : AB एक रेखाखण्ड है और AB के मध्य–बिन्दु C से होकर जाती है (देखिए चित्र 7.06)। आपको दर्शाना है कि $PA = PB$ है। इसके लिए ΔPCA और ΔPCB पर विचार कीजिए। हमें प्राप्त है:



चित्र 7.06

$AC = BC$ (C, AB का मध्य–बिन्दु है)

$\angle PCA = \angle PCB = 90^\circ$ (दिया है)

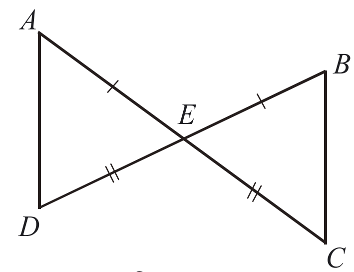
$PC = PC$ (उभयनिष्ठ)

अतः $\Delta PCA \cong \Delta PCB$ (SAS नियम)

इसलिए, $PA = PB$ (सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ) ''इतिसिद्धम्''

उदाहरण 4: चित्र 7.07 में, $AE = EC$ एवं $DE = BE$ हो, तो सिद्ध कीजिए :

(i) $\Delta AED \cong \Delta CEB$ (ii) $\angle A = \angle C$.



चित्र 7.07

हल : चित्र 7.07 के अनुसार दिया हुआ है कि

$AE = EC$

$DE = BE$ ... (1)

अब ΔAED एवं ΔBEC के लिए

$AE = EC$ (दिया है)

$\angle AED = \angle CEB$ (सम्मुख कोण)

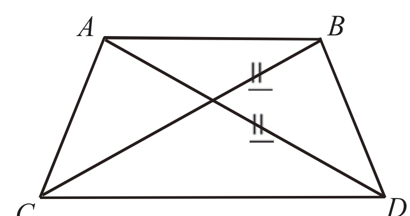
$DE = EB$ (दिया है)

अतः भुजा–कोण–भुजा गुणधर्म से $\Delta AED \cong \Delta CEB$ है एवं इनके संगत कोण $\angle A = \angle C$ एवं $\angle D = \angle B$ होंगे। "इतिसिद्धम्"।

उदाहरण 5: चित्र 7.08 मे, $AD = BC$ एवं $BD = CA$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $\angle ADB = \angle BCA$

(ii) $\angle DAB = \angle CBA$.



चित्र 7.08

हल : प्रश्नानुसार $AD = BC$ एवं $BD = CA$ है

अतः ΔABD एवं ΔABC में

$$\left.\begin{aligned} AD &= BC \\ BD &= CA \end{aligned}\right\}$$ (दिया हुआ है)

$AB = AB$ (उभयनिष्ठ भुजा)

अतः भुजा–भुजा–भुजा गुणधर्म से

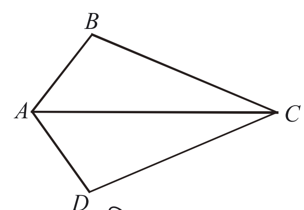
$\Delta ABD \cong \Delta ABC$

अतः संगत कोण

$\angle ADB = \angle BCA$ एवं $\angle DAB = \angle CBA$ "इतिसिद्धम्"।

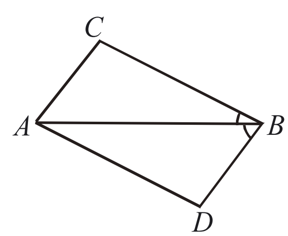
प्रश्नमाला 7.1

1. त्रिभुजों ABC और PQR में $\angle A = \angle Q$ और $\angle B = \angle R$ है। ΔPQR की कौन सी भुजा ΔABC की भुजा AB के बराबर होनी चाहिए कि दोनों त्रिभजु सर्वांगसम हों? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।
2. त्रिभुजों ABC और PQR में $\angle A = \angle Q$ और $\angle B = \angle R$ है। ΔPQR की कौन–सी भुजा ΔABC की भुजा BC के बराबर होनी चाहिए कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हों? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।
3. यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ और एक कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और एक कोण के बराबर हों, तो दोनो त्रिभुज अवश्य की सर्वांगमम होने चाहिए।'' क्या यह कथन सत्य है? क्यों?
4. ''यदि किसी त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा के बराबर हों, तो त्रिभुज अवश्य ही सर्वांगम होने चाहिए।'' क्या यह कथन सत्य है? क्यों?
5. $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ दिया हुआ है। क्या यह कहना सत्य है कि $BC = QR$ है? क्यों?
6. यदि $\Delta PQR \cong \Delta EDF$ है, तो यह कहना सत्य है कि $PR = EF$ है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।



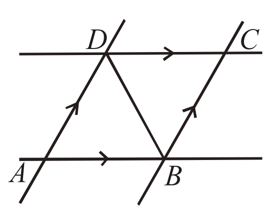
चित्र 7.09

7. चित्र 7.09 में चतुर्भुज $ABCD$ का विकर्ण AC शीर्ष कोण A एवं C का समद्विभाजक हो, तो सिद्ध कीजिए : $AB = AD$ एवं $CB = CD.$
8. चित्र 7.10 में चतुर्भुज $ADBC$ के $\angle ABC = \angle ABD$ एवं $BC = BD$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\Delta ABC \cong \Delta ABD.$



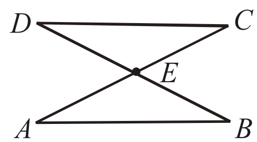
चित्र 7.10

9. चित्र 7.11 के अनुसार, $AB \quad DC$ एवं $AD \quad BC$ हो, तो सिद्ध कीजिए : $\Delta ADB \cong \Delta CBD.$



चित्र 7.11

10. चित्र 7.12 में, यदि AB DC एवं E भुजा AC का मध्यबिन्दु हो, तो सिद्ध कीजिए कि E, भुजा BD का मध्य बिन्दु होगा।



चित्र 7.12

7.03 त्रिभुज के विशेष गुणधर्म

पिछले अनुच्छेद में आपने त्रिभुज की सर्वांगसता की दो कसौटियों का अध्ययन किया हैं। अब इनके परिणामों का उपयोग समद्विबाहु त्रिभुज सम्बन्धित प्रमयों एवं त्रिभुज की सर्वांगसमता की शेष प्रमेयों को सिद्ध करने के लिए करेंगे।

7.04 समद्विबाहु त्रिभुजः

एक त्रिभुज समद्विबाहू त्रिभुज कहलाता है, यदि इसकी दो भुजाएँ समान हो।

प्रमेय 6.3* :

यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ बराबर हों, तो उनके सम्मुख कोण भी बराबर होते हैं।

या

एक समद्विबाहु त्रिभुज की समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते है।

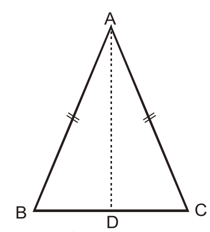
दिया है : $\Delta\, ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है,

जहाँ $AB = AC$ है।

सिद्ध करना है : $\angle B = \angle C$

रचना : $\angle A$ का अर्धक AD खींचा जो BC को D पर मिला।

उपपत्ति : $\Delta\, ABD$ एवं $\Delta\, ACD$ में



चित्र 7.13

$AB = AC$ (दिया है)

$\angle BAD = \angle CAD$ (रचना से)

$AD = AD$ (उभयनिष्ठ भुजा)

भुजा – कोण–भुजा गुणधर्म से, $\Delta\, ABD \cong \Delta\, ACD$

अतः संगत कोण $\angle B = \angle C$ "इतिसिद्धम्" ।

प्रमेय 6.4 :

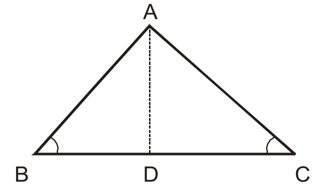
यदि किसी त्रिभुज में दो कोण बराबर हों, तो उनकी सम्मुख भुजाएँ भी बराबर होंगी।

दिया है : $\Delta\, ABC$

जिसमें $\angle B = \angle C$ है।

सिद्ध करना है : $AB = AC$

रचना : $\angle BAC$ का समद्विभाजक AD खींचा।



चित्र 7.14

उपपत्ति : $\Delta\ ABD$ एवं $\Delta\ ACD$ में

$\angle B = \angle C$ (दिया है)

$AD = AD$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle BAD = \angle CAD$ (रचना से)

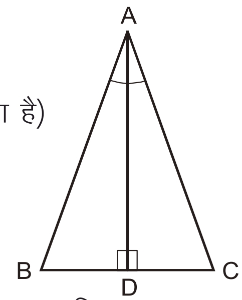
कोण–भुजा–कोण गुणधर्म से

$\Delta\ ABD \cong \Delta\ ACD$

अतः संगत भुजाएँ $AB = AC$ "इतिसिद्धम्" ।

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 6: ΔABC में $\angle A$ का समद्विभाजक AD भुजा BC पर लम्ब है। दर्शाइए ΔABC एक समद्विबाहू त्रिभुज है।



चित्र 7.15

हलः ΔABD वं ΔACD में

$\angle BAD = \angle CAD$ ($\angle A$ का समद्विभाजक AD है, दिया हुआ है)

$AD = AD$ (उभयनिष्ठ भुजा)

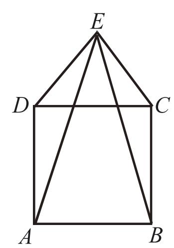
$\angle ADB = \angle ADC = 90^{o}$ (दिया हुआ है)

अतः $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (ASA नियत से)

इसलिए $AB = AC$

इस कारण ΔABC समद्विबाहु है।

उदाहरण 7: चित्र 7.16 के अनुसार $ABCD$ एक वर्ग हैं तथा ΔCDE एक समबाहु हो, तो सिद्ध कीजिए कि $AE = BE$.



चित्र 7.16

हल : दिया है : $ABCD$ एक वर्ग है एवं $\Delta\ CDE$ एक समबाहु त्रिभुज है।

सिद्ध करना है : $AE = BE$

उपपत्ति : $\Delta\ CDE$ एक समबाहु त्रिभुज है।

अतः $CD = DE = CE \quad \ldots(1)$

$\angle DEC = \angle EDC = \angle DCE = 60° \quad \ldots(2)$

एवं $ABCD$ एक वर्ग है अतः

$\angle ADC = \angle BCD = 90°$

दोनों पक्षों में $\angle EDC$ जोड़ने पर

$\angle ADC + \angle EDC = \angle BCD + \angle EDC$

$\Rightarrow \quad \angle EDA = \angle ECB \quad \ldots(3)$

अब $\Delta\ ADE$ एवं $\Delta\ BCE$ में,

$AD = BC$ (वर्ग की भुजाएँ)

$\angle EDA = \angle ECB$ [(3) से]

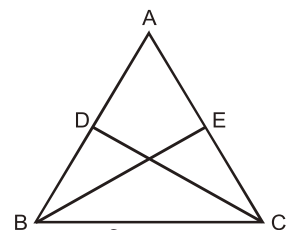
$DE = EC$ [(1) से]

अर्थात् भुजा–कोण–भुजा गुणधर्म से $\Delta\, ADE \cong \Delta\, BCE.$

अतः संगत भुजाएँ $AE = BE$ "इतिसिद्धम्"

उदाहरण 8: सिद्ध कीजिए कि समद्विबाहु त्रिभुज की समान भुजाओं को समद्विभाजित करने वाली माध्यिकाएँ समान होती हैं।

हल : दिया है : एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC में समान भुजाओं AB एवं AC के मध्य बिन्दु D एवं E हैं।



चित्र 7.17

सिद्ध करना है : $BE = CD$

उपपत्ति : $\Delta\, ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसकी भुजाएँ AB एवं AC समान है।

$AB = AC$ $\quad\ldots(1)$

एवं $\angle ABC = \angle ACB$ $\quad\ldots(2)$

एवं D एवं E भुजा AB एवं AC के मध्यबिन्दु है।

अतः $DB = DA = EC = AE$ $\quad\ldots(3)$

अब $\Delta\, BCD$ एवं $\Delta\, BCE$ में,

$BC = BC$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle DBC = \angle ECB$ [(2) से]

$BD = CE$ [(3) से]

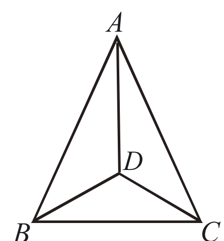
अर्थात् भुजा–कोण–भुजा गुणधर्म से $\Delta\, BCD \cong \Delta\, BCE$ हैं।

अतः संगत भुजाएँ समान होंगी

$BE = CD$ "इतिसिद्धम्"।

उदाहरण 9: चित्र 7.18 में, $AB = AC$ हैं, एवं $\Delta\, ABC$ में D एक ऐसा बिन्दु है कि $\angle DBC = \angle DCB$. सिद्ध कीजिए कि $\angle BAC$ को AD समद्विभाजित करता है।

हल : दिया है : $\Delta\, ABC$ में $AB = AC$ एवं $\angle DBC = \angle DCB.$



चित्र 7.18

सिद्ध करना है : AD कोण BAC का समद्विभाजक है।

अर्थात् $\angle BAD = \angle CAD$

उपपत्ति : $\Delta\, BDC$ में $\angle DBC = \angle DCB$ है अतः इनकी सम्मुख भुजाएँ भी बराबर होगी।

अतः $CD = BD$ $\quad\ldots(1)$

अब $\Delta\, ABD$ एवं $\Delta\, ACD$ में

$BD = CD$ [(1) से]

$AD = AD$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$AB = AC$ (दिया है)

अर्थात् भुजा–भुजा–भुजा गुणधर्म से $\Delta\, ABD \cong \Delta\, ACD.$

अतः संगत कोण समान होंगे $\angle BAD = \angle CAD.$

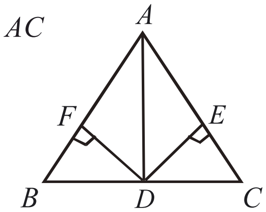
अतः $AD, \angle BAC$ का समद्विभाजक है। "इतिसिद्धम्"।

उदाहरण 10: यदि एक त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिन्दु से दूसरी दो भुजाओं पर डाले गये लम्ब समान हो, तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज समद्विबाहु होगा।

हल : दिया है : ΔABC की भुजा BC का मध्य बिन्दु D हैं, एवं DE और DF क्रमशः AC एवं AB पर लम्ब है एवं $DE = DF$.

सिद्ध करना है : ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, अर्थात् $AB = AC$

रचना : AD को मिलाया।



चित्र 7.19

उपपत्ति : $\Delta\, BDF$ एवं $\Delta\, CDE$ में,

कर्ण $BD =$ कर्ण CD (दिया है)

$\angle DFB = \angle DEC = 90°$

एवं $DF = DE$ (दिया है)

अर्थात् समकोण – कर्ण – भुजा गुणधर्म से

$\Delta\, BDF \cong \Delta\, CDE.$

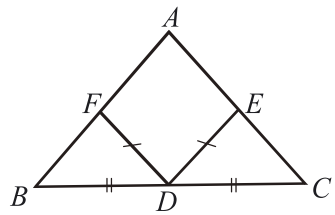
अतः संगत कोण $\angle B = \angle C$ होंगे, एवं दोनों कोणों की सम्मुख भुजाएँ भी समान होंगी, अर्थात् $AB = AC$.

"इतिसिद्धम्" ।

उदाहरण 11: एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC में $AB = AC$ हो, एवं भुजा BC, AC एवं AB के मध्य बिन्दु क्रमशः D, E, F हो, तो सिद्ध कीजिए कि $DE = DF$.

हल : चित्र 7.20 के अनुसार, $\Delta\, ABC$ में

$AB = AC \quad \ldots(1)$



चित्र 7.20

एवं D, E, F भुजाओं के मध्य बिन्दु है

अतः $\Delta\, BDF$ एवं $\Delta\, CDE$ में

$BD = CD$ [D भुजा BC का मध्य बिन्दु है]

$CE = BF$ [दिया है कि $AB = AC$]

एवं $\angle B = \angle C$ [समान भुजाओं के सामने के कोण]

अतः भुजा–कोण–भुजा गुणधर्म से

$\Delta\, BDF \cong \Delta\, CDE$

अतः $DE = DF$

उदाहरण 12: चित्र 7.21 में, ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसका कोण B समकोण इस प्रकार है कि $\angle BCA = 2\angle BAC$ है। दर्शाइए कि कर्ण AC = 2 BC है।

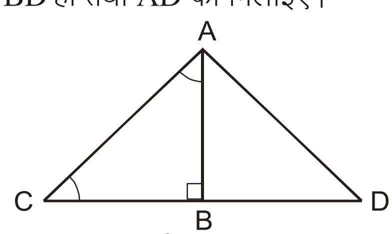
हल : CB को बिन्दु D तक इस प्रकार बढ़ाइए कि BC = BD हो तथा AD को मिलाइए।

ΔABC और ΔABD में,

BC = BD (रचना से)

AB = AB (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle ABC = \angle ABD$ (प्रत्येक 90^0 है)



चित्र 7.21

इसलिए$\Delta ABC \cong \Delta ABD$ (SAS)

अतः, $\angle CAB = \angle DAB$ (1)

और $AC = AD$ (2)

इस प्रकार, $\angle CAD = \angle CAB + \angle BAD = 2\angle CAB$ [(1) से] (3)

परन्तु $\angle ACB = 2\angle CAB$ अर्थात् $\angle CAD = 2\angle ACB$ (4)

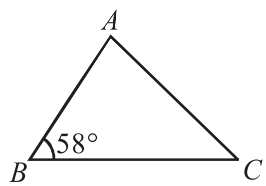
तथा $\angle ACD = \angle ADB$ (5)

अर्थात् ΔACD एक समबाहु त्रिभुज है। [(3) और (4) से]

अर्थात् $AC = CD$, या $AC = 2\,BC$ (क्योंकि $BC = BD$) ''इतिसिद्धम्''।

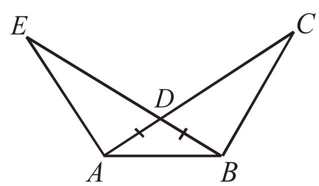
प्रश्नमाला 7.2

1. चित्र 7.22 में, $AB = AC$ एवं $\angle B = 58°$ हो तो $\angle A$ का मान ज्ञात कीजिए।



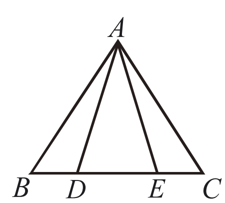
चित्र 7.22

2. चित्र 7.23 में, $AD = BD$ एवं $\angle C = \angle E$ हो, तो सिद्ध कीजिए $BC = AE$.



चित्र 7.23

3. यदि एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC की माध्यिका AD हो तथा $\angle A = 120°$ एवं $AB = AC$ हो, तो $\angle ADB$ का मान ज्ञात कीजिए।
4. यदि त्रिभुज के किसी कोण का सम द्विभाजक सम्मुख भुजा को भी समद्विभाजित करता है, तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज समद्विबाहु होगा।
5. चित्र 7.24 में, $AB = AC$ एवं $BE = CD$ हो, तो सिद्ध कीजिए $AD = AE$.

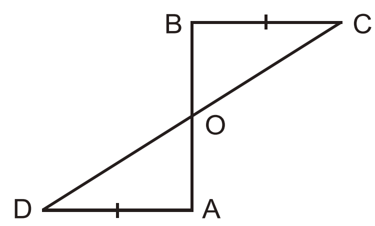


चित्र 7.24

6. एक वर्ग $ABCD$ की भुजाओं AD एवं BC पर क्रमशः E एवं F दो बिन्दु इस प्रकार है कि $AF = BE$ तो सिद्ध कीजिए कि

   (i) $\angle BAF = \angle ABE$ (ii) $BF = AE$

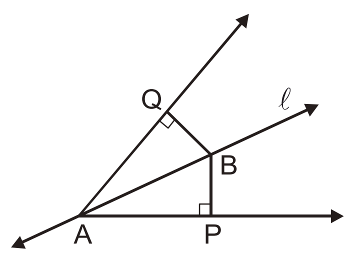
7. एक रेखाखंड AB पर AD और BC दो बराबर लंब रेखाखंड हैं (देखिए चित्र 7.25)। दर्शाइए कि CD, रेखाखंड AB को समद्विभाजित करता है।



चित्र 7.25

8. $AB = AC$ वाले एक समद्विबाहु त्रिभुज के कोणों B और C के समद्विभाजक परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। BO को एक बिन्दु M तक बढ़ाया जाता है। सिद्ध कीजिए $\angle MOC = \angle ABC$ है।

9. रेखा ℓ कोण A को समद्विभाजित करती है और B रेखा ℓ पर स्थित कोई बिन्दु है। BP और BQ कोण A की भुजाओं पर B से डाले गए लम्ब हैं (देखिए चित्र 7.26)। दर्शाइए कि

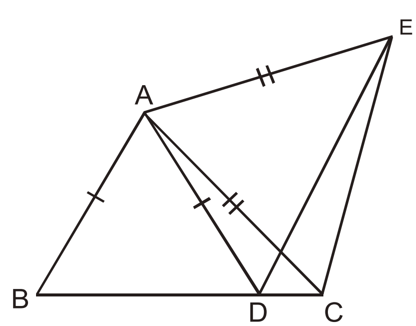


चित्र 7.26

(i) $\Delta APB \cong \Delta AQB$

(ii) $BP = BQ$ है, अर्थात् बिन्दु B कोण की भुजाओं से समदूरस्थ है

11. चित्र 7.27 में, $AC = AE, AB = AD$ और $\angle BAD = \angle EAC$ है। दर्शाइए कि $BC = DE$ है।



चित्र 7.27

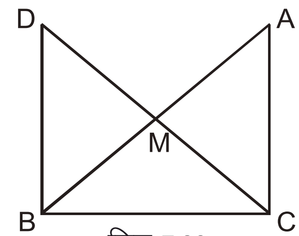
12. एक समकोण त्रिभुज ABC में, जिसमें कोण C समकोण है, M कर्ण AB का मध्य–बिन्दु है। C को M से मिलाकर D तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि DM = CM है। बिन्दु D को बिन्दु B से मिला दिया जाता है (देखिए आकृति 7.28)। दर्शाइए कि

(i) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$

(ii) $\angle DBC$ एक समकोण है

(iii) $\Delta DBC \cong \Delta ACB$

(iv) $CM = \frac{1}{2} AB$



चित्र 7.28

7.05 त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए कुछ और कसौटियाँ:

एक त्रिभुज के तीनों कोणों से दूसरे त्रिभुज के तीनों कोण बराबर होने पर दोनों त्रिभुजों का सर्वांगसम होना आवश्यक नहीं है।

आपके अनुसार क्या एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर होने पर दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होंगे? निःसन्देह दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होंगे।

आइए अब हम अब तक प्राप्त परिणामों का प्रयोग करके इस प्रमेय को भी सिद्ध करते है।

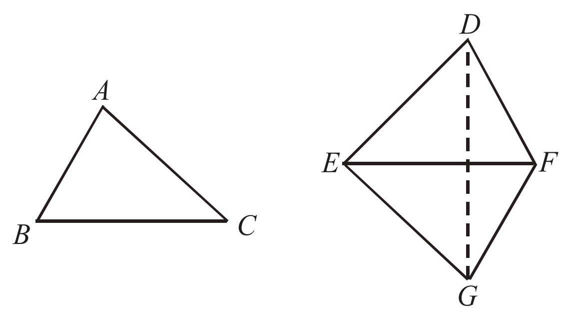
प्रमेय 6.5* : भुजा–भुजा–भुजा नियम (S S S Rule):

यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों संगत भुजाओं के बराबर हों, तो दोनो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

दिया है : ΔABC एवं ΔDEF की संगत भुजाएँ समान है

अर्थात् $AB = DE; BC = EF$ एवं $AC = DF$

सिद्ध करना है : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



चित्र 7.29

रचना : ΔDEF के दूसरी ओर रेखा खण्ड EG इस प्रकार खींचा कि $EG = AB$ हो एवं $\angle ABC = \angle FEG$ हो। GF एवं DG को मिलाया।

उपपत्ति : ΔABC एवं ΔGEF में,

$AB = GE$ (रचना से)

$\angle ABC = \angle GEF$ (रचना से)

$BC = EF$ (दिया है)

अर्थात् भुजा–कोण–भुजा गुणधर्म से $\Delta\, ABC \cong \Delta\, GEF$ है,

अतः दोनों भुजाओं के संगत कोण एवं संगत भुजा समान हैं

$$\angle A = \angle G; \quad AB = GF \qquad \ldots(1)$$

अब $AB = EG$ (रचना से) एवं $AC = DF$ (दिया है)

अतः $\quad EG = DE \qquad \ldots(2)$

इसी प्रकार $AC = GF$ समीकरण (1) से एवं $AC = DF$ (दिया है)

अतः $\quad GF = DF \qquad \ldots(3)$

अर्थात् $\Delta\, EDG$ में समान भुजाओ EG एवं DE के सम्मुख कोण समान होंगे,

$$\angle EDG = \angle EGD \qquad \ldots(4)$$

इसी प्रकार $\Delta\, FDG$ में भी समान भुजाओं GF एवं DF के सम्मुख कोण समान होंगे,

$$\angle GDF = \angle DGF \qquad \ldots(5)$$

(4) व (5) से

$$\angle EDG + \angle GDF = \angle EGD + \angle DGF$$

$$\Rightarrow \quad \angle D = \angle G \qquad \ldots(6)$$

परन्तु समीकरण (1) से

$$\angle A = \angle G \qquad \ldots(7)$$

अर्थात् (6) व (7) से

$$\angle A = \angle D \qquad \ldots(8)$$

अतः $\Delta\, ABC$ एवं $\Delta\, DEF$ के लिए

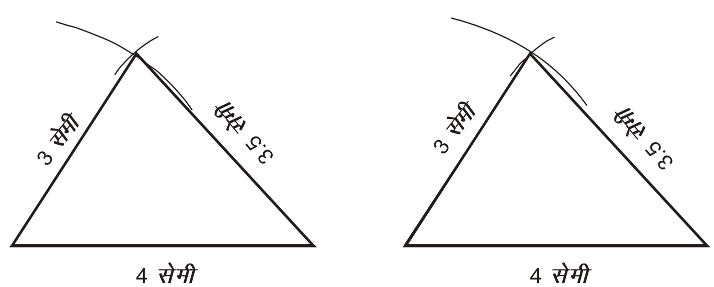
$AB = DE$ (दिया है)

$\angle A = \angle D$ $\quad$ [(8) से]

$AC = DF$ (दिया है)

अतः भुजा–कोण–भुजा गुणधर्म से $\Delta\, ABC \cong \Delta\, DEF$. इतिसिद्धम्।

अब इस प्रमेय को क्रिया कलाप द्वारा हम निम्नानुसार सत्यापित करने का भी प्रयत्न करते हैं। 4 सेमी, 3.5 सेमी एवं 3 सेमी भुजाओं को लेकर दो त्रिभुजों की रचना चित्रानुसार करते है।



चित्र 7.30

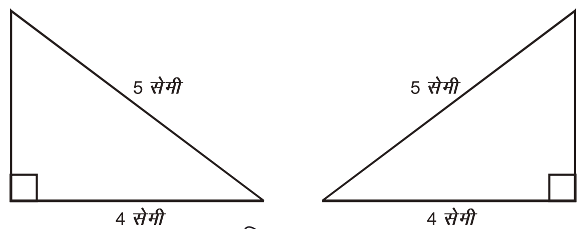
अब इन्हें काट कर एक दूसरे पर रखिए। आप क्या देखते हैं? यदि बराबर भुजाओं का ध्यान रख कर एक को दूसरे पर रखते हैं तो एक त्रिभुज दूसरे त्रिभुज को ढक लेता है। यह तभी सम्भव है जब दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हो।

अर्थात्– दोनों त्रिभुज सर्वांगसम ही है।

आप SAS सर्वांगसमता नियम में पहले ही देख चुके हैं कि बराबर कोणों के युग्म संगत बराबर भुजाओं के युग्मों के बीच में (अंतर्गत) होने चाहिए और यदि ऐसा नहीं हो, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम नहीं भी हो सकते हैं।

आइए निम्न क्रिया कलाप करके देखते हैं।

दो समकोण त्रिभुज ऐसे खींचिए जिनमें प्रत्येक का कर्ण 5 सेमी और एक भुजा 4 cm की हो (देखिए चित्र 7.31)



चित्र 7.31

इन्हें काटिए और एक दूसरे पर इस प्रकार रखिए कि इनकी बराबर भुजाएँ एक दूसरे पर आएँ। यदि आवश्यक हो, तो त्रिभुजों को घुमाइए। आप क्या देखते हैं?

आप देखते हैं कि दोनों त्रिभुज एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेते हैं और इसीलिए ये सर्वांगसम हैं। यदि क्रियाकलाप समकोण त्रिभुजों के अन्य युग्म लेकर दोहराइए। आप क्या दखते हैं?

आप पाएँगे कि दोनों समकोण त्रिभुज सर्वांगसम होंगे, यदि उनके कर्ण बराबर हों और भुजाओं का एक युग्म बराबर हो।

ध्यान दीजिए कि इस स्थिति में समकोण कर्ण एवं भुजा के अंतर्गत कोण नहीं है।

इस प्रकार, आप समकोण त्रिभुजों के लिए एक महत्वपूर्ण तथ्य पर पहुँच गए है जिसे प्रमेय के रूप में लिखकर सत्यापित करते है।

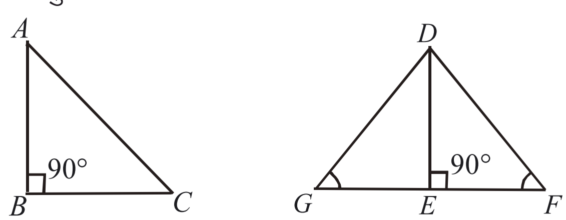
प्रमेय 6.6 (RHS सर्वांगसम नियम): यदि दो समकोण त्रिभुजों में, एक त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

(ध्यान दीजिए कि यहाँ RHS समकोण (Right angle)– कर्ण (Hypotenuse)-भुजा (side) को दर्शाता है।)

दिया है : दो समकोण त्रिभुज ABC एवं $\Delta\, DEF$ में $\angle B = \angle E = 90°$ है,

कर्ण $AC =$ कर्ण DF

एवं भुजा $AB =$ भुजा DE.



चित्र 7.32

सिद्ध करना है : $\Delta\, ABC \cong \Delta\, DEF$

रचना : $\Delta\, DEF$ में E को G तक आगे इस प्रकार बढ़ाया कि $GE = BC$ हो एवं G को D से मिलाया।

उपपत्ति : यहाँ $\angle DEF = 90°$ हैं

अतः $\angle DEG = 90°$ होगा। $\ldots(1)$

अब $\Delta\, ABC$ एवं $\Delta\, DEG$ में,

$AB = DE$ (दिया है)

$BC = GE$ (रचना से)

$\angle ABC = \angle DEG = 90°$ [(1) से]

अर्थात् भुजा–कोण–भुजा गुणधर्म से $\Delta\, ABC$ एवं $\Delta\, DEG$ सर्वांगसम है, अतः इनके संगत कोण एवं संगत भुजाएँ बराबर होंगे

अतः $AC = DG$ एवं $\angle C = \angle G$ $\ldots(2)$

परन्तु दिया हुआ है कि $AC = DF$ $\ldots(3)$

(2) व (3) से $DG = DF$ $\ldots(4)$

$\because \Delta\, DGF$ में समान भुजाओं $(DG = DF)$ के सम्मुख कोण समान होगे

अतः $\angle G = \angle F$ $\ldots(5)$

(2) व (5) से $\angle C = \angle F$ $\ldots(6)$

अब $\Delta\, ABC$ एवं $\Delta\, DEF$ में,

$AB = DE$ (दिया है)

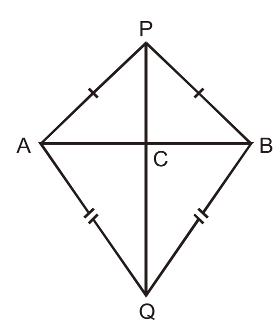
$\angle C = \angle F$ [(6) से]

एवं $\angle ABC = \angle DEF = 90°$ (दिया है)

अर्थात् कोण–कोण–भुजा गुणधर्म से $\Delta\, ABC$ एवं $\Delta\, DEF$ सर्वांगसम है। "इतिसिद्धम्" ।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 13: AB एक रेखाखंड है तथा बिन्दु P और Q इस रेखाखंड AB के विपरीत ओर इस प्रकार स्थित हैं कि इनमें से प्रत्येक A और B से समदूरस्थ है (देखिए चित्र 7.33)। दर्शाइए कि रेखा PQ रेखाखंड AB का लम्ब समद्विभाजक है।



चित्र 7.33

हल : यहाँ PA = PB और QA = QB दिया हुआ है। हमें दर्शाना है कि $PQ \perp AB$ है और PQ रेखाखंड AB को समद्विभाजित करती है। मान लीजिए रेखा PQ रेखाखंड AB को C पर प्रतिच्छेद करती है।क्या आप इस आकृति में दो सर्वांगम त्रिभुजों को देख सकते हैं?

आइए Δ PAQ और Δ PBQ लें।

इन त्रिभुजों में,

$AP = BP$ (दिया है)
$AQ = BQ$ (दिया है)
$PQ = PQ$ (उभयनिष्ठ भुजा)

अतः, $\Delta PQA \cong \Delta PBQ$ (SSS नियम)

इसलिए, $\angle PAQ = \angle BPQ$

अब ΔPAC और ΔPBC को लीजिए। आपको प्राप्त है:

$AP = BP$ (दिया है)
$\angle APC = \angle BPC$ ($\angle APQ = \angle BPQ$ ऊपर सिद्ध किया है)
$PC = PC$ (उभयनिष्ठ भुजा)

अतः, $\Delta PAC \cong \Delta PBC$

और $\angle ACP = \angle BCP$

एवं $AC = CB$ . . . (i)

साथ ही, $\angle ACP + \angle BCP = 180^\circ$ (रैखिक युग्म)

इसलिए, $2\angle ACP = 180^\circ$

या, $\angle ACP = 90^\circ$ . . . (2)

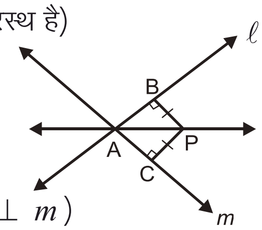
(1) और (2) से, आप निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि रेखा PQ रेखाखंड AB का लम्ब समद्विभाजक है।

ध्यान दीजिए कि ΔPAQ और ΔPBQ की सर्वांगसमता दर्शाए बिना, आप यह नहीं दिखा सकते कि $\Delta PAC = PBC$ है, यद्यपि $AP = BP$ (दिया है), $PC = PC$ (उभयनिष्ठ) और $\angle PAC = \angle PBC$ (ΔPAB में बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण) है। यह इस कारण है कि इससे हमें SSA नियम प्राप्त होता है, जो त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए सदैव मान्य नहीं है। साथ ही, कोण बराबर भुजाओं के अंतर्गत नहीं है।

आइए कुछ और उदाहरण लें।

उदाहरण 14: बिन्दु A पर प्रतिच्छेद करने वाली दो रेखाओं ℓ और m से समदूरस्थ एक बिन्दु P है (देखिए चित्र 7.34)। दर्शाइए कि रेखा AP दोनों रेखाओं के बीच के कोण को समद्विभाजित करती है।

हल : आपको दिया है कि रेखाएँ ℓ और m परस्पर A पर प्रतिच्छेद करती हैं। मान लीजिए $PB \perp \ell$ और $PC \perp m$ है। यह दिया है कि $PB = PC$ है। ($\because$ P, ℓ व m से समदूरस्थ है)



चित्र 7.34

आपको दर्शाना है कि $\angle PAB = \angle PAC$ है।

अब, ΔPAB और ΔPAC में,

$PB = PC$ (दिया है)
$\angle PBA = \angle PCA = 90^\circ$ ($PB \perp \ell$ एवं $PC \perp m$)
$PA = PA$ (कर्ण उभयनिष्ठ)

अतः $\Delta PAB \cong \Delta PAC$ (RHS नियम)

इसलिए, $\angle PAB = \angle PAC$

प्रश्नमाला 7.3

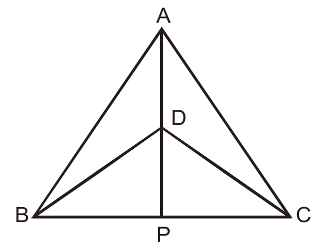
1. ΔABC और ΔDBC एक ही आधार BC पर बने दो समद्विबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि A और D भुजा BC के एक ही ओर स्थित हैं (देखिए चित्र 7.35)। यदि AD बढ़ाने पर BC को P पर प्रतिच्छेद करे, तो दर्शाइए कि

   (i) $\Delta ABD \cong \Delta ACD$

   (ii) $\Delta ABP \cong \Delta ACP$

   (iii) AP कोण A और कोण D दोनों को समद्विभाजित करता है।

   (iv) AP रेखाखंड BC का लम्ब समद्विभाजक है।



चित्र 7.35

2. AD एक समद्विभाबहु त्रिभुज ABC का एक शीर्षलम्ब है, जिसमें AB = AC है। दर्शाइए कि

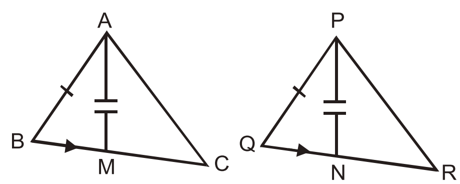
   (i) AD रेखाखंड BC को समद्विभाजित करता है।

   (ii) AD कोण A को समद्विभाजित करता है।

3. एक त्रिभुज ABC की दो भुजाएँ AB और BC तथा माध्यिका AM क्रमशः एक दूसरे त्रिभुज की भुजाओं PQ और QR तथा माध्यिका PN के बराबर हैं (देखिए चित्र 7.36)। दर्शाइए कि

   (i) $\Delta ABM \cong \Delta PQN$

   (ii) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$



चित्र 7.36

4. BE और CF एक त्रिभुज ABC के दो बराबर शीर्षलम्ब हैं।RHS सर्वांगसमता नियम का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

5. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है। $AP \perp BC$ खींच कर दर्शाइए कि $\angle B = \angle C$ है।

7.06 एक त्रिभुज की असममिकाएँ:

पिछले अध्याय में आपने सरल रेखीय आकृतियाँ के अन्तर्गत त्रिभुज की भुजाओं के आधार पर विषम बाहु त्रिभुज, सम द्विबाहु त्रिभुज तथा समबाहुत्रिभुज और कोणों के आधार पर न्यूनकोण त्रिभुज, समकोण त्रिभुज एवं अधिक कोण त्रिभुज के बारे में संक्षिप्त जानकारी प्राप्त की है।

क्या आपने कभी यह सोचा है, कि त्रिभुज की भुजाओं के माप बदलने पर उसके कोणों के माप भी बदल जाते है और यदि त्रिभुज के कोणों के माप बदलें तो भुजाओं के माप भी बदल जाते है। क्यों?

आइए अब हम निम्न क्रिया कलापों और प्रमेयों के माध्यम से इन्हें समझने का प्रयन्त करते है

प्रमेय 6.7*

यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ असमान हों, तो बड़ी भुजा के सामने का कोण छोटी भुजा के सामने के कोण से बड़ा होता है।

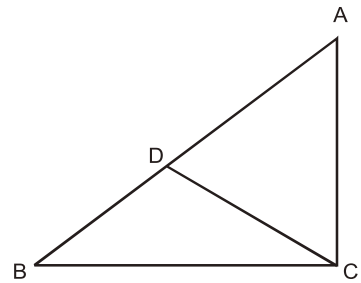
दिया है : त्रिभुज ABC में $AB > AC$

सिद्ध करना है : $\angle C > \angle B$

रचना : शीर्ष C से CD रेखा इस प्रकार खींची कि $AC = AD$ हो।

उपपत्ति : रचना से $\Delta\, ACD$ में भुजा $AC = AD$ समान है

अतः इनके सम्मुख कोण भी समान होंगे।



चित्र 7.37

अतः $\angle ACD = \angle ADC \quad \ldots(1)$

$\because \angle ADC$ त्रिभुज BDC का बहिष्कोण है

अतः $\angle ADC > \angle B \quad \ldots(2)$

(1) व (2) से $\angle ACD > \angle B \quad \ldots(3)$

चित्र से $\angle ACB > \angle ACD \quad \ldots(4)$

(3) व (4) से $\angle ACB > \angle ACD > \angle B$

$\Rightarrow \quad \angle ACB > \angle B$

अर्थात् $\angle C > \angle B.$

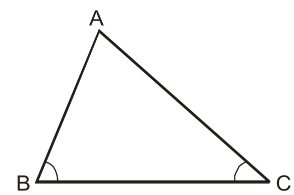
प्रमेय 6.8 (प्रमेय 6.1 का विलोम)

किसी त्रिभुज में बड़े कोण की सम्मुख भुजा छोटे कोण की सम्मुख भुजा से बड़ी होती है।

दिया है : त्रिभुज ABC में $\angle B > \angle C$

सिद्ध करना है : $AC > AB$

उपपत्ति : $\Delta\, ABC$ की भुजा AC एवं AB के लिए निम्नलिखित तीन संभावनाएँ हो सकती हैं जिनमें से केवल एक ही संभव है :



चित्र 7.38

(i) $AC = AB$

(ii) $AC < AB$ एवं

(iii) $AC > AB$

स्थिति (i) : जब $AC = AB$ हो ,

यदि $AC = AB$ हो तो $\Delta\, ABC$ में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होंगे अर्थात् $\angle B = \angle C$ जो कि असंभव है क्योंकि दिया हुआ है कि $\angle B > \angle C$.

अतः $AC \neq AB.$

स्थिति (ii) : जब $AC < AB$ हो,

हम जानते हैं कि बड़ी भुजा के सामने का कोण बड़ा होता है

अतः $AC < AB \quad \Rightarrow \quad \angle C < \angle B$

जो दिये गये तथ्य का विरोधाभासी है अतः $AC \not< AB.$

स्थिति (iii) : जब $AC > AB$ हो,

अब हमारे पास केवल तीसरी संभावना शेष है जो अवश्य सत्य होगी, अर्थात्

$AC > AB.$ "इतिसिद्धम्"

प्रमेय 6.9 $*$:

किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का योग उसकी तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

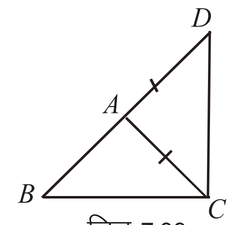
दिया है : एक त्रिभुज ABC है।

सिद्ध करना है :

(i) $AB + BC > AC$

(ii) $BC + AC > AB$

(iii) $AC + AB > BC$



चित्र 7.39

रचना : भुजा BA को D तक इस प्रकार आगे बढ़ाया कि $AD = AC$ हो।

उपपत्ति : ΔADC में रचना से $AD = AC$ है अतः इनके सम्मुख कोण बराबर होंगे।

अतः $\quad \angle ACD = \angle ADC \quad \ldots(1)$

एवं $\quad \angle BCD > \angle ACD \quad \ldots(2)$

(1) व (2) से $\quad \angle BCD > \angle ADC = \angle BDC$

अतः $BD > BC$ [क्योंकि बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है।]

अतः $\quad BD > BC$

$\Rightarrow \quad BA + AD > BC \quad [\because BD = BA + AD]$

$\Rightarrow \quad BA + AC > BC \quad [\because AD = AC$ (रचना से)]

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$AB + BC > AC$

$BC + AC > AB$ "इतिसिद्धम्"।

7.07 रेखा एवं बाह्य बिन्दु से लम्बवत् दूरी

किसी रेखा एवं उसके बाहर स्थित किसी बिन्दु के मध्य दूरी, उस बिन्दु से उस रेखा पर डाले गए लम्ब की लम्बाई के बराबर होती है।

प्रमेय 6.10 $*$

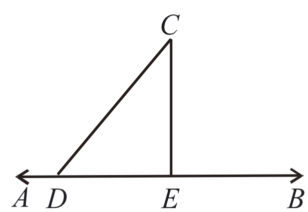
किसी बाह्य बिन्दु से सरल रेखा (रेखा खण्ड) पर खींचे गये सभी रेखा खण्डों में से लम्बवत् रेखा खण्ड ही सबसे छोटा होता है।

दिया है : रेखा AB पर बिन्दु C से रेखा खण्ड CD एवं लम्ब CE को मिलाया।

सिद्ध करना है : $CE < CD$

उपपत्ति : $\Delta\, CED$ में

$\angle CED = 90°$

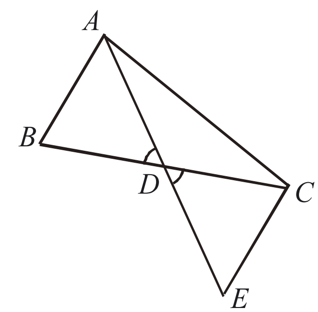


चित्र 7.40

अतः $\angle CDE < \angle CED$ होगा, हम जानते हैं कि बड़े कोण की सम्मुख भुजा सदैव बड़ी होती है। अतः $CD > CE$.

अर्थात् बाह्य बिन्दु से खीचें गये सभी रेखा खण्डो में से लम्बवत् रेखा खण्ड ही सबसे छोटा होता हैं।

दृष्टांतीय उदाहरण



चित्र 7.41

उदाहरण 15: चित्र 7.41 में, AD त्रिभुज ABC की मध्यिका है तो सिद्ध कीजिए कि

$$AB + AC > 2AD$$

(अथवा)

सिद्ध कीजिए कि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा पर खींची गई मध्यिका के दुगुने से अधिक होता है।

हल : दिया है : त्रिभुज ABC की मध्यिका AD है,

सिद्ध करना है : $AB + AC > 2AD$

रचना : चित्रानुसार AD को E तक इस प्रकार आगे बढ़ाया कि $DE = AD$ हो एवं C तथा E को मिलाया।

उपपत्ति : ΔADB एवं ΔEDC में

$AD = DE$ (रचना से)

$BD = DC$ (दिया है)

$\angle ADB = \angle EDC$ (शीर्षाभिमुख कोण)

अर्थात् भुजा–कोण–भुजा गुणधर्म से $\Delta ADB \cong \Delta EDC$

अतः $AB = CE$

अब ΔACE में

$AC + CE > AE$

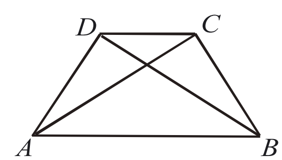
$\Rightarrow \quad AC + AB > AE \quad [\because CE = AB]$

$\Rightarrow \quad AC + AB > 2AD \quad [\because AE = 2AD]$ "इतिसिद्धम्"।

उदाहरण 16: यदि $ABCD$ एक चतुर्भुज हो, तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $AB + BC + CD + DA > 2AC$

(ii) $AB + BC + CD + DA > AC + BD$.



चित्र 7.42

हल : दिया है : चित्र 7.42 के अनुसार एक चतुर्भुज $ABCD$.

सिद्ध करना है : (i) $AB + BC + CD + DA > 2AC$

(ii) $AB + BC + CD + DA > AC + BD$

रचना : विकर्ण AC एवं BD को मिलाया।

उपपत्ति : हम जानते हैं कि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक होता है अतः

ΔABC में $\quad AB + BC > AC \quad \ldots(1)$

ΔADC में $\quad AD + DC > AC \quad \ldots(2)$

ΔABD में $\quad AB + AD > BD \quad \ldots(3)$

ΔBCD में $\quad BC + CD > BD \quad \ldots(4)$

(1) व (2) का योग करने पर

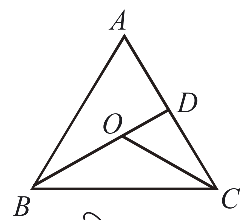
$$AB + BC + AD + CD > 2AC \qquad \ldots(i)$$

पुनः (1), (2), (3) व (4) का योग करने पर

$$2(AB + BC + AD + DC) > 2(AC + BD)$$

$\Rightarrow \quad AB + BC + AD + DC > AC + BD \qquad \ldots(ii)$ "इतिसिद्धम्"।

उदाहरण 17: चित्र 7.43 में ΔABC के अन्दर कोई बिन्दु O हो, तो सिद्ध कीजिए कि $AB + AC > OB + OC$.



चित्र 7.43

हल : दिया है : ΔABC में O एक अन्तः बिन्दु है।

सिद्ध करना है : $AB + AC > OB + OC$

रचना : BO को आगे बढ़ाया जो AC को D पर मिलती हैं।

उपपत्ति : हम जानते हैं कि त्रिभुज में किन्ही दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक होता हैं।

अतः ΔABD में $AB + AD > BD$

$\Rightarrow \quad AB + AD > OB + OD \qquad \ldots(1)$

इसी प्रकार ΔOCD में $\quad OD + DC > OC \qquad \ldots(2)$

(1) व (2) का योग करने पर

$$AB + AD + OD + DC > OB + OD + OC$$

$\Rightarrow \quad AB + (AD + DC) > OB + OC$

$\Rightarrow \quad AB + AC > OB + OC$ "इतिसिद्धम्"।

महत्वपूर्ण बिन्दु

इस अध्याय में, आपने निम्न बिन्दुओं का अध्ययन किया है:

1. दो आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं, यदि उनका एक ही आकार हो और एक ही माप हो।
2. समान त्रिज्याओं वाले दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं।
3. समान भुजाओं वाले दो वर्ग सर्वांगसम होते हैं।
4. यदि त्रिभुज ABC और PQR संगतता $A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$ और $C \leftrightarrow R$ के अंतर्गत सर्वांगसम हों, तो उन्हें सांकेतिक रूप में $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ लिखते हैं।
5. यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और अंतर्गत कोण के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं (SAS सर्वागसमता नियम)।
6. यदि एक त्रिभुज के दो कोण और अंतर्गत भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और अंतर्गत भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं (ASA सर्वांगसमता नियम)।
7. यदि एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और संगत भुजा के बराबर हों, तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं (AAS सर्वांगसमता नियम)।
8. त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।
9. त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।
10. किसी समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60° का होता है।
11. यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं (SSS सर्वांगसमता नियम)।
12. यदि दो समकोण त्रिभुजों में, एक त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं (RHS सर्वांगसमता नियम)।
13. किसी त्रिभुज में, लंबी (बड़ी) भुजा का सम्मुख कोण बड़ा होता है।
14. किसी त्रिभुज में, बड़े कोण की सम्मुख भुजा लंबी (बड़ी) होती है।
15. किसी त्रिभुज में, दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

विविध प्रश्नमाला 7

वस्तुनिष्ठ प्रश्न प्रश्न (1 से 16 तक)

1. निम्नलिखित में से कौन त्रिभुजों की सर्वांगसमता की एक कसौटी नहीं है?

(A) SAS (B) ASA

(C) SSA (D) SSS [ ]

2. यदि AB = QR, BC = PR और CA = PQ है, तो

(A) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ (B) $\Delta CBA \cong \Delta PRQ$

(C) $\Delta BAC \cong \Delta RPQ$ (D) $\Delta PQR \cong \Delta BCA$ [ ]

3. Δ ABC में, AB = AC और $\angle B = 50^o$ है, तब $\angle C$ बराबर है

(A) 40^o (B) 50^o (C) 80^o (D) 130^o [ ]

4. Δ ABC में, BC = AB और $\angle B = 80^o$ है, तब $\angle A$ बराबर है

(A) 80^o (B) 40^o (C) 50^o (D) 100^o [ ]

5. Δ PQR में, $\angle R = \angle P$ और QR = 4 cm और PR = 5 cm है, तब PQ की लम्बाई है

(A) 4 cm (B) 5 cm (C) 2 cm (D) 2.5 cm [ ]

6. D एक त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु इस प्रकार स्थित है कि AD कोण BAC के समद्विभाजित करता है। तब

(A) BD = CD (B) BA > BD

(C) BD > BA (D) CD > CA [ ]

7. यह दिया है कि $\Delta ABC \cong \Delta FDE$ है तथा AB = 5 cm, $\angle B = 40^o$ और $\angle A = 80^o$ है। निम्नलिखित में से कौन सत्य है?

(A) $DF = 5 cm, \angle F = 60^o$ (B) $DF = 5 cm, \angle E = 60^o$

(C) $DE = 5 cm, \angle E = 60^o$ (D) $DE = 5 cm, \angle D = 40^o$ [ ]

8. एक त्रिभुज की दो भुजाओं की लंबाइयाँ 5 cm और 1.5 cm हैं। इस त्रिभुज की तीसरी भुजा की लंबाई निम्नलिखित नहीं हो सकती

(A) 3.6 cm (B) 4.1 cm (C) 3.8 cm (D) 3.4 cm [ ]

9. Δ PQR में, यदि $\angle R > \angle Q$ है, तो

(A) QR > PR (B) PQ > PR (C) PQ < PR (D) QR < PR [ ]

10. त्रिभुजों ABC और PQR में, AB = AC, $\angle C = \angle P$ और $\angle B = \angle Q$ है। ये दोनों त्रिभुज है

(A) समद्विबाहु परंतु सर्वांगसम नहीं (B) समद्विबाहु और सर्वांगसम

(C) सर्वांगसम परंतु समद्विबाहु नहीं (D) न तो सर्वांगसम और न ही समद्विबाहु [ ]

11. त्रिभुजों ABC और DEF में, AB = FD तथा $\angle A = \angle D$ है। दोनों त्रिभुज SAS अभिगृहीत के अन्तर्गत सर्वांगसम होंगे, यदि

(A) BC = EF (B) AC=DE (C) AC = EF (D) BC = [ ]

12. समकोण त्रिभुज ABC में कोण C समकोण हो तो, सबसे बड़ी भुजा होगी :

(A) AB (B) BC (C) CA (D) कोई नहीं [ ]

13. किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का अन्तर तीसरी भुजा से होता है :

(A) अधिक (B) समान (C) कम (D) आधा [ ]

14. यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ असमान हो, तो बड़ी भुजा के सामने का कोण होता है :

(A) बड़ा (B) छोटा (C) बराबर (D) आधा [ ]

15. त्रिभुज का परिमाप उसकी मध्यिकाओं के योग से होता है :

(A) अधिक (B) कम (C) समान (D) आधा [ ]

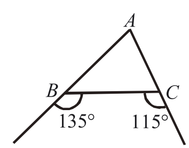
16. त्रिभुज के तीनों शीर्ष लम्बों का योग उसके परिमाप से होता है :

(A) अधिक (B) समान (C) आधा (D) कम [ ]

17. यदि ΔABC में $AB = AC$ हो तथा $\angle A < 60°$ हो, तो भुजा BC एवं AC में संबंध लिखिए :

....

18. चित्र 7.44 में, भुजा AB एवं AC में संबंध लिखिए।



चित्र 7.44

....

19. किसी त्रिभुज ABC में, $\angle A > \angle B$ एवं $\angle B > \angle C$ हो, तो सबसे छोटी भुजा होगी :

....

20. एक समबाहु त्रिभुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

21. P कोण ABC के समद्विभाजक पर स्थित कोई बिन्दु है। यदि P से होकर BA के समांतर खींची गई रेखा BC से Q पर मिलती है, तो सिद्ध कीजिए कि BPQ एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

22. ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें $AB = AC$ है। $\angle A$ का समद्विभाजक BC से D पर मिलता है। सिद्ध कीजिए कि $BC = 2\,AD$ है।

23. ABC और DBC एक ही आधार BC पर स्थित दो त्रिभुज इस प्रकार हैं कि बिन्दु A और D आधार BC के विपरीत और स्थित हैं, $AB = AC$ और $DB = DC$ है। दर्शाइए कि AD रेखाखंड BC का लंब समद्विभाजक है।

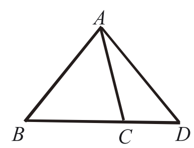
24. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AC = BC$ है। AD और BE क्रमशः BC और AC पर शीर्षलंब है। सिद्ध कीजिए कि $AE = BD$ है।

25. सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा की संगत माध्यिका के दोगुने से बड़ा होता है।

26. एक त्रिभुज ABC में, D भुजा AC का मध्य–बिन्दु है ताकि $BD = \frac{1}{2}AC$ है। दर्शाइए कि $\angle ABC$ एक समकोण है।

27. एक समकोण त्रिभुज में, सिद्ध कीजिए कि कर्ण के मध्य–बिन्दु को उसके सम्मुख शीर्ष से मिलाने वालो रेखाखंड कर्ण का आधा होता है।

28. चित्र 7.45 में, यदि $AB = AC$ हो, तो भुजा AB एवं AD में संबंध लिखिए।



चित्र 7.45

29. AD किसी त्रिभुज ABC की एक माध्यिका है। क्या यह कहना सत्य है कि $AB + BC + CA > 2AD$ है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

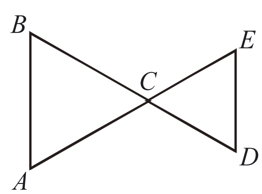
30. M किसी त्रिभुज ABC की भुजा BC पर स्थित एक बिन्दु ऐसा है कि AM कोण BAC का समद्विभाजक है। क्या यह कहना सत्य है कि त्रिभुज का परिमाप 2AM से अधिक है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

31. एक ΔPSR की भुजा SR पर एक बिन्दु Q इस प्रकार स्थित है कि $PQ = PR$ है। सिद्ध कीजिए कि $PS > PQ$ है।

32. ΔPQR की भुजा QR पर S कोई बिन्दु स्थित है। दर्शाइए कि $PQ + QR + RP > 2PS$ है।

33. $AB = AC$ वाले एक ΔABC की भुजा, AC पर D कोई बिन्दु स्थित है। दर्शाइए कि $CD < BD$ है।

34. चित्र 7.46 में, $\angle B > \angle A$ एवं $\angle D > \angle E$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $AE > BD$.



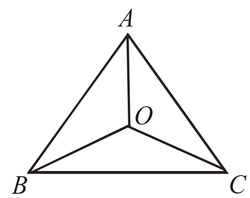
चित्र 7.46

35. किसी त्रिभुज ABC में $AB > AC$ एवं भुजा BC पर कोई बिन्दु D हो, तो सिद्ध कीजिए : $AB > AD$.

36. सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज की तीनों भुजाओं का योग उसकी तीनों मध्यिकाओं के योग से अधिक होता है। [संकेत : उदाहरण 1 का प्रयोग करें]

37. चित्र 7.47, में त्रिभुज में कोई अन्तः बिन्दु O हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$(BC + AB + AC) > 2(OA + OB + OC).$$



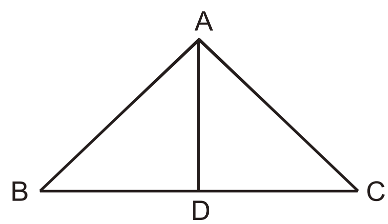
चित्र 7.47

38. सिद्ध कीजिए कि त्रिभुजों के तीनों शीर्ष लम्बों का योग त्रिभुज के परिमाप से कम होता है।

39. सिद्ध कीजिए कि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का अन्तर तीसरी भुजा से छोटा होता है।

40. $AB = AC$ वाले एक समद्विबाहु त्रिभुज के कोणों B और C के समद्विभाजक परस्पर O परप्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि $\angle ABC$ के आसन्न एक बहिष्कोण $\angle BOC$ के बराबर है।

41. चित्र 6.48 में, AD कोण BAC का समद्विभाजक है। सिद्ध कीजिए कि $AB > BD$ है।



चित्र 6.48

उतरमाला

प्रश्नमाला 7.1

1. QR; ये ASA द्वारा सर्वांगसम होंगे।
2. RP; ये AAS द्वारा सर्वांगसम होंगे।
3. नहीं, कोण दोनों भुजाओं के अन्तर्गत होने चाहिए।
4. नहीं, भुजाएँ संगत होनी चाहिए।
5. नहीं, BC = PQ होना चाहिए।
6. हाँ, ये संगत भुजाएँ है।

प्रश्नमाला 7.2

1. 64^{o}

3. 90^{o}

विविध प्रश्नमाला 7

1. C	**2.** B	**3.** B	**4.** C	**5.** A	**6.** B
7. B	**8.** D	**9.** B	**10.** A	**11.** B	**12.** A
13. C	**14.** A	**15.** A	**16.** D		

17. BC < AC

18. AB > AC

19. AB

20. 60, 60, 60

28. AD > AB

29. हाँ, AB + BD > AD और AC + CD > AD

30. हाँ, AB + BM >AM और AC + CM > AM