# पाठ 9
# एक चर वाले समीकरण

**आइए सीखें**

- $\frac{ax+b}{cx+d} = K$ [जहाँ $(cx + d \neq 0)$] प्रकार के समीकरणों को हल करना।
- एक चरीय रेखिक समीकरणों पर सरल प्रश्नों को हल करना।
- शाब्दिक प्रश्नों को गणितीय कथन के रूप में व्यक्त करना।

## 9.1 हम जानते हैं

ऐसे बहुपद जिनकी घात एक हो को रैखिक बीजीय व्यंजक कहते हैं। तुल्यता के साथ इनका रूप $ax+ b = k$ के प्रकार का होता है। जिसे रैखिक समीकरण कहते हैं।

जैसे $3x + 5 = 8$

**ध्यान दें** उपरोक्त समीकरण

- एक चर वाला है।
- चर की घात एक है। अत: एक घात का बहुपद है।
- केवल $x = 1$ के लिये सत्य है। सभी मानों के लिये नहीं अत: समीकरण कुछ मानों के लिये सत्य हो सकती है। सभी मानों के लिये नहीं।

बीजीय व्यंजक में = चिह्न नहीं होता, समीकरण में होता है।

चर राशि **x** का ऐसा मान जो समीकरण को संतुष्ट करे, समीकरण का हल या मूल कहलाता है।

निम्नलिखित क्रियाओं से समीकरण के तुल्यता चिह्न (=) में कोई परिवर्तन नहीं होता

I. किसी समीकरण के दोनों पक्षों में हम समान संख्या जोड़ सकते हैं।

II. किसी समीकरण के दोनों पक्षों में हम समान संख्या घटा सकते हैं।

III. किसी समीकरण के दोनों पक्षों को समान संख्या से गुणा कर सकते हैं।

IV. किसी समीकरण के दोनों पक्षों को समान शून्येत्तर संख्या से भाग दे सकते हैं।

V. किसी पद का पक्षांतर करना। यह उपर्युक्त का सरलीकरण है। गणना में इसी सरलीकरण का प्रयोग करते हैं।

यह ध्यान देने योग्य है कि बिन्दु (V) के आधार पर हम एक समीकरण के किसी पद को समीकरण के एक पक्ष से दूसरे पक्ष में पक्षांतरित कर सकते हैं। उनके चिह्नों के बदलने के बाद ही ऐसा करते हैं। (+ से – और – से + एवं × से ÷ और ÷ से ×)

इस पाठ में, हम

$\frac{ax+b}{cx+d} = K$ जहाँ a, b, c, d और k संख्याएँ हैं और $cx + d \neq 0$

इस समीकरण को रैखिक समीकरण में परिवर्तित कर हल करना सीखेंगे। दैनिक जीवन में इनका उपयोग कैसे कर सकते हैं, यह भी सीखेंगे।

## 9.2 $\frac{ax+b}{cx+d} = K$ के रूप वाले समीकरण हल करना

$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{K}{1}$ के रूप वाले समीकरण को हल करने के लिए हम बायें पक्ष के हर का दायें पक्ष के अंश से और बायें पक्ष के अंश का दायें पक्ष के हर से गुणा करते हैं तथा दोनों गुणनफलों के मध्य तुल्यता (=) का चिह्न प्रयोग करते हैं। इस प्रक्रिया को बज्र गुणन (क्रास गुणन) कहते हैं।

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{K}{1}$$

या $k(cx + d) = (ax + b)$

**कारण** दोनों पक्षों में हर का गुणा करने पर $\frac{ax+b}{cx+d} \times (cx+d) = k(cx+d)$

$$ax + b = k(cx + d)$$

समीकरण को हल कर रैखिक समीकरण में बदलते हैं।

रैखिक समीकरण का हल चर का मान होता है। इसे कुछ उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करते है।

**उदाहरण 1.** समीकरण $\frac{3x+7}{5x-9} = 4$ को हल कीजिए।

**हल :** हम दिए गए समीकरण $\frac{3x+7}{5x-9}$ के दोनों पक्षों में तुल्यता चिह्न को प्रभावित किए बिना, 5x-9 से गुणा कर सकते हैं। ऐसा करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{3x+7}{5x-9} \times (5x-9) = 4(5x-9)$$

या $3x + 7 = 20x - 36$

या $3x - 20x = -36 - 7$ (20x और 7 का पक्षान्तर करने पर)

या $-17x = -43$

या $x = \frac{-43}{-17}$

$$= \frac{43}{17}$$

**जाँच** : जब $x = \frac{43}{17}$, तब

$$\text{बायां पक्ष} = \frac{3 \times \frac{43}{17} + 7}{5 \times \frac{43}{17} - 9} = \frac{\frac{129 + 119}{17}}{\frac{215 - 153}{17}}$$

$$= \frac{248}{62}$$

$$= 4$$

= दायाँ पक्ष

अत: हल सही है।

**उदाहरण 2.** $\frac{4x + 3}{2x + 7} = 3$ को हल कीजिए।

**हल :** $\frac{4x + 3}{2x + 7} = \frac{3}{1}$

दोनों पक्षों में 2x + 7 का गुणा करने पर

$$\frac{(4x + 3)}{(2x + 7)} \times (2x + 7) = \frac{3}{1} \times (2x + 7)$$

या $4x + 3 = 6x + 21$

या $-18 = 2x$

या $2x = -18$

$2x \times \frac{1}{2} = -18 \times \frac{1}{2}$ (दोनों पक्षों में $\frac{1}{2}$ का गुणा करने पर)

या $x = -9$

**जाँच : जब $x = -9$, तब**

$$\text{बायां पक्ष} = \frac{4x + 3}{2x + 7} = \frac{4(-9) + 3}{2(-9) + 7} = \frac{-36 + 3}{-18 + 7}$$

$$= \frac{-33}{-11}$$

$= 3$ = दायां पक्ष

अत: $x = -9$ का मान दिए गए समीकरण को संतुष्ट करता है।

## प्रश्नावली 9.1

**निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए**

1. $\frac{5x-7}{3x}=2$

2. $\frac{4x+18}{5x}=2$

3. $\frac{4x}{2x+7}=3$

4. $\frac{9x}{7-6x}=15$

5. $\frac{2-Z}{Z+16}=\frac{3}{5}$

6. $\frac{2y+3}{y-9}=\frac{2}{7}$

7. $\frac{2y-9}{3y+4}=-1$

8. $\frac{3x+5}{2x+7}=4$

9. $\frac{2x+1}{3x-2}=\frac{5}{9}$

10. $\frac{1-9y}{19-3y}=\frac{5}{8}$

11. $\frac{\frac{3}{4}y+7}{\frac{2}{5}y-4}=\frac{5}{4}$

12. $\frac{x^2-(x+1)(x+2)}{5x+1}=6$

### 9.3 व्यावहारिक प्रश्नों को हल करने में समीकरणों का अनुप्रयोग

व्यावहारिक प्रश्नों को हल करने के लिए निम्नलिखित महत्वपूर्ण चरण पूर्ण करते हैं

1. प्रश्न में क्या दिया गया है और क्या ज्ञात करना है, पता करते हैं।
2. अज्ञात राशियों को किसी एक चर x, y, z आदि द्वारा व्यक्त करते हैं।
3. प्रश्न के विभिन्न कथनों को गणितीय कथनों में परिवर्तित करते हैं तथा उपयुक्त समीकरण बनाते हैं।
4. अज्ञात राशियों का मान ज्ञात करने के लिए समीकरण हल करते हैं।
5. जाँच कर लेते हैं कि प्राप्त हल, प्रश्न में दी गई शर्तों को संतुष्ट कर रहा है, या नहीं।

**उदाहरण 3.** दो संख्याओं का योग 45 तथा उनका अनुपात 7:8 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

**हल :** माना पहली संख्या x है। प्रश्नानुसार पहली संख्या + दूसरी संख्या = 45

x + दूसरी संख्या = 45

दूसरी संख्या = 45 – x

प्रश्नानुसार $\frac{\text{पहली संख्या}}{\text{दूसरी संख्या}}=\frac{7}{8}$

$$\frac{45 - x}{x} = \frac{7}{8}$$

या, $7x = 8\ (45 - x)$

या, $7x = 360 - 8x$

या, $15x = 360$

या, $x = 24$

दूसरी संख्या $= 45 - 24 = 21$

अत: संख्याएं 24 व 21 हैं। उत्तर

**उदाहरण 4.** एक दो अंकीय संख्या के दोनों अंकों का योग 12 है। यदि अंकों को उलटने से प्राप्त नवीन संख्या मूल संख्या से 18 अधिक हो जाती है, तो मूल संख्या ज्ञात कीजिए। अपने उत्तर की जाँच भी कीजिए।

**हल :** माना, इकाई का अंक x है।

अत: दहाई का अंक $12 - x$ होगा।

मूल संख्या = 10 (दहाई का अंक) + इकाई का अंक

$= 10\ (12 - x) + x$

नवीन संख्या (अंकों को उलटने से प्राप्त संख्या) $= 10\ (x) + (12 - x)$

प्रश्नानुसार नवीन संख्या = मूल संख्या + 18

$[10x + (12 - x)] = 10\ (12 - x) + x + 18$

या, $10x + 12 - x = 120 - 10x + x + 18$

या, $18x = 138 - 12$

या, $x = \frac{\cancel{126}}{\cancel{18}}\ 7$

$x = 7$ इकाई का अंक 7 है।

दहाई का अंक $= 12 - x = 12 - 7 = 5$

अत: मूल संख्या $= 10\ (12 - x) + x$

$= 120 - 10x + x$

$= 120 - 9x$

$= 120 - 9 \times 7$

$= 120 - 63$

$= 57$ **अत: मूल संख्या 57** उत्तर

**उत्तर की जाँच :**

प्राप्त संख्या = 57

इकाई का अंक = 7

दहाई का अंक = 5

अंकों को उलटने से,

इकाई का अंक = 5

दहाई का अंक = 7

नवीन संख्या = $10 \times 7 + 5 = 75$

नवीन संख्या – मूल संख्या = $75 - 57 = 18$

अत: प्रश्नानुसार उत्तर की पुष्टि हुई।

## प्रश्नावली 9.2

1. यदि रमेश की उम्र $x$ वर्ष हो तो निम्नलिखित कथन के लिए गणितीय रूप को लिखिए
   - (a) उमेश की उम्र रमेश की उम्र से 5 वर्ष अधिक है।
   - (b) रहीम की उम्र रमेश की उम्र से 3 वर्ष कम है।
   - (c) रमेश के पिताजी की उम्र रमेश की उम्र के 2 गुने से चार वर्ष अधिक है।
   - (d) रमेश की माँ की उम्र रमेश की उम्र के 2 गुने से एक वर्ष कम है।
   - (e) रमेश के दादाजी की उम्र रमेश की उम्र की चार गुने से 5 वर्ष कम है।
2. दो धनात्मक संख्याओं का योग 70 है। एक संख्या को दूसरी संख्या से भाग देने पर भागफल 4 प्राप्त होता है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
3. दो अंकों की संख्या में दहाई का अंक इकाई के अंक का तीन गुना है। यदि अंकों को उलट दिया जाए तो नई संख्या मूल संख्या से 36 कम हो जाती है। संख्या ज्ञात कीजिए।
4. एक परिमेय संख्या का हर उसके अंश से 4 अधिक है। यदि अंश में 11 जोड़ दिया जाए तथा हर में से 1 कम कर दिया जाए तो नई संख्या $\frac{7}{3}$ होगी। मूल संख्या ज्ञात कीजिए।

5. एक परिमेय संख्या का अंश उसके हर से 3 कम है। यदि अंश तिगुना कर दिया जावे और हर में 20 जोड़ दिया जाये, तो नवीन संख्या $\frac{1}{8}$ हो जाती है। मूल संख्या ज्ञात कीजिए।

6. रमेश की माताजी की आयु उसकी आयु की चार गुनी है। पाँच वर्ष बाद माँ की आयु की तिगुनी रह जायेगी। दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

7. 5 के दो क्रमगत गुणजों का योग 55 है। इन दोनों गुणजों को ज्ञात कीजिए।

8. रूबी और रेशमा की आयु में 5:7 का अनुपात है। चार वर्ष पश्चात्, उनकी आयु का अनुपात 3:4 हो जाएगा। उनकी आयु ज्ञात कीजिए।

9. पाँच वर्ष पहले शिवानी की आयु शशि की आयु की तीन गुनी थी। दस वर्ष पश्चात शिवानी की आयु शशि की आयु की दुगुनी हो जाएगी। उनकी वर्तमान आयु क्या है?

10. एक आयत की लम्बाई उसकी चौड़ाई से 4 गुनी है। यदि लम्बाई और चौड़ाई प्रत्येक में 3 सेमी की वृद्धि कर दी जाये, तो इस नवीन आयत का क्षेत्रफल दिये गए आयत के क्षेत्रफल से 84 वर्ग सेमी अधिक हो जाता है। दिए गए आयत की लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।