अध्याय

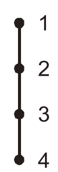
9

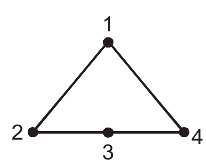
चतुर्भुज
(Quadrilateral)

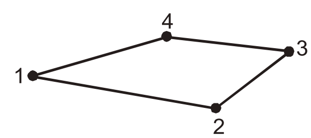
9.01 प्रस्तावना (Introduction)

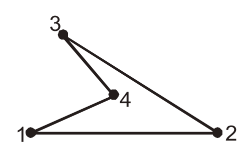
अध्याय 5 व 6 में आपने त्रिभुजों के अनेक गुणधर्मों के बारे में अध्ययन किया है। आप यह भी जान चुके है कि तीन असंरेख बिन्दुओं को मिलाने पर एक एक त्रिभुज बनता है।

आइये अब हम कागज पर चार–चार बिन्दुओं के समूह अंकित करते है और उन्हें क्रमानुसार मिलाते है और देखते है कि कितने प्रकार की सम्भावित आकृतियाँ प्राप्त हो सकती है?









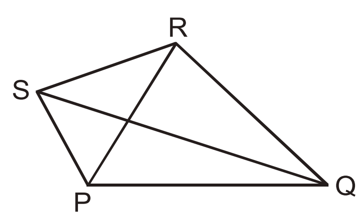
चित्र 9.01

चित्र 9.01 (i), (ii), (iii) तथा (iv) जैसी सम्भावित आकृतियाँ निर्मित हो सकती है। इस अध्याय में हम चित्र 9.01 (iii) जैसी आकृति, जिसे चतुर्भज कहते हैं, का अध्ययन करेंगे।

9.02 चतुर्भुजः

चार भुजाओं से घिरी आकृति को चतुर्भुज कहते है।

एक चतुर्भुज में चार भुजाएँ, चार कोण एवं चार शीर्ष होते है। जैसा कि चित्र 9.02 में चतुर्भुज PQRS में PQ, QR, RS तथा SP चार भुजाएँ, P, Q, R तथा S चार शीर्ष तथा $\angle P$, $\angle Q$, $\angle R$ तथा $\angle S$ शीर्षों पर बने कोण हैं।



चित्र 9.02

सम्मुख भुजाएँ एवं सम्मुख कोण–चित्र 9.2 में भुजाPQ की सम्मुख भुजा RS तथा PS की सम्मुख भुजा QR है। $\angle P$ का सम्मुख $\angle R$ तथा $\angle Q$ का सम्मुख $\angle S$ है।

चित्र 9.02 में, आसन्न भुजाओं के युग्म PQ, QR तथा PS, SR है। इसी प्रकार SP, PQ तथा SR, RQ भुजा युग्म आसन्न भुजा युग्म है।

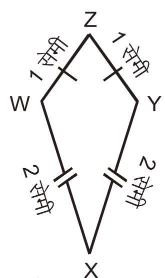
विकर्ण– सम्मुख शीर्षों को मिलाने वाले रेखाखण्ड विकर्ण कहलाते हैं। चित्र 9.02 में, PR एवं QS चतुर्भुज के विकर्ण है।

9.03 चतुर्भुज के कोणों का योग

चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 4 समकोण (360^o) होता हैं। चतुर्भुज के इस गुण धर्म को हमने अध्याय (5) के उपप्रमेय 4 के माध्यम से समझ लिया है।

9.04 चतुर्भुज के प्रकार

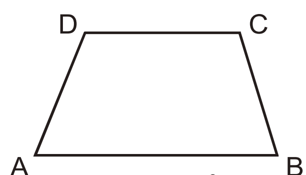
चित्र 9.03 में, WXYZ यह एक ऐसा चतुर्भुज है, जिसकी आसन्न भुजाओं के दो युग्म अर्थात् WX, XY तथा WZ, YZ बराबर है, पतंग है। अर्थात्, ऐसा चतुर्भुज जिसकी आसन्न भुजाओं के कोई दो युग्म बराबर हो, पतंग के नाम से जानते हैं।



चित्र 9.03

चित्र 9.04 में, चतुर्भुज की ABCD सम्मुख भुजाओं का एक युग्म AB और DC समान्तर है। इस चतुर्भुज को समलम्ब के नाम से जानते हैं।

अर्थात् ऐसा चतुर्भुज जिसकी सम्मुख भुजाओं का एक युग्म समान्तर हो, समलम्ब कहलाता है।

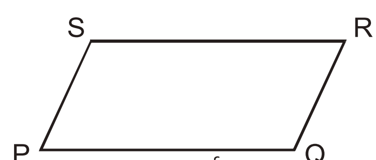


समलम्ब चतुर्भुज

चित्र 9.04

चित्र 9.05 में PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है जिसकी सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म PQ, RS तथा PS, QR समान्तर है। इस चतुर्भुज को समान्तर चतुर्भुज के नाम से जानते हैं।

अर्थात् ऐसा चतुर्भुज जिसकी सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म समान्तर होते हैं।

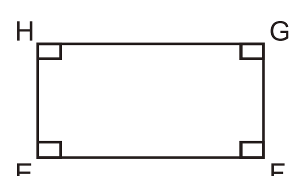


समान्तर चतुर्भुज

चित्र 9.05

एक समान्तर चतुर्भुज एक समलम्ब है परन्तु एक समलम्ब समान्तर चतुर्भुज नहीं है।

चित्र 9.06 में EFGH एक विशेष समान्तर चतुर्भुज ''आयत'' है जिसका प्रत्येक कोण 90^o होता है। अर्थात् ऐसा समान्तर चतुर्भुज जिसका प्रत्येक कोण समकोण हो, आयत के नाम से जानते हैं।



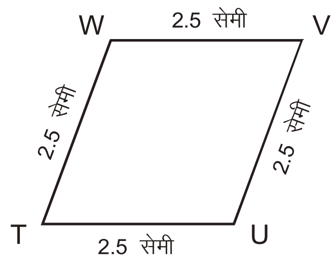
आयत

चित्र 9.06

एक आयत एक समान्तर चतुर्भुज है परन्तु एक समान्तर चतुर्भुज एक आयत है, यह आवश्यक नहीं।

एक आयत एक समलम्ब है परन्तु एक समलम्ब एक आयत नहीं है।

चित्र 9.07 में TUVW एक विशेष समान्तर चतुर्भुज "समचतुर्भुज" है जिसकी प्रत्येक भुजा का माप बराबर है। अर्थात् ऐसा समान्तर चतुर्भुज जिसकी प्रत्येक भुजा समान नाप की हो को समचतुर्भज के नाम से जानते हैं।



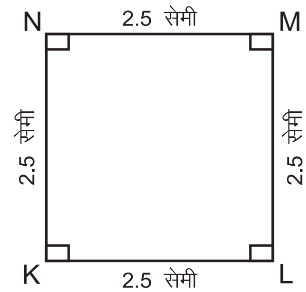
समचतुर्भुज

चित्र 9.07

एक समचतुर्भुज एक समान्तर चतुर्भुज है परन्तु एक समान्तर चतुर्भुज एक समचतुर्भुज है यह आवश्यक नहीं।

एक समचतुर्भुज एक समलम्ब है परन्तु एक समलम्ब समचतुर्भुज नहीं है।

चित्र 9.08 में KLMN एक विशेष आयत "वर्ग है" जिसकी प्रत्येक भुजा बराबर है। अथवा एक विशेष समान्तर चतुर्भुज जिसकी प्रत्येक भुजा बराबर एवं प्रत्येक कोण 90^o है। अर्थात् ऐसा आयत जिसकी प्रत्येक भुजा बराबर है, वर्ग के नाम से जानते हैं।



आयत

चित्र 9.08

एक वर्ग एक समलम्ब है परन्तु एक समलम्ब वर्ग नहीं है।

एक वर्ग एक समान्तर चतुर्भुज है परन्तु एक समान्तर चतुर्भुज वर्ग है यह आवश्यक नहीं।

एक वर्ग एक आयत है परन्तु एक आयत एक वर्ग है यह आवश्यक नहीं।

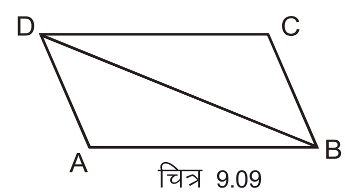
एक वर्ग एक समचतुर्भुज है परन्तु एक समचतुर्भुज एक वर्ग है यह आवश्यक नहीं।

9.05 समान्तर चतुर्भुज के गुणधर्म

प्रमेय 9.1 किसी समान्तर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे दो सर्वांसम त्रिभुज में विभाजित करता है।

सिद्ध करना ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है और BD उसका विकर्ण है

सिद्ध करना $\Delta ABD \cong ABCD$



चित्र 9.09

उपपत्ति चित्र 9.09 में ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है

AB || CD एवं BD एक तिर्यक रेखा है, तो

$\angle ABD = \angle BDC$ एकान्तर कोण . . . (i)

AD || BC, BD तिर्यक रेखा है, तो

$\angle ADB = \angle DBC$ एकान्तर कोण . . . (ii)

ΔABD व ΔCDB में

$\angle ABD = \angle BDC$ (i) से

BD = BD (एक उभयनिष्ठभुजा) (i) से

$\angle ADB = \angle DBC$ एक उभयनिष्ठ भुजा (ii) से

$\Rightarrow$ $\Delta ABD \cong \Delta CDB$ (ASA नियम से). . . (iii)

प्रमेय 9.2 समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती है।

दिया हुआ चित्र 9.09 में ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

सिद्ध करना AB = CD एवं AD = BC

रचना BD एक विकर्ण खींचिये।

उपपत्ति प्रमेय 9.1 के अनुसार $\Delta ABD \cong \Delta CDB$ करें

अतः ΔABD व ΔCDB की संगत भुजाएँ

AB = CD एवं AD = BC ''इतिसिद्धम''

प्रमेय 9.3 : (प्रमेय 9.2 का विलोम) किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का युग्म समान हो तो वह एक समान्तर चतुर्भुज होता है।

दिया हुआ ABCD एक चतुर्भुज है जिसकी सम्मुख भुजाएँ

AB = CD एवं BC = AD है।

सिद्ध करना ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

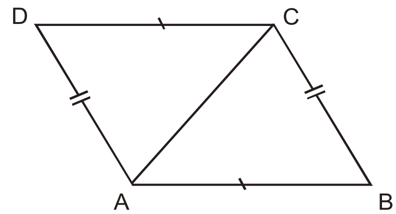
रचना A व C को मिलाया

उपपत्ति ΔABC व ΔCDA में

AB = CD (दिया हुआ)

BC = AD (दिया हुआ)

AC (उभयनिष्ठ)



चित्र 9.10

अतः $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

अर्थात् $\angle CAB = \angle ACD$ एकान्तर कोण

$\Rightarrow$ AB || CD . . . (i)

एवं $\angle ACB = \angle CAD$ एकान्तर कोण

$\Rightarrow$ BC || AD . . . (ii)

(i), (ii) से चतुर्भुज ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है ''इतिसिद्धम्''

प्रमेय 9.4 समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

दिया है : ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

सिद्ध करना है: $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$

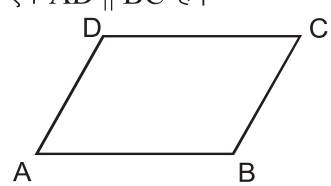
उपपत्तिः ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है। अतः AB || DC एवं AD || BC है।

$\therefore$ $\angle A + \angle D = 180^o$ (क्रमागत अन्तः कोण)... (1)

$\therefore$ $\angle C + \angle D = 180^o$ (क्रमागत अन्तः कोण)... (2)

(1) और (2) से

$\angle A + \angle D = \angle C + \angle D \quad \Rightarrow \quad \angle A = \angle C$



चित्र 9.11

इसी प्रकार $\angle B = \angle D$ ''इति सिद्धम''।

अब क्या इस प्रमेय का विलोम भी सत्य है? हाँ सत्य है। चलिये इसे भी सिद्ध करते हैं।

प्रमेय 9.5 एक चतुर्भुज में सम्मुख कोण बराबर हों, तो वह समान्तर चतुर्भुज होता है।

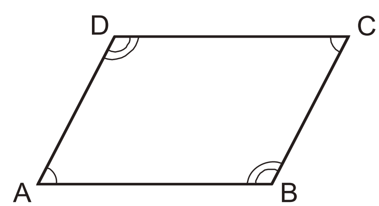
दिया है: एक चतुर्भुज ABCD है,

जिसमें $\angle A = \angle C$ और $\angle B = \angle D$ है।

सिद्ध करना है: ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है

उपपत्तिः चतुर्भुज ABCD में दिया है

Δ $\angle A = \angle C$ और $\angle B = \angle D$ है।



चित्र 9.12

जोड़ने पर $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$ . . . (1)

परन्तु $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^{o}$ . . . (2)

(1) और (2) से

$$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180^{o}$$

अर्थात् रेखा AB, रेखाओं AD और BC को क्रमशः A और B पर प्रतिच्छेद करती है जिससे

$\angle A + \angle B = 180^{o}$ (तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अन्तः कोण)

अतः $AD \parallel BC$ . . . (3)

इसी प्रकार $\angle C + \angle D = 180^{o}$

अतः $AB \parallel DC$ . . . (4)

(3) और (4) से

$\Rightarrow$ ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है। ''इतिसिद्धम''।

प्रमेय 9.6 समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

दिया है : एक समान्तर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

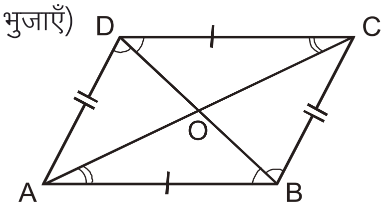
सिद्ध करना है : OA = OC और OB = OD

उपपत्ति : ΔAOD एवं ΔCOB में

$\angle ADO = \angle OBC$ (एकान्तर कोण)

$AD = BC$ (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

$\angle DAO = \angle OCB$ (एकान्तर कोण)



चित्र 9.13

अतः कोण–भुजा–कोण सर्वांगसमता नियम से

$$\Delta AOD \cong \Delta COB$$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ बराबर होंगी।

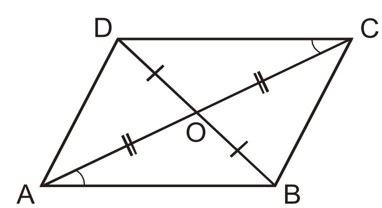
अर्थात् OD = OB और OA = OC ''इतिसिद्धम्''।

प्रमेय 9.7 (प्रमेय 9.6 का विलोम)

यदि चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हों, तो वह समान्तर चतुर्भुज होता है।

दिया है : एक चतुर्भुज ABCD जिसके विकर्ण AC और BD बिन्दु O पर समद्विभाजित करते हैं, अर्थात्

OA = OC और OB = OD



चित्र 9.14

सिद्ध करना है : ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

उपपत्ति : ΔAOB और ΔCOD में

$OA = OC$ (दिया है)

$\angle AOB = \angle COD$ (शीर्षाभिमुख कोण)

और $OB = OD$ (दिया है)

अतः भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से

$$\Delta AOB \cong \Delta COD$$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत कोण समान होंगे।

अर्थात् $\angle OAB = \angle OCD$

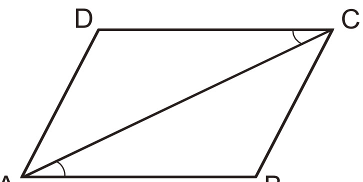
परन्तु यह तिर्यक रेखा AC द्वारा रेखाओं AB और CD पर बने एकान्तर कोण है। अतः

$AB \parallel CD$

इसी प्रकार $AD \parallel BC$

अतः ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है ''इतिसिद्धम''।

प्रमेय 9.8 एक चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज होता है, यदि उसकी सम्मुख भुजाओं का एक युग्म परस्पर बराबर एवं समान्तर हों।



चित्र 9.15

दिया है : एक चतुर्भुज ABCD

जिसमें $AB \parallel DC$ और $AB = DC$ हैं।

सिद्ध करना है : ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

रचना : A को C से मिलाया।

उपपत्ति : $AB \parallel DC$ और तिर्यक रेखा AC इनको प्रतिच्छेद करती हैं।

अतः $\angle BAC = \angle DCA$ (एकान्तर कोण) ...(1)

अब ΔABC और ΔCDA में

$AB = DC$ (दिया है)

$\angle BAC = \angle DCA$ [(1) से]

$AC = AC$ (उभयनिष्ठ भुजा)

अतः भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता नियम से

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों त्रिर्भुजों के संगत कोण समान होंगे।

अर्थात् $\angle ACB = \angle CAD$

अब AD, BC दो रेखाएँ है और तिर्यक रेखा AC जिनको इस प्रकार प्रतिच्छेद करती हैं कि एकान्तर कोण $\angle ACB$ एवं $\angle CAD$ समान हैं।

अतः $AD \parallel BC$ ...(2)

अर्थात् $AD \parallel BC$ [(2) से]

$AB \parallel DC$ (दिया है)

अतः ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है ''इतिसिद्धम''।

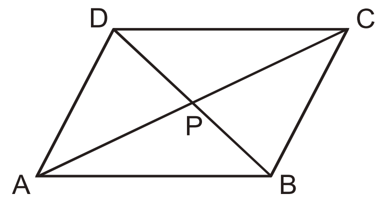
दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1: दो रेखाखण्डों AC और BD एक दूसरे को P पर समद्विभाजित करते हों, तो सिद्ध कीजिये कि ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

हलः दिया है: रेखाखण्ड AC और BD,

एक दूसरे को P पर समद्विभाजित करते हैं।

सिद्ध करना है : ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।



चित्र 9.16

रचना : A, B, C तथा D को क्रमशः मिलाया।

उपपत्ति : Δ APB और Δ CPD में

चित्रानुसार ABCD एक चतुर्भुज है

AC एवं BD इसके विकर्ण है

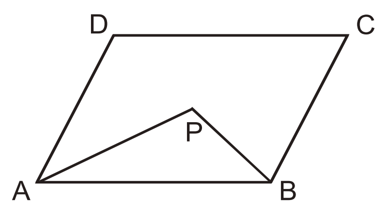
चूंकि AP = PC एवं BP = PD (दिया है) AC व BD को समद्विभाजित करता है।

अतः प्रमेय 9.7 से

ABCD एक समान्तर चुतुर्भुज है। ''इतिसिद्धम'' ।

उदाहरण 2: एक समान्तर चतुर्भुज ABCD में परिभाषति नहीं है A और B के समद्विभाजक बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करते हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle APB = 90^o$

हल : दिया है : चित्र 9.17 में, समान्तर चतुर्भुज ABCD के आसन्न कोणों A और B के समद्विभाजक P पर मिलते हैं।



चित्र 9.17

सिद्ध करना है : $\angle APB = 90^o$

उपपत्ति : हम जानते हैं कि समान्तर चतुर्भुज के आसन्न कोणों का योग 180^o होता है

अतः $\angle A + \angle B = 180^o$ ...(1)

दिया है कि $\angle PAB = \frac{1}{2}\angle A$

और $\angle PBA = \frac{1}{2}\angle B$

अतः $\angle PAB + \angle PBA = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$ ...(2)

(1) और (2) से

$\angle PAB + \angle PBA = 90^o$ ...(3)

ΔAPB में

$\angle PAB + \angle PBA + \angle APB = 180^o$ ...(4)

(3) और (4) से

$\Rightarrow \quad \angle APB = 90^o$ ''इतिसिद्धम्'' ।

उदाहरण 3: समान्तर चतुर्भुज ABCD में विकर्ण BD पर दो बिन्दु P और Q इस प्रकार स्थित हैं कि DQ = BP. सिद्ध कीजिए कि APCQ एक समान्तर चतुर्भुज है।

हलः दिया है : समान्तर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण BD पर दो बिन्दु P और Q इस प्रकार स्थित हैं कि BP = QD.

सिद्ध करना है : APCQ एक समान्तर चतुर्भुज है।

उपपत्ति : ΔAQD और ΔCPB में

$AD = BC$ (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

$\angle ADQ = \angle CBP$ (एकान्तर कोण)

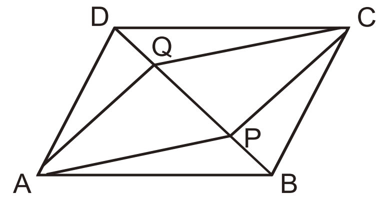
$QD = BP$ (दिया है)

अतः भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता नियम से

$\Delta AQD \cong \Delta CPB$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होंगी।

अर्थात् $AQ = CP \ldots (1)$



चित्र 9.18

इसी प्रकार ΔCQD और ΔAPB में, हम सिद्ध कर सकते है कि

$CQ = AP \ldots (2)$

(1) और (2) से

APCQ एक समान्तर चतुर्भुज है। ''इतिसिद्धम्''।

उदाहरण 4: चतुर्भुज **ABCD** के विकर्ण परस्पर बिन्दु **O** पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $\mathbf{OA : OC = 3 : 2}$ है। क्या **ABCD** एक समांतर चतुर्भुज है? कारण सहित स्पष्ट कीजिए।

हल : ABCD एक समांतर चतुर्भुज नहीं है, क्योंकि समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं। यहाँ $OA \neq OC$ है।

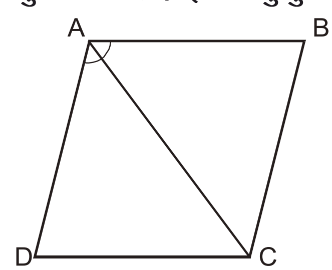
उदाहरण 5: किसी चतुर्भुज के कोण 3 : 4 : 4 : 7 के अनुपात में हैं। इस चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि चतुर्भुज के कोण $3x$, $4x$, $4x$ और $7x$ हैं।

इसलिए, $3x + 4x + 4x + 7x = 360^o$

या $18x = 360^o$, अर्थात् $x = 20^o$

इस प्रकार, वांछित कोण $60^o, 80^o, 80^o$ और 140^o हैं।



चित्र 9.19

उदाहरण 6: एक समांतर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसके एक कोण को समद्विभाजित करता है। सिद्ध कीजिए कि वह विकर्ण उस कोण के सम्मुख कोण को भी समद्विभाजित करेगा।

हलः आइए दिए हुए प्रतिबंधों के अनुसार आकृति खींचें (चित्र 7.19)। इसमें विकर्ण AC समांतर चतुर्भुज ABCD के $\angle BAD$ को समद्विभाजित करता है। अर्थात् यह दिया है कि $\angle BAC = \angle DAC$ है। हमें सिद्ध करना है कि $\angle BCA = \angle DCA$ है।

$AB \parallel DC$ है तथा AC एक तिर्यक रेखा है।

अतः $\angle BAC = \angle DCA$ (एकांतर कोण) $\ldots (1)$

इसी प्रकार, $\angle DAC = \angle BCA$ ($AD \parallel BC$ से) $\ldots (2)$

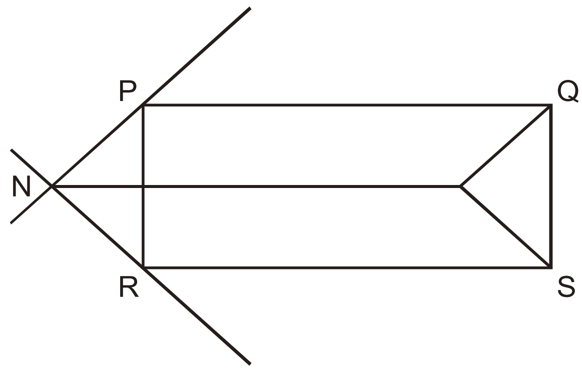
परंतु यह दिया है कि $\angle BAC = \angle DCA$

अतः (1), (2) और (3) से हमें प्राप्त होता है

$\angle BCA = \angle DCA$ ''इतिसिद्धम्''

उदाहरण 7: PQ और RS दो बराबर और समांतर रेखाखंड हैं। बिन्दु M, जो PQ या RS पर स्थित नहीं है, को Q और S से मिलाया जाता है। P से होकर जाती हुई QM के समांतर रेखा और R से होकर जाती हुए SM के समांतर रेखा परस्पर N पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि रेखाखंड MN और PQ परस्पर बराबर और समांतर हैं।

हल: हम दिए हुए प्रतिबंधों के अनुसार आकृति खींचते हैं। (चित्र 9.20)



चित्र 9.20

यह दिया है कि PQ = RS और PQ || RS है। अतः PQSR एक समांतर चतुर्भुज है।

अतः, PR = QS और PR || QS है। ...(1)

अब, PR || QS

इसलिए, $\angle RPQ + \angle PQS = 180^o$ (तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोण)

अर्थात् $\angle RPQ + \angle PQM + \angle MQS = 180^o$ ...(2)

साथ ही, PN || QM (रचना से)

$\angle NPR + \angle RPQ + \angle PQM = 180^o$ ...(3)

अतः, $\angle NPR = \angle MQS$ [(2) और (3) से] ...(4)

इसी प्रकार, $\angle NRP = \angle MSQ$ ...(5)

इसलिए, $\Delta PNR \cong \Delta QMS$ [ASA, (1), (4) और (5) के प्रयोग से]

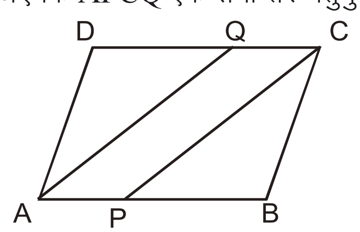
अतः PN = QM और NR = MS

क्योंकि PN || QM है, अतः PQMN एक समांतर चतुर्भुज है

अतः MN = PQ और NM || PQ है। ''इतिसिद्धम्''

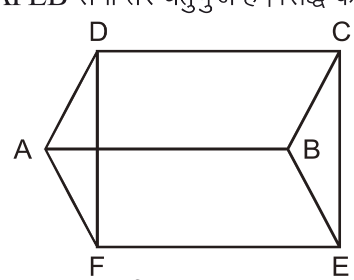
प्रश्नमाला 9.1

1. एक चतुर्भुज के कोण 3 : 5 : 9 : 13 के अनुपात में हैं। इस चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।
2. एक समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं जो OA = 3 cm और OD = 2 cm है, तो AC और BD की लंबाई ज्ञात कीजिए।
3. एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लंब होते हैं। क्या यह कथन सत्य है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।
4. क्या कोण 110°, 80°, 70° और 95° किसी चतुर्भुज के कोण हो सकते हैं? क्यों और क्यों नहीं
5. क्या किसी चतुर्भुज के सभी कोण अधिक कोण हो सकते हैं? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।
6. एक चतुर्भुज का एक कोण 108° है तथा अन्य तीनों कोण बराबर हैं। तीनों बराबर कोणों में से प्रत्येक को ज्ञात कीजिए।
7. ABCD एक समलंब है जिसमें $AB \parallel DC$ और $\angle A = \angle B = 45^\circ$ है। इस समलंब के कोण C और D ज्ञात कीजिए।
8. एक समांतर चतुर्भुज के एक अधिक कोण के शीर्ष से खींचे गए उस समांतर चतुर्भुज के दो शीर्षलंबों के बीच का कोण 60° है। इस समांतर चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।
9. समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण, AC पर बिन्दु E और F इस प्रकार स्थित हैं कि AE = CF है। दर्शाइए कि BFDE एक समांतर चतुर्भुज है।
10. चित्र 9.21 में, ABCD एक समान्तर चतर्भुज है। AQ और CP क्रमशः $\angle A$ और $\angle C$ के समद्विभाजक हैं। सिद्ध कीजिए कि APCQ एक समान्तर चतुर्भुज है।



चित्र 9.21

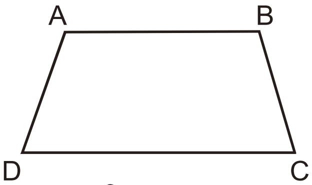
11. चित्र 9.22 में, ABCD और AFEB समान्तर चतुर्भुज है। सिद्ध कीजिए कि CDFE समान्तर चतुर्भुज है।



चित्र 9.22

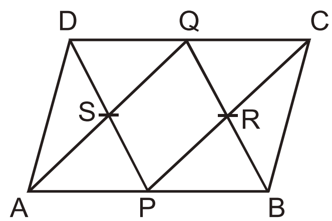
12. ABCD एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण BD पर A और C से डाले गये लम्ब क्रमशः AP और CQ हैं। सिद्ध कीजिए कि AP = CQ.

13. चित्र 9.23 में, ABCD एक चतुर्भुज है। जिसमें $AB \parallel DC$ और $AD = BC$ तो सिद्ध कीजिए कि $\angle A = \angle B$



चित्र 9.23

14. चित्र 9.24 में, ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है। P और Q क्रमशः सम्मुख भुजाओं AB और CD के मध्य बिन्दु हैं। सिद्ध कीजिए कि PRQS एक समान्तर चतुर्भुज है।



चित्र 9.24

9.06 विशेष समान्तर चतुर्भुज एवं उनके गुणधर्मः

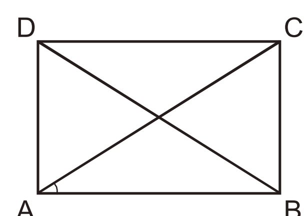
अनुच्छेद 9.4 में हमने समान्तर चतुर्भुज की कुछ विशेष आकृतियों के बारे में संक्षिप्त में जानकारी ली है।

आइए अब हम उन विशेष समान्तर चतुर्भुजों में विद्यमान गुणों को कुछ प्रमेयों के माध्यम से समझने का प्रयत्न करते हैं।

प्रमेय 9.9 यदि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण समान हों, तो वह एक आयत होता है।

दिया है : ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है, जिससे $AC = BD$

सिद्ध करना : ABCD एक आयत है।



चित्र 9.25

उपपत्ति : ΔABC और ΔBAD में

$BC = AD$ (स.च. की सम्मुख भुजाएँ)

$AB = AB$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$AC = BD$ (दिया है)

अतः भुजा–भुजा–भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से

$$\Delta ABC \cong \Delta BAD$$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत कोण समान होंगे।

अर्थात् $\angle CBA = \angle DAB$

परन्तु यह तिर्यक के एक ही ओर के अन्त कोण हैं।

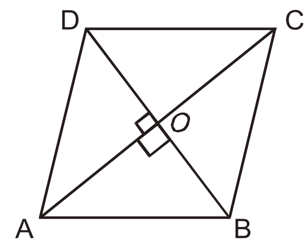
$\therefore \quad \angle DAB + \angle CBA = 180^\circ$

$\therefore \quad \angle DAB = \angle CBA = 90^\circ$

अतः ABCD एक आयत है। ''इतिसिद्धम्''।

विलोम : एक आयत के विकर्ण परस्पर बराबर होते हैं।

प्रमेय 9.10 यदि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्बवत् हों, तो वह एक समचतुर्भुज होता है।



चित्र 9.26

दिया है : समान्तर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर लम्बवत् है।

सिद्ध करना है : ABCD एक समचतुर्भुज है।

उपपत्ति : ΔAOB और ΔCOB में

$OB = OB$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle AOB = \angle BPC = 90^o$ (दिया है)

$AO = CO$ (समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।)

अतः भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से

$\Delta AOB \cong \Delta COB$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होंगी।

अर्थात् $AB = BC$

अतः ABCD एक समचतुर्भुज है। ''इतिसिद्धम्''

विलोम : एक समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्बबत् होते हैं।

प्रमेय 9.11 यदि एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर बराबर एवं लम्बवत् हो, तो यह एक वर्ग होता है।

दिया है : ABCD एक समानतर चतुर्भुज है, जिसमें $AC = BD$ एवं $AC \perp BD$ है।

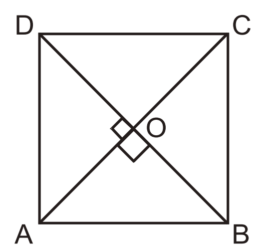
सिद्ध करना है : ABCD एक वर्ग है।

उपपत्ति : ΔABO और ΔADO में

$BO = OD$ (ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है)

$\angle AOB = \angle AOD = 90^o$ (दिया है)

$AO = AO$ (उभयनिष्ठ)



चित्र 9.27

अतः भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता नियम से

$\Delta ABO \cong \Delta ADO$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होंगी।

अर्थात् $AB = AD$ . . . (1)

अब ΔABD और ΔBAC में,

$BD = AC$ (दिया है)

$AB = AB$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$AD = BC$ (सम्मुख भुजाएँ)

अतः भुजा–भुजा–भुजा सर्वांगसमता नियम से

$$\Delta ABD \cong \Delta BAC$$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत कोण समान होंगे।

$$\angle DAB = \angle CBA \qquad \ldots(2)$$

हम जानते हैं कि, समान्तर चतुर्भुज के आसन्न कोणों का योग 180^o होता है।

$$\angle DAB + \angle CBA = 180^o \qquad \ldots(3)$$

(2) और (3) से

$$\angle DAB = \angle CBA = 90^o \qquad \ldots(4)$$

एवं (1) और (4) से

अतः ABCD एक वर्ग है। ''इतिसिद्धम''।

विलोम : एक वर्ग के विकर्ण बराबर और परस्पर लम्बवत् होते हैं।

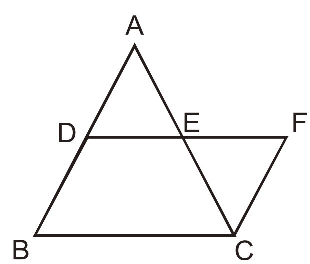
9.07 मध्य बिन्दु प्रमेय

आपने अब तक त्रिभुज और चतुर्भुज के अनेक गुणों के बारे में अध्ययन किया है। चलिए अब हम एक त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दु सम्बन्धी एक अन्य गुण पर निम्न क्रिया कलाप के माध्यम से विचार करते हैं।

प्रमेय 9.12 त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखा खण्ड तीसरी भुजा के समान्तर एवं उसका आधा होता है।

दिया है : त्रिभुज ABC में, बिन्दु D और E क्रमशः भुजाओं AB और AC के मध्य बिन्दु है।

सिद्ध करना है : (i) $DE \parallel BC$ (ii) $DE = \frac{1}{2}BC$



चित्र 9.28

रचना : DE को F तक बढ़ाया,

जहाँ EF = DE, C को F से मिलाया।

उपपत्ति : ΔADE और ΔCFE में,

$AE = CE$ (दिया है)

$\angle AED = \angle CEF$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$DE = EF$ (रचना से)

अतः भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता नियम से

$$\Delta ADE \cong \Delta CFE$$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ और कोण समान होंगे।

$\therefore \quad AD = CF$

$\angle EAD = \angle ECF$

तिर्यक रेखा AC रेखाओं AB और CF को प्रतिच्छेद करती है और एकान्तर कोण EAD तथा ECF बराबर है।

$AD \parallel CF$ और $BD \parallel CF$

परन्तु दिया है कि $AD = BD \dots (3)$

(1) और (3) से

$BD = CF$

अर्थात् $BD = CF$ और $BD \parallel CF$

अतः BCFD एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore$ DF एवं BC भी समान और समान्तर है।

या $DE \parallel BC$

$\therefore \quad DE = \frac{1}{2}DF$ (रचना से)

अतः $DE = \frac{1}{2}BC$ ''इतिसिद्धम्''।

प्रमेय 9.14 : (प्रमेय 9.12 का विलोम)

त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिन्दु से, एक अन्य भुजा के समान्तर खींची गई रेखा, तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है।

दिया है : चित्र 9.29 में, त्रिभुज ABC की भुजा AB का मध्य बिन्दु D है $DE \parallel BC$ और AC को E पर काटती है।

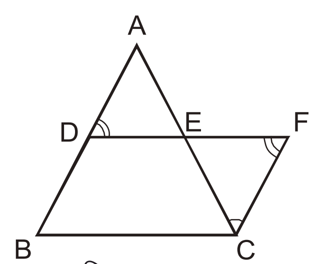
सिद्ध करना है : $AE = EC$

रचना : BD के समान्तर रेखा CF खींची, जो DE (बढ़ी हुई) को F पर प्रतिच्छेद करती है।

$\because \quad BC \parallel CF$ (दिया है)

$BD \parallel CF$ (रचना से)

अतः BCFD एक समान्तर चतुर्भुज है



चित्र 9.29

उपपत्ति : $\because \quad BD = CF \quad \dots (1)$

परन्तु $BD = AD$ (दिया है)

$\therefore \quad AD = CF$

अब ΔADE और ΔCFE में

$\angle ADE = \angle CFE$ (एकान्तर कोण)

$AD = CF$ [(1) से]

$\angle DAE = \angle ECF$ (एकान्तर कोण)

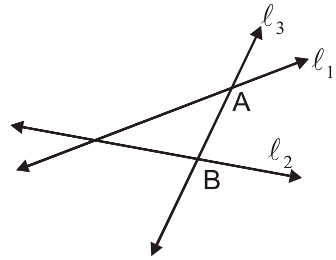
अतः कोण–भुजा–कोण सर्वांगसमता नियम से

$\Delta ADE \cong \Delta CFE$

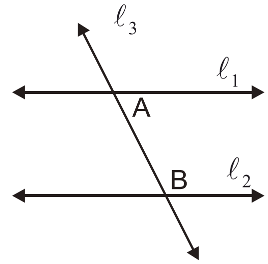
अतः $AE = CE$ ''इतिसिद्धम्''।

9.08 अन्तः खण्ड (Intercept):

यदि एक समतल में दो रेखाएँ ℓ_1 और ℓ_2 हों और यदि एक तीसरी रेखा ℓ_3 उन्हें भिन्न–भिन्न बिन्दुओं A और B पर प्रतिच्छेद करती हो, तो रेखाखण्ड AB दी गई रेखाओं ℓ_1 और ℓ_2 द्वारा तीसरी रेखा ℓ_3 पर बनाया गया अन्तः खण्ड कहलाता है।



चित्र 9.30



चित्र 9.31

यहाँ हम तीन समान्तर रेखाओं के लिए निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध करेंगे। इस प्रमेय का विस्तार तीन से अधिक रेखाओं के लिए भी किया जा सकता है।

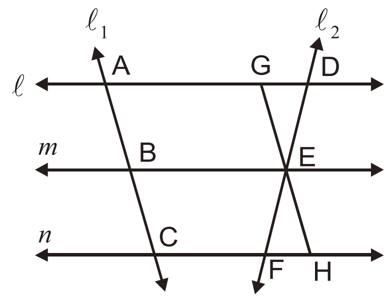
प्रमेय 9.15 यदि तीन या अधिक समान्तर रेखाएँ हो, और उनके द्वारा एक तिर्यक रेखा पर बनाये गये अन्तःखण्ड बराबर हो, तो किसी अन्य तिर्यक रेखा पर संगत अन्तःखण्ड भी बराबर होंगे।

दिया है : चित्र 9.32 में, ℓ, m, n तीन समान्तर रेखाएँ हैं और दो तिर्यक रेखाएँ ℓ_1 तथा ℓ_2 उनको क्रमशः A, B, C और D, E, F बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती हैं तथा $AB = BC$ है।

सिद्ध करना : $DE = EF$

रचना : तिर्यक रेखा ℓ_1 के समान्तर रेखा GH खींची, जो E से गुजरती है।

उपपत्ति : ℓ एवं m समान्तर रेखाएँ हैं। अतः



चित्र 9.32

$AG \parallel BE$

एवं $AB \parallel GE$ (रचना से)

$\therefore$ ABEG एक समान्तर चतुर्भुज है।

अतः $AB = GE$ ...(1)

इसी प्रकार BCHE भी एक समान्तर चतुर्भुज है।

अतः $BC = EH$ ...(2)

दिया हुआ है कि $AB = BC$

अतः $GE = EH$ ...(3)

पुनः ℓ और m समान्तर रेखाएँ है और तिर्यक रेखा ℓ_2 उनको प्रतिच्छेद करती हैं। अतः

$\angle GDE = \angle EFH$ (एकान्तर कोण) ...(4)

अब ΔGDE और ΔHFE में

$\angle GDE = \angle EFH$ [(4) से]

$GE = EH$ [(3) से]

$\angle GED = \angle FEH$ (शीर्षाभिमुख कोण)

कोण–भुजा–कोण सर्वांगसमता नियम से

$\Delta GDE \cong \Delta HFE$

अतः सर्वांगसमत त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होंगी

अर्थात् $DE = EF$ ''इतिसिद्धम्''।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 8. एक समबाहु त्रिभुज की भुजाओं BC, CA और AB के मध्यबिन्दु क्रमशः D, E और F है। सिद्ध कीजिए। कि Δ DEF एक समबाहु त्रिभुज है।

हलः दिया है : एक ΔABC जिसकी भुजाओं BC, CA और AB के मध्यबिन्दु क्रमशः D, E और F है।

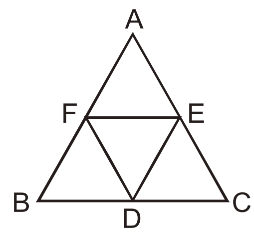
सिद्ध करना है : ΔDEF एक समबाहु त्रिभुज है।

उपपत्ति : ΔABC में D, E और F क्रमशः BC, CA और AB के मध्य बिन्दु हैं,

अतः $$DE = \frac{1}{2}AB \qquad \ldots(1)$$

$$EF = \frac{1}{2}BC \qquad \ldots(2)$$

$$FD = \frac{1}{2}AC \qquad \ldots(3)$$



चित्र 9.33

परन्तु ΔABC एक समबाहु है

अतः $AB = BC = AC$

(1),(2) और (3) से

$$DE = EF = FD$$

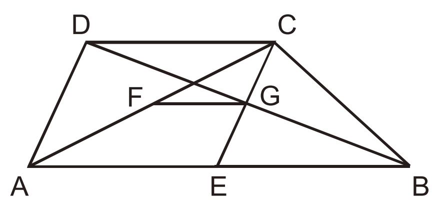
अर्थात् ΔDEF एक समबाहु त्रिभुज है। "इतिसिद्धम्"।

उदाहरण 9. सिद्ध कीजिए कि एक समलम्ब चतुर्भुज के विकर्ण मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा उसकी समान्तर भुजाओं के समान्तर तथा उनके अन्तर की आधी होगी।

हल : दिया है : एक समलम्ब चतुर्भुज ABCD है। AB || DC है एवं विकर्ण AC और BD के मध्य बिन्दु क्रमशः F और G हैं।

सिद्ध करना है : (i) FG || AB

(ii) $FG = \frac{1}{2}(AB - CD)$



चित्र 9.34

रचना : CG को मिलाते हुए आगे इस प्रकार बढ़ाया कि यह AB पर मिल E बिन्दु पर मिले।

उपपत्तिः ΔCDG और ΔEBG में

$\angle CDG = \angle EBG$ (एकान्तर कोण)

$DG = GB$ (दिया है)

$\angle DCG = \angle BEG$ (एकान्तर कोण)

$\Delta CDG \cong \Delta EBG$ (कोण–भुजा–कोण सर्वांगसमता नियम)

अतः $CG = EG \qquad \ldots(1)$

$CD = EB \qquad \ldots(2)$

अब ΔACE में, F और G क्रमशः भुजाओं AC और CE के मध्यबिन्दु हैं।

अतः $FG \parallel AE$ और $FG = \frac{1}{2}AE$ ...(3)

परन्तु $AE = AB - EB$

$AE = AB - CD$ [(2) से] ...(4)

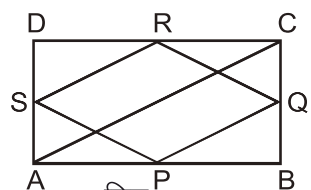
(3) और (4) से

$$FG = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}(AB - CD)$$

और $FG \parallel AE$

$\Rightarrow$ $FG \parallel AB$ ''इतिसिद्धम्''।

उदाहरण 10. सिद्ध कीजिए कि किसी चतुर्भुज की क्रमागत भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से बना चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज होता है।



चित्र 9.35

हल : दिया है : चित्र 9.35 में, ABCD एक चतुर्भुज है, जिसकी भुजाओं के मध्य बिन्दु क्रमशः P, Q, R और S हैं।

सिद्ध करना है : PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।

रचना : AC को मिलाया।

उपपत्ति : ΔABC में, P और Q क्रमशः भुजाओं AB और BC के मध्य बिन्दु हैं। अतः प्रमेय 9.12 से

$PQ \parallel AC$ और $PQ = \frac{1}{2}AC$ ...(1)

इसी प्रकार में, S और R क्रमशः भुजाओं AD और DC के मध्य बिन्दु है।

अतः $SR \parallel AC$

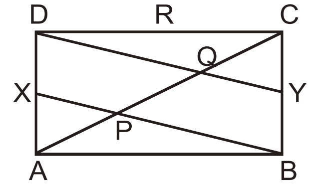
और $SR = \frac{1}{2}AC$ ...(2)

(1) और (2) से

$$PQ \parallel SR \text{ और } PQ = SR = \frac{1}{2}AC$$

अर्थात् PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है। ''इतिसिद्धम्''।

उदाहरण 11. चित्र 9.36 में, X और Y क्रमशः समांतर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाओं AD और BC के मध्य–बिन्दु हैं। साथ ही, BX और DY क्रमशः AC को P और Q पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि AP = PQ = QC है।



चित्र 9.36

हल : आकृति 9.36 में X और Y क्रमशः समान्तर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाओं AD और BC के मध्य बिन्दु है। साथ BX और DY क्रमशः AC को P और Q पर प्रतिच्छेद करते है।

दर्शाना है $AP = PQ = QC$

$AD = BC$ (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

अतः $DX = BY\left(\frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC\right)$

साथ ही, $DX \mid BY$ (क्योंकि $AD \parallel BC$)

अतः, XBYD एक समांतर चतुर्भुज है। (सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर और समांतर है)

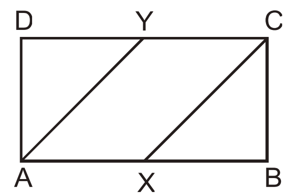
अर्थात् $PX \parallel QD$

अतः $AP = PQ$ (ΔAQD से, जहाँ X रेखाखंड AD का मध्य–बिन्दु है) (I)

इसी प्रकार, ΔCPB से, $CQ = PQ \ldots (2)$

इस प्रकार, $AP = PQ = CQ$ [(1) और (2) से]

उदाहरण 12. चित्र 9.37 में, AX और CY क्रमशः समांतर चतुर्भुज ABCD के सम्मुख कोण A और C के समद्विभाजक हैं। दर्शाइए कि AX || YC है।



चित्र 9.37

हलः $\angle A = \angle C$ (समांतर चतुर्भुज ABCD के सम्मुख कोण)

अतः $\frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\angle C$

अर्थात् $\angle YAX = \angle YCX$ $\ldots(1)$

साथ ही, $\angle AYC + \angle YCX = 180^o$ (क्योंकि $YA \parallel CX$) $\ldots(2)$

अतः $\angle AYC + \angle YAX = 180^o$ [(1) और (2) से]

इसलिए, $AX \parallel YC$ (क्योंकि तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोण संपूरक हैं)

उदाहरण 13. दर्शाइए कि एक समचतुर्भुज की भुजाओं के मध्य–बिन्दुओं को, एक ही क्रम में मिलाने पर बना चतुर्भुज एक आयत होता है।

हल : मान लीजिए कि ABCD एक समचतुर्भुज है तथा P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य–बिन्दु हैं (चित्र 9.38) AC और BD को मिलाइए।

ΔABD से, हमें प्राप्त हैः

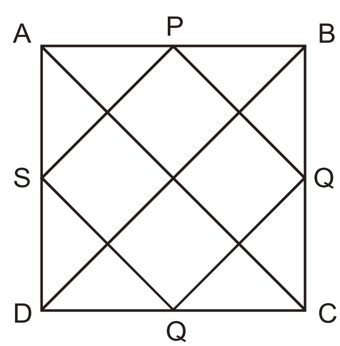
$SP = \frac{1}{2}BD$ और

$SP \parallel DB$ (क्योंकि S और P मध्य–बिन्दु है)

इसी प्रकार, $RQ = \frac{1}{2}BD$ और $RQ \parallel DB$

अतः $SP = RQ$ और $SP \parallel RQ$

इसलिए, PQRS एक समांतर चतुर्भुज है।



चित्र 9.38

साथ ही, $AC \perp BD$ (समचतुर्भुज के विकर्ण लंब होते हैं)

इसके अतिरिक्त, $PQ \parallel AC$ (ΔBAC से)

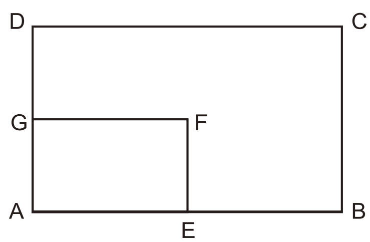
क्योंकि $SP \mid BD$, $PQ \parallel AC$ और $AC \perp BD$ है

इसलिए हमें प्राप्त होता है : $SP \perp PQ$ अर्थात् $\angle SPQ = 90^{\circ}$ ...(2)

अतः PQRS एक आयत है [(1) और (2) से] ''इतिसिद्धम्''

प्रश्नमाला 9.2

1. चित्र 9.39 में, ABCD और AEFG दो समांतर चतुर्भुज हैं यदि $\angle C = 55^{\circ}$ है, तो $\angle F$ निर्धारित कीजिए।



चित्र 9.39

2. क्या किसी चतुर्भुज के सभी कोण न्यून कोण हो सकते हैं? अपने उत्तर का कारण दीजिए।

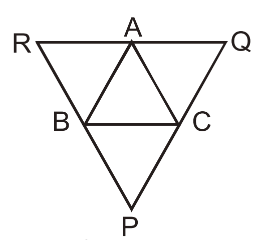
3. क्या किसी चतुर्भुज के सभी कोण समकोण हो सकते हैं? अपने उत्तर का कारण दीजिए।

4. एक चतुर्भुज ABCD के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं। यदि $\angle A = 35^{\circ}$ है, तो $\angle B$ निर्धारित कीजिए।

5. एक चतुर्भुज ABCD के सम्मुख कोण बराबर हैं। यदि $AB = 4$ cm है, तो CD निर्धारित कीजिए।

6. ABCD एक समचतुर्भुज है, जिसमेंD से AB पर शीर्षलंब AB को समद्विभाजित करता है। समचतुर्भुज के कोण ज्ञात कीजिए।

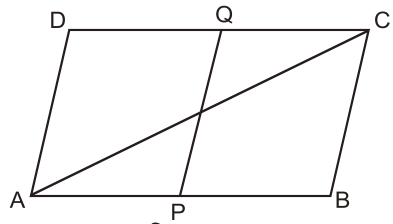
7. एक त्रिभुज ABC के शीर्षों A, B और C से होकर, क्रमशः भुजाओं BC, CA और AB के समांतर रेखाएँ RQ, PR और QP चित्र 9.40 में दर्शाए अनुसार खींची गई हैं। दर्शाइए कि $BC = \frac{1}{2} = QR$ है।



चित्र 9.40

8. D, E और F क्रमशः एक समबाहु त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA और AB के मध्य–बिन्दु हैं। दर्शाइए कि ΔDEF भी एक समबाहु त्रिभुज है।

9. एक समांतर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाओं AB और CD पर क्रमशः बिन्दु P और Q इस प्रकार लिए गए हैं कि AP = CQ है (चित्र 9.41) दर्शाइए कि AC और PQ परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

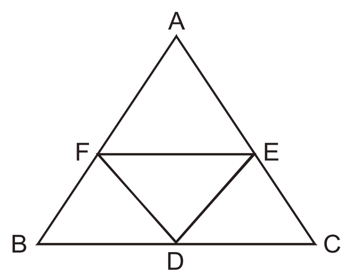


चित्र 9.41

10. E एक समलंब ABCD की भुजा AD का मध्य–बिन्दु है, जिसमें AB || DC है। E से होकर AB के समांतर खींची गई रेखा BC को F पर प्रतिच्छेद करती है। दर्शाइए कि F भुजा BC का मध्य–बिन्दु है। [संकेत : AC को मिलाइए]

11. Δ ABC में, AB = 5 cm, BC = 8 cm और CA = 7 cm हैं। यदि D और E क्रमशः AB और BC के मध्य–बिन्दु है, तो DE की लंबाई निर्धारित कीजिए।

12. चित्र 9.42 में, यह दिया है कि BDEF और FDCE समांतर चतुर्भुज हैं। क्या आप कह सकते हैं कि BD = CD है? क्यों और क्यों नहीं?

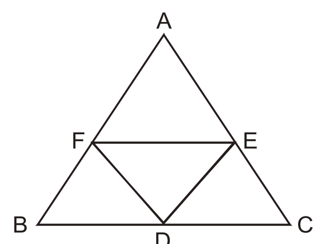


चित्र 9.42

13. चित्र 9.43 में, D, E और F क्रमशः भुजाओं BC, CA और AB के मध्य बिन्दु हैं। यदि AB = 4.3 सेमी, BC = 5.6 सेमी और AC = 3.9 सेमी हों, तो निम्नलिखित का परिमाप ज्ञात कीजिए।

(i) Δ DEF

(ii) चतुर्भुज BDEF



चित्र 9.43

14. सिद्ध कीजिए कि एक वर्ग की क्रमागत भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाकर बनाया गया चतुर्भुज भी एक वर्ग होता है।

15. एक चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्बवत् हैं। सिद्ध कीजिए कि उसकी भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से निर्मित चतुर्भुज एक आयत होता है।

16. सिद्ध कीजिए कि एक समकोण त्रिभुज के कर्ण को समद्विभाजित करने वाली माध्यिका कर्ण की आधी होती है

17. सिद्ध कीजिए कि एक आयत की भुजाओं के युग्मों के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से एक समचतुर्भुज बनता है।