

त्रिभुजों की रचनाएँ (Construction of Triangles)

8.01 प्रस्तावना (Introduction):

प्रत्येक त्रिभुज के छः अवयव होते हैं, तीन भुजाएँ और तीन कोण। पूर्व में हम दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए आवश्यक प्रतिबन्धों का अध्ययन कर चुके हैं। इनके अनुसार त्रिभुज की रचना करने के लिए कम से कम तीन स्वतंत्र अवयव ज्ञात होने चाहिए अर्थात्

- (i) तीन भुजाएँ, या
- (ii) दो भुजाएँ और उनके मध्य का कोण, या
- (iii) दो कोण और एक भुजा, या
- (iv) समकोण त्रिभुज में कर्ण और एक भुजा,

टिप्पणी: (i) यदि तीनों कोण दिये हों, तो त्रिभुज की रचना नहीं की जा सकती है।

(ii) यदि दो भुजाएँ और इनमें से एक के सामने का न्यून कोण दिया हो तो अभीष्ट त्रिभुज की संदिग्ध (Ambiguous) स्थिति उत्पन्न हो जाती है।

इस अध्याय में विभिन्न स्थितियों में त्रिभुजों की रचना का अध्ययन करेंगे।

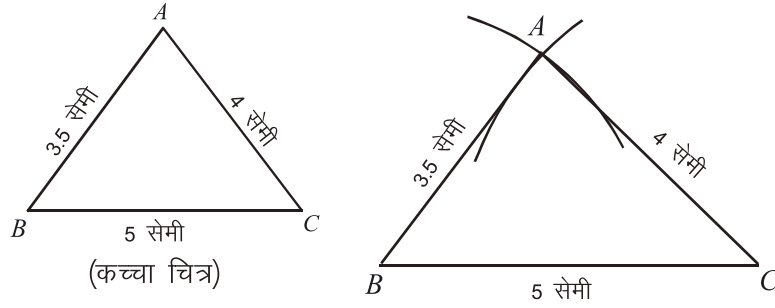
निर्मेय 8.1

त्रिभुज की रचना करना, जिसकी तीनों भुजाएँ दी गई हों।

ΔABC की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ क्रमशः $a=5$ सेमी, $b=4$ सेमी और $c=3.5$ सेमी हों। यहाँ पर a से आशय है शीर्ष A के सामने की भुजा, b का आशय है शीर्ष B के सामने की भुजा, c का आशय है शीर्ष C के सामने की भुजा।

सर्वप्रथम रचना करने से पूर्व दी गई माप के अनुसार त्रिभुज की कच्ची आकृति बनाकर इसमें मापों को अंकित करेंगे। इसी के आधार पर अभीष्ट त्रिभुज बनायेंगे।

रचना : सरल रेखा $BC=5$ सेमी खींचिए। बिन्दु B को केन्द्र मानकर 3.5 सेमी की त्रिज्या से एक चाप खींचिए और इसी प्रकार C बिन्दु को केन्द्र मानकर 4 सेमी की त्रिज्या से एक चाप खींचिए जो पहले वाले चाप को A बिन्दु पर काटे।



चित्र 8.01

A को B व C से मिलाइए। ABC अभीष्ट त्रिभुज है।

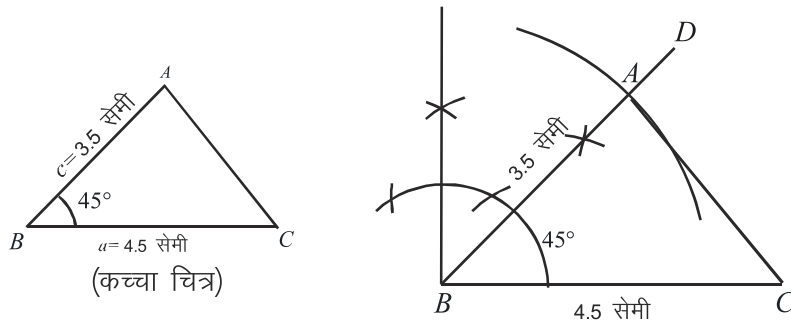
प्रश्नमाला 8.1

1. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें $AB=4$ सेमी, $BC=5$ सेमी और $CA=6$ सेमी हो।
2. दो बिन्दु A और B परस्पर 6.5 सेमी की दूरी पर हैं। A व B से क्रमशः 7 सेमी तथा 6 सेमी दूरी, एक बिन्दु C का स्थान ज्ञात कीजिए।
3. ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें $a=6.5$ सेमी, $b=7.2$ सेमी और $c=8$ सेमी। $\angle B$ का अर्द्धक खींचिए जो AC को M बिन्दु पर मिले।
4. ΔABC की रचना इस प्रकार कीजिए कि $a=7$ सेमी, $b=5$ सेमी और $c=4$ सेमी। A से BC पर लम्ब डालिए।
5. समबाहु ΔABC की रचना कीजिए, जिसकी प्रत्येक भुजा 5.5 सेमी हो।
6. समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए जिसका आधार 3 सेमी तथा अन्य भुजा 5 सेमी हो।

निर्मेय 8.2

त्रिभुज की रचना करना जिसकी दो भुजाएँ और उनके बीच कोण दिया हो।
 ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें भुजा $a=4.5$ सेमी, भुजा $c=3.5$ सेमी और $\angle B=45^\circ$ हो।

रचना : सरल रेखा $BC=a=4.5$ सेमी खींचिए। बिन्दु B पर पटरी व परकार की सहायता से 45° का कोण बनाइए।



चित्र 8.02

B को केन्द्र मानकर $c = 3.5$ सेमी की त्रिज्या से चित्रानुसार चाप द्वारा BD में से BA काटिए, A को C से मिलाइए। अभीष्ट त्रिभुज ABC है।

प्रश्नमाला 8.2

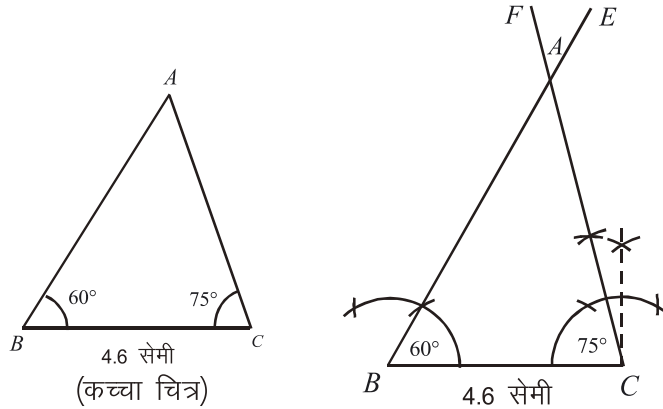
1. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें $a = 4$ सेमी, $b = 5$ सेमी और $\angle C = 60^\circ$ ।
2. त्रिभुज LMN की रचना कीजिए जिसमें $\angle L = 120^\circ$, $LM = 4$ सेमी तथा $LN = 5$ सेमी हो।
3. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें $AB = AC = 8$ सेमी, $\angle A = 75^\circ$, $\angle B$ का समद्विभाजक खींचिए जो सामने की भुजा को मिले।
4. समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए जिसका शीर्ष कोण 120° हो, और जिसकी समान भुजाओं में से प्रत्येक 5.5 सेमी लम्बी हो।

निर्मेय 8.3

त्रिभुज की रचना करना, जिसकी एक भुजा और दो कोण दिये गए हों।

$\triangle ABC$ की रचना कीजिए, जिसमें $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 75^\circ$ और भुजा $BC = 4.6$ सेमी हो।

रचना : $BC = 4.6$ सेमी की खींचिए, B बिन्दु पर, पटरी व परकार की सहायता से 60° का तथा C पर 75° का कोण $\angle EBC$ व $\angle FCB$ बनाइए। BE तथा CF , जिस बिन्दु पर मिले उस पर A बिन्दु अंकित कीजिए।



चित्र 8.03

त्रिभुज ABC अभीष्ट त्रिभुज है।

टिप्पणी : यदि भुजा BC के सिरे B व C पर कोई कोण न दिया होकर अन्य तीसरा कोण दिया गया हो, तो त्रिभुज के तीनों कोणों का योग दो समकोण के बराबर होता है, अतः इसकी सहायता से तीसरा कोण ज्ञात कर उपर्युक्त निर्मेय के अनुसार त्रिभुज की रचना की जा सकती है।

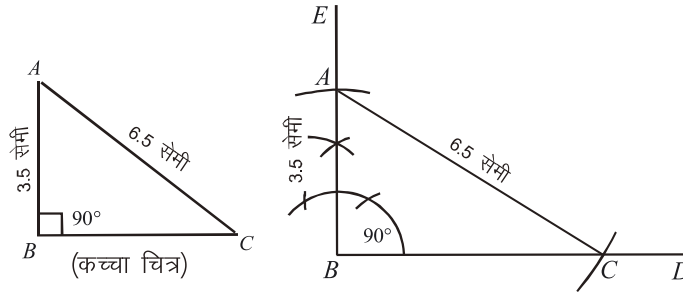
प्रश्नमाला 8.3

1. त्रिभुज PQR की रचना कीजिए, जिसमें $QR = 8$ सेमी, $\angle Q = 120^\circ$ और $\angle R = 30^\circ$ ।
2. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें $b = 7$ सेमी, $\angle A = 90^\circ$ और $\angle C = 60^\circ$ है।
3. एक समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसका आधार 4 सेमी और शीर्ष कोण $= 30^\circ$ हो। शीर्ष बिन्दु से आधार पर लम्ब खींचिए।

निर्मेय 8.4

समकोण त्रिभुज की रचना करना जिसका कर्ण और एक अन्य भुजा दी गई हो।
एक समकोण $\triangle ABC$ की रचना कीजिए जिसका कर्ण $AC = 6.5$ सेमी तथा भुजा $AB = 3.5$ सेमी है।

रचना : कोई सरल रेखा BD खींचिए। BD के बिन्दु B पर $\angle DBE = 90^\circ$ बनाइए। B को केन्द्र मानकर 3.5 सेमी की त्रिज्या से चाप लगाइए जो BE को A बिन्दु पर काटे, अब A को केन्द्र मानकर 6.5 सेमी की त्रिज्या से चाप लगाइए, जो BD को C बिन्दु पर काटे। A को C से मिलाइए।



चित्र 8.04

$\triangle ABC$ अभीष्ट त्रिभुज है।

प्रश्नमाला 8.4

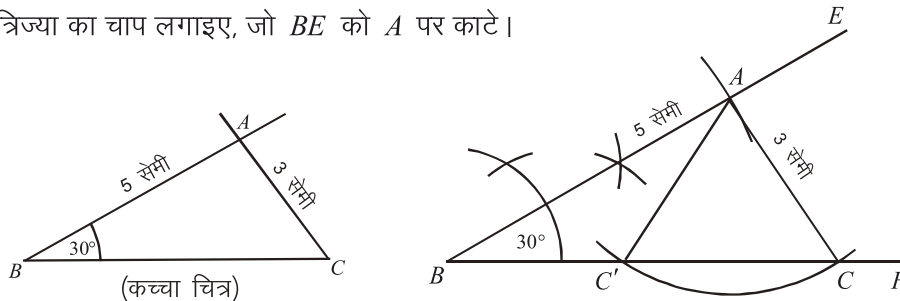
1. समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसका कर्ण 5 सेमी तथा अन्य एक भुजा 3 सेमी हो।
2. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें $\angle A = 90^\circ$, भुजा $AC = 5.4$ सेमी तथा कर्ण $BC = 10$ सेमी हो।
3. समकोण $\triangle ABC$ की रचना कीजिए, जिसमें $\angle A = 90^\circ$ तथा भुजा $a = 10$ सेमी तथा भुजा $b = 6$ सेमी हो। कर्ण पर शीर्ष A से लम्ब डालिए।

निर्मेय 8.5

त्रिभुज की रचना करना, जिसकी दो भुजाएँ तथा उनमें से एक के सामने का कोण दिया गया हो।

$\triangle ABC$ की रचना कीजिए जिसमें $AB = 5$ सेमी, $AC = 3$ सेमी तथा $\angle B = 30^\circ$ है।

रचना : सरल रेखा BF खींचिए और बिन्दु B पर $\angle EBF = 30^\circ$ का कोण बनाइए। B बिन्दु से 5 सेमी की त्रिज्या का चाप लगाइए, जो BE को A पर काटे।



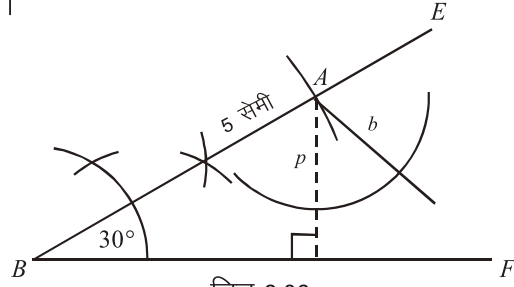
चित्र 8.05

अब A बिन्दु से 3 सेमी की त्रिज्या से चाप घुमाइए, जो BF को बिन्दुओं C तथा C' पर काटे।
 C तथा C' को A से मिलाइए।

$\triangle ABC$ तथा $\triangle ABC'$ दोनों ही अभीष्ट त्रिभुज हैं।

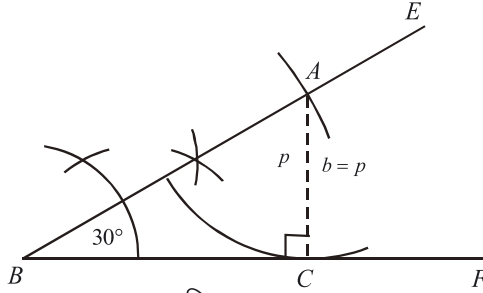
निर्मेय से संबंधित विभिन्न स्थितियाँ

स्थिति 1 : जब भुजा b की लम्बाई, शीर्ष A से BC पर डाले गए लम्ब p से छोटी हो तो A को केन्द्र मानकर b की त्रिज्या से खींचा गया चाप, BF को काटेगा ही नहीं। ऐसी स्थिति में त्रिभुज की रचना सम्भव नहीं है (चित्र 8.06)।



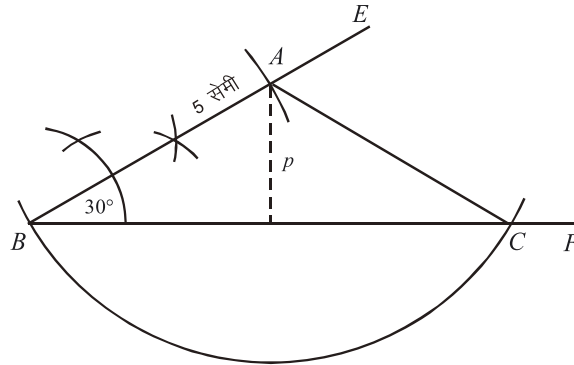
चित्र 8.06

स्थिति 2 : जब भुजा b की लम्बाई, लम्ब p के बराबर हो, तो A को केन्द्र मानकर b की त्रिज्या से खींचा गया चाप BF को स्पर्श करेगा। ऐसी स्थिति में केवल एक ही त्रिभुज बनेगा और वह समकोण त्रिभुज होगा (चित्र 8.07)।



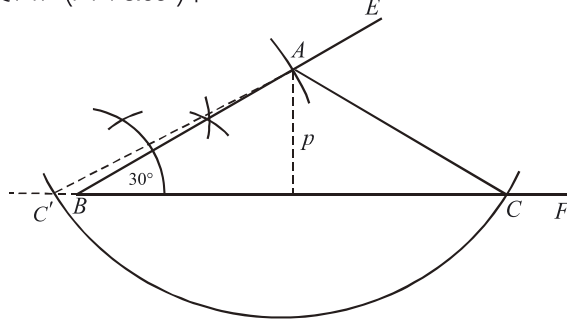
चित्र 8.07

स्थिति 3 : यदि भुजा b , लम्ब p से बड़ी तथा c के बराबर हो। ऐसी स्थिति में केवल एक समद्विबाहु त्रिभुज बनेगा, जिसमें भुजा AB , भुजा AC के बराबर होगी (चित्र 8.08)।



चित्र 8.08

स्थिति 4 : यदि भुजा b लम्ब p और भुजा c , दोनों से बड़ी हो तो चाप रेखा BF को बिन्दु B की दाँयी तरफ बिन्दु C पर काटेगा और केवल एक अभीष्ट $\triangle ABC$ बनेगा। इस स्थिति में चाप CB को बढ़ाने पर C' पर अवश्य काटेगा, लेकिन $\triangle ABC'$ अभीष्ट त्रिभुज नहीं होगा, क्योंकि इसमें $\angle ABC = 30^\circ$, नहीं होगा (चित्र 8.09)।



चित्र 8.09

स्थिति 5 : यदि भुजा b , लम्ब p से बड़ी हो और भुजा c से छोटी हो, तो चाप BF को दो विभिन्न बिन्दुओं पर काटेगा और इस प्रकार दो $\triangle ABC$ तथा $\triangle ABC'$ अभीष्ट त्रिभुज होंगे (चित्र 8.05)।

टिप्पणी : उपर्युक्त स्थितियों से स्पष्ट है कि यदि $\angle B$ न्यूनकोण नहीं है तो केवल एक ही त्रिभुज सम्भव है। क्योंकि उस स्थिति में भुजा b , भुजा c से बड़ी होगी। यदि $\angle B$ न्यून कोण है तो उपर्युक्तानुसार कोई भी स्थिति सम्भव हो सकती है।

प्रश्नमाला 8.5

1. त्रिभुज XYZ की रचना कीजिए, जिसमें $\angle XYZ = 60^\circ$, भुजा $XY = 5$ सेमी तथा $XZ = 4.5$ सेमी। इस प्रकार से कितने त्रिभुज खींचे जा सकते हैं
2. त्रिभुज PQR की रचना कीजिए, जिसमें $\angle PQR = 45^\circ$, भुजा $PQ = 6$ सेमी तथा $PR = 5$ सेमी।
3. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें $a = 5.4$ सेमी, $b = 6.8$ सेमी और $\angle A = 45^\circ$, भुजा AB का माप ज्ञात कीजिए।

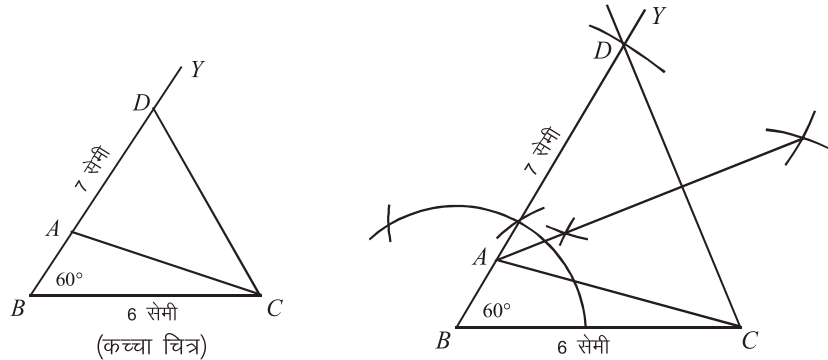
8.02 त्रिभुज की कठिन रचनाएँ:

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1: त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जबकि आधार $BC = 6$ सेमी, $\angle ABC = 60^\circ$ एवं $AB + AC = 7$ सेमी है।

हल : दी गई मापों से त्रिभुज का कच्चा चित्र खींचकर उसमें दी गई मापें अंकित कीजिए। BA को बिन्दु D तक इस प्रकार बढ़ाइए कि $AC = AD$ हो। इस प्रकार $BD = BA + AC$, D को C बिन्दु से मिलाइए। DC का लम्ब समद्विभाजक खींचकर $\triangle ABC$ प्राप्त किया जा सकता है।

रचना : $BC = 6$ सेमी खींचिए। बिन्दु B पर 60° का कोण YBC पटरी व परकार से बनाइए, BY में से, $(BA + AC)$ के बराबर दूरी $BD = 7$ सेमी काटिए। D को C से मिलाइए। DC का लम्ब समद्विभाजक खींचिए, जो BD को A बिन्दु पर काटे। A को C से मिलाइए।



चित्र 8.10

इस प्रकार ABC अभीष्ट त्रिभुज है। जिसमें $BA + AC = 7$ सेमी है।

उदाहरण 2: त्रिभुज की रचना कीजिए, जबकि $AB + BC + CA = 8$ सेमी, $\angle B = 60^\circ$ एवं $\angle C = 80^\circ$.

हल : दी गई मापों से $\triangle ABC$ का कच्चा चित्र बनाकर, इसमें दी गई मापों को अंकित कीजिए। BC को दोनों ओर इस प्रकार बढ़ाइए कि $BP = AB$, और $CQ = AC$, AP एवं AQ को मिलाइए। इस प्रकार $\triangle ABP$ और $\triangle ACQ$ समद्विबाहु त्रिभुज हुए।

कच्चे चित्रानुसार त्रिभुज APQ की रचना की सकती है।

$$\angle 1 + \angle 2 = \angle 60^\circ$$

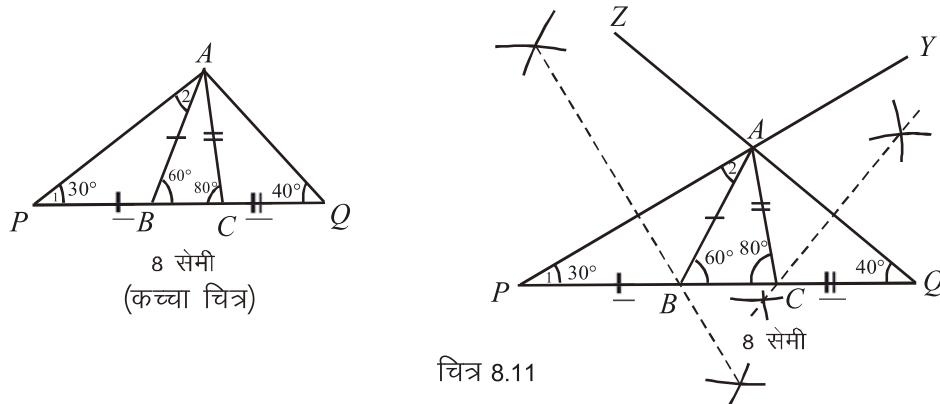
($\because B$ का बहिष्कोण = अन्तरा त्रिभुज कोणों का योग)

$$\text{लेकिन } \angle 1 = \angle 2 \quad (\because PB = AB)$$

$$\text{अतः } \angle 1 = \angle 2 = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ = \angle APB$$

$$\text{इसी प्रकार } \angle AQC = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

रचना : रेखा $PQ = 8$ सेमी की खींचिए। बिन्दु P तथा Q पर क्रमशः 30° व 40° का कोण $\angle YPQ$ तथा $\angle ZQP$ बनाइए। PY तथा ZQ जहाँ काटे, A बिन्दु अंकित कीजिये। अब AP तथा AQ का लम्ब समद्विभाजक खींचिए, जो PQ को क्रमशः B तथा C बिन्दुओं पर काटे। A को, B तथा C से मिलाइए।



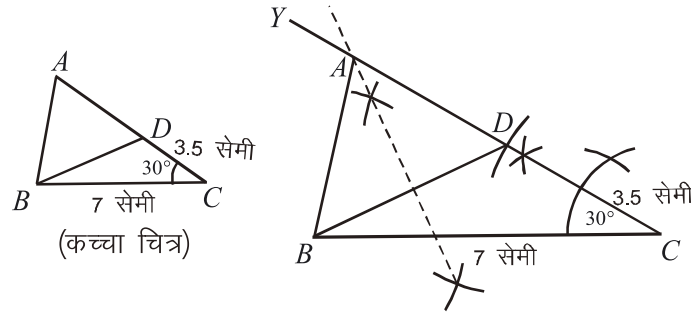
चित्र 8.11

ABC ही अभीष्ट त्रिभुज है, जिसमें $AB + BC + CA = 8$ सेमी है।

उदाहरण 3: त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें $BC = 7$ सेमी, $b - c = 3.5$ सेमी और $\angle C = 30^\circ$ हो।

हल : दी गई मापों से ΔABC का कच्चा चित्र बनाइए। इसमें दी गई मापों को अंकित कीजिए। चित्र में AC, BA से बढ़ी है। AC में से AB के बराबर AD काटकर BD को मिलाइए। इस प्रकार ΔABD एक समद्विबाहु त्रिभुज है। कच्चे चित्र को ध्यान में रखकर निम्न प्रकार अभीष्ट त्रिभुज की रचना की जा सकती है।

रचना : BC रेखा 7 सेमी की खींचिए। C बिन्दु पर 30° का कोण $\angle YCB$ बनाइए, CY में से 3.5 सेमी की दूरी CD काटिए। D को B से मिलाइए तथा DB का लम्ब समद्विभाजक खींचिए, यह CY को जहाँ काटे, A बिन्दु अंकित कीजिए, A को B से मिलाइए।



चित्र 8.12

ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।

उदाहरण 4: एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें $BC = 6$ सेमी, माध्यिकाएँ AD और CF क्रमशः 9 सेमी और 7.5 सेमी हैं।

हल : दी गई मापों से ΔABC का कच्चा चित्र बनाकर उसमें दी गई मापों को अंकित कीजिए। कच्चे चित्र में

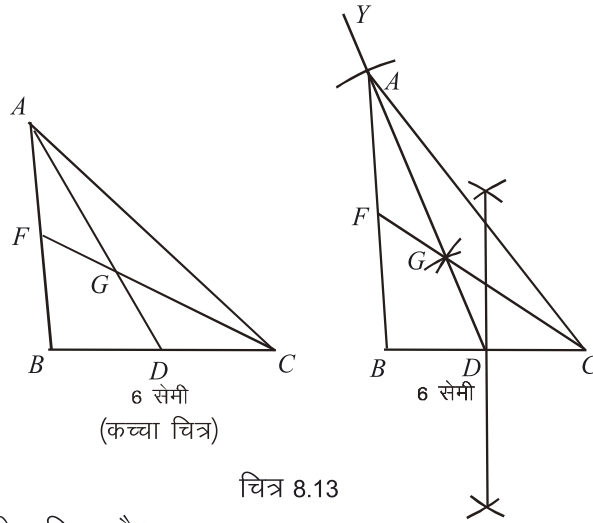
$$DC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 6 = 3 \text{ सेमी}$$

$$GC = \frac{2}{3}CF = \frac{2}{3} \times 7.5 = 5 \text{ सेमी}$$

$$GD = \frac{1}{3} \times 9 = 3 \text{ सेमी।}$$

रचना : $BC = 6$ सेमी खींचिए। BC को D पर समद्विभाजित कीजिए। D को केन्द्र मानकर त्रिज्या $[GD = \frac{1}{3}AD]$ 3 सेमी लेकर चाप खींचिए। इसी प्रकार C को केन्द्र मानकर त्रिज्या $[GC = \frac{2}{3}CF]$ 5 सेमी लेकर एक चाप खींचिए, जो पहले चाप को G पर काटे।

DG को मिलाते हुए आगे इतना बढ़ाइए ताकि $DA = 9$ सेमी बने। AB तथा AC को मिलाइए।



चित्र 8.13

अतः ABC अभीष्ट त्रिभुज है।

उदाहरण 5: त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसकी तीनों माध्यिकाएँ क्रमशः **3.6 सेमी, 2.7 सेमी और 4.2 सेमी हैं।**

हल : त्रिभुज ABC का कच्चा चित्र बनाकर, उसमें दी गई मापों को अंकित कीजिए।

चित्रानुसार, $OB = \frac{2}{3} \times BE = \frac{2}{3} \times 2.7 = 1.8$ सेमी

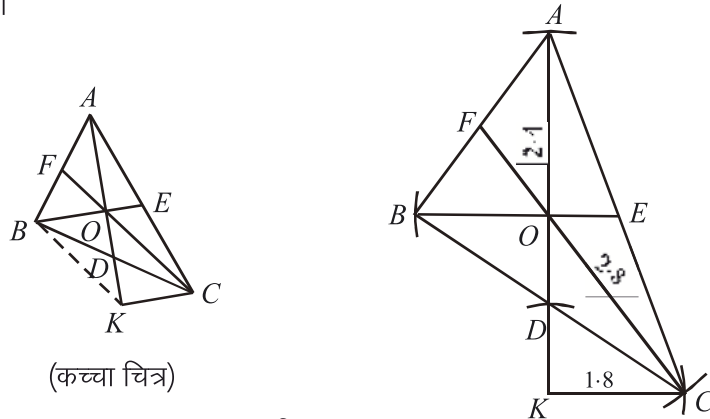
$OC = \frac{2}{3} \times CF = \frac{2}{3} \times 4.2 = 2.8$ सेमी

तथा $OA = \frac{2}{3} \times AD = \frac{2}{3} \times 3.6 = 2.4$ सेमी

चित्र के अनुसार AD को इस प्रकार आगे बढ़ाते हुए चित्र को पूर्ण कीजिए कि $KC = OB$, OK का मध्य बिन्दु D ज्ञात करके त्रिभुज ABC की रचना पूर्ण की जा सकती है।

रचना : त्रिभुज OKC की रचना इस प्रकार कीजिए कि $OK = AO = 2.4$ सेमी $OC = 2.8$ सेमी तथा $KC = OB = 1.8$ सेमी। OK का मध्य बिन्दु D प्राप्त कीजिए। KD को आगे इतना बढ़ाइए कि $AD = 3.6$ सेमी हो। इसी प्रकार CD को पीछे इतना बढ़ाइए, कि $CD = BD$, AB तथा AC को मिलाइए।

अतः $\triangle ABC$ अभीष्ट त्रिभुज है, जिसमें माध्यिकाएँ $AD = 3.6$ सेमी, $BE = 2.7$ सेमी तथा $CF = 4.2$ सेमी हैं।



चित्र 8.14

प्रश्नमाला 8.6

1. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें $BC = 7$ सेमी, $\angle C = 50^\circ$ तथा $AC + AB = 8$ सेमी है।
2. त्रिभुज PQR की रचना कीजिए, जिसमें $PQ = 6$ सेमी, $\angle Q = 60^\circ$ और $PQ + PR = 8$ सेमी है।
3. त्रिभुज PQR की रचना कीजिए, जिसमें $QR = 5$ सेमी, $\angle R = 40^\circ$ तथा $PR - PQ = 1$ सेमी।
4. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसकी परिमिति 12 सेमी एवं आधार के कोण 50° और 70° हो।
5. त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसमें $BC = 6$ सेमी, माध्यिकाएँ AD तथा CF क्रमशः 6 सेमी और 7.5 सेमी हैं।
6. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसकी तीनों माध्यिकाएँ क्रमशः 3 सेमी, 2.7 सेमी और 6 सेमी हैं।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. किसी त्रिभुज की रचना करने के लिए, निम्नलिखित अवयव ज्ञात होना आवश्यक है :
 - (i) तीनों भुजाएँ (भुजा – भुजा – भुजा)
या
 - (ii) दो कोण और एक भुजा (कोण – भुजा – कोण)
या
 - (iii) दो भुजाएँ और उनके मध्य बना कोण (भुजा – कोण – भुजा)
या
 - (iv) समकोण त्रिभुज में कर्ण तथा एक भुजा (कर्ण – भुजा)
2. निम्न स्थितियों में त्रिभुज की रचना नहीं की जा सकती है :
 - (i) तीन कोण दिये हों
 - (ii) दो भुजाएँ और एक के सामने का न्यून कोण (इस स्थिति में दो त्रिभुज बन सकते हैं और अभीष्ट त्रिभुज निश्चित नहीं किया जा सकता। अतः एक संदिग्ध स्थिति उत्पन्न हो जाती है।)

विविध प्रश्नमाला 8

1. एक त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसका परिमाप 12 सेमी है तथा भुजाओं का अनुपात $1 : 2 : 3$ है।
2. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें $\angle B = 90^\circ$ तथा $\angle C = 60^\circ$ तथा $c = 5$ सेमी।
3. एक समकोण त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें कर्ण $BC = 8.2$ सेमी तथा एक भुजा $= 4.2$ सेमी।
4. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, और A से BC पर लम्ब $AD = 4$ सेमी।
5. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें $a = 5.6$ सेमी, $b + c = 10.2$ सेमी और $\angle B - \angle C = 30^\circ$ है। (संकेत – शीर्ष B पर $90 + \frac{1}{2}(\angle B - \angle C)$ अर्थात् 105° का कोण बनाएँ)
6. एक त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी तीनों माध्यिकाएँ क्रमशः 4.2 सेमी, 4.8 सेमी और 5.4 सेमी हैं।
7. एक समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी उँचाई 6 सेमी और समान भुजाएँ 7 सेमी हैं। आधार का माप ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 8.5

3. 2.8 सेमी, 6.8 सेमी

विविध प्रश्नमाला 8

7. 7 सेमी

