अध्याय–2
बहुपद
महत्वपूर्ण बिंदु

- एक चर x में बहुपद p(x) निम्न प्रकार का एक बीजीय व्यंजक होता है,

  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, जहाँ

  (i) $a_0, a_2, a_2, \ldots a_n$ अचर है और $an \neq 0$.

  (ii) $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ क्रमशः x°, x, x^2, $\ldots x^n$ के गुणांक है।

  (iii) प्रत्येक $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ बहुपद के पद कहलाते हैं।

  (IV) n बहुपद की घात कहलाता है जहाँ n एक पूर्ण संख्या है।

2. **बहुपद की घातः** एक बहुपद में चर की अधिकतम घात वाले पद की घातांक को बहुपद की घात कहा जाता है।

3. **बहुपद के प्रकार :** सामान्यतः हम बहुपदों को निम्न रूप में वर्गीकृत कर सकते हैं।

(i) घात के आधार पर :

	घात	बहुपद	सामान्य रूप	उदाहरण
(a)	1	रैखिक बहुपद	$ax + b$	$x + 1, 2x$ इत्यादि
(b)	2	द्विघातीय बहुपद	$ax^2 + bx + c$	$4x^2 + 5x + \frac{2}{3}$ इत्यादि
(c)	3	त्रिघातीय बहुपद	$ax^3 + bx^2 + cx + d$	$x^3 - 3x^2 + 5$ इत्यादि
(d)	4	द्विवर्ग बहुपद	$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	$x^4 - 16$ इत्यादि

Note : घात 5 और उससे अधिक वाले बहुपद के लिए कोई विशेष नाम नहीं होता है।

https://www.evidyarthi.in

(ii) पदों के आधार पर

	पदों की संख्या	बहुपद	उदाहरण
(a)	1	एकपदी	$5,\ 3x,\ 1/3\,y$
(b)	2	द्विपदी	$\sqrt{3}+6x,\ x-5y,\ x^2+2$
(c)d	3	त्रिपदी	$\sqrt{2}x^2+4x+2, 5y^4+2y+6$

Note : चार या उससे अधिक पद वाले बहुपदों के लिए कोई विशेष नाम नहीं होता। इनको सामान्यत: बहुपद कहते हैं।

(iii) शून्य घात वाला बहुपद या शून्येतर अचर बहुपद : शून्येतर (शून्य को छोड़कर) संख्या (अचर) को शून्य घात वाला बहुपद या शून्येतर अचर बहुपद कहते हैं।

अर्थात् $p(x) = a$ जहाँ पर $a \neq 0$ एक शून्य घात वाला बहुपद है क्योंकि $p(x) = a$ को $p(x) = ax^\circ$ लिखा जा सकता है।

उदाहरणतया $5 = 5x^\circ,\ \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2}x^0$

(iv) शून्य बहुपद : एक बहुपद जिसके सभी गुणांक शून्य हों, शून्य बहुपद कहलाता है अर्थात् $p(x) = 0$ शून्य बहुपद की घात परिभाषित नहीं है।

4. किसी बहुपद $p(x)$ के लिए यदि $p(a) = 0$ जहाँ a वास्तविक संख्या है, हम कह सकते हैं कि 'a' बहुपद का शून्यक है।

5. यदि $p(x)$ एक या एक से अधिक घात का बहुपद हो तथा $p(x)$ को एक रैखिक बहुपद $x - a$, से भाग किया जाए तो शेषफल $p(a)$ होगा इसे शेषफल प्रमेय कहते हैं।

https://www.evidyarthi.in

6. यदि p(x) एक बहुपद है जिसकी घात एक या एक से अधिक है तथा a एक वास्तविक संख्या है तो

(i) (x – a), बहुपद p(x) का एक गुणखण्ड होगा यदि p(a) = 0

(ii) यदि p(a) = 0, (x – a) बहुपद p(x) का एक गुणनखण्ड है। इसे गुणनखण्ड प्रमेय कहते हैं।

7. एक 'n' घात के बहुपद के अधिकतम 'n' शून्यक हो सकते हैं।

* बीजीय सर्वसमिकायें

(I) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

(ii) $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

(iii) $x^2-y^2 = (x+y)(x-y)$

(iv) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

(v) $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

(vi) $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y) = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$

(vii) $(x-y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x-y) = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2$

(viii) $x^3+y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

ix) $x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy + y^2)$

x) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$$= \frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\}$$

xi) यदि $x+y+z = 0$, हैं तो $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

https://www.evidyarthi.in

खण्ड - अ

1. $5y^3+2y^2-y+5$ में y^3 का गुणांक क्या है?

2. $(x^2-1)(x-2)$ के गुणनफल में x^2 का गुणांक लिखिए?

3. यदि $3x-2a$ का एक गुणनखण्ड $(x-2)$ हो तो a का मान ज्ञात कीजिए।

4. बहुपद $\frac{x^3+3x-1}{5}-\frac{5}{2}x^2-x^5$ की घात ज्ञात कीजिए।

5. यदि $p(x)=x^3-3x^2+2x-3$ तो $p(1)+p(-1)$ का मान ज्ञात कीजिए?

6. बहुपद z^2-8 के शून्यक ज्ञात कीजिए।

7. भाज्य = भाजक × भागफल + ____________.

8. त्रिपदी बहुपद का एक उदाहरण लिखिये जिसकी घात 3 हो।

9. एकपदी, द्विपदी तथा द्विघातीय बहुपद का एक–एक उदाहरण लिखिए।

10. जाँच कीजिए कि क्या $x=3$ बहुपद $x^2-3x+x-3$ का एक शून्यक है।

11. बहुपद $\sqrt{7}$ की घात क्या है?

12. यदि बहुपद $3x^2+5x+k$ का एक शून्यक -1, है तो k का मान ज्ञात कीजिए।

13. $4x^2-4x+1$ को द्विपदी बहुपद के वर्ग के रूप में लिखिए।

खण्ड-ब

14. जाँच कीजिए कि $q(x)$, $r(x)$ का गुणज है या नहीं जहाँ $q(x)=2x^3-11x^2-4x+5$, तथा $r(x)=2x+1$.

15. दर्शाइए कि $(x-5)$ बहुपद $x^3-3x^2-4x-30$ का एक गुणनखण्ड है?

16. उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग करके $(997)^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

https://www.evidyarthi.in

17. बहुपद $p(x) = x(x-2)(x+3)$ के शून्यक ज्ञात कीजिए?

18. $3x^2 - 7x - 6$ को $(x-3)$ से भाग देने पर भागफल ज्ञात कीजिए?

19. गुणनखण्ड कीजिए : $8x^3 + \sqrt{27}y^3$.

20. यदि $p(x) = x + 9$ है तो $p(x) + p(-x)$ ज्ञात कीजिए।

21. सीधे गुणा न करके 106×94 का मान ज्ञात कीजिए।

22. यदि $36x^2 - b = \left(6x + \frac{1}{5}\right)\left(6x - \frac{1}{5}\right)$ तो b का मान ज्ञात कीजिए।

23. उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग करके $(2x - 3y + z)^2$ को प्रसारित कीजिए।

24. $(351)^2 - (350)^2$ का मान ज्ञात कीजिए?

खण्ड स

25. गुणनखण्ड कीजिए : $64a^2 + 96ab + 36b^2$

26. गुणनखण्ड कीजिए : $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

27. यदि $x^2 + y^2 = 49$ तथा $x - y = 3$ तो $x^3 - y^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

28. सरल करो : $(5a - 2b)(25a^2 + 10ab + 4b^2) - (2a + 5b)(4a^2 - 10ab + 25b^2)$

29. यदि $x^3 - 3x^2 + 4x - 4$ को $(x - 1)$ तथा $(x + 2)$ से भाग किया जाए तो इस प्रकार प्राप्त शेषफलों का योग ज्ञात कीजिए।

30. गुणनफल ज्ञात कीजिए: $\left(p - \frac{1}{p}\right)\left(p + \frac{1}{p}\right)\left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)\left(p^4 + \frac{1}{p^4}\right)$

31. $7\sqrt{2}\,k^2 - 10k - 4\sqrt{2}$ का गुणनखण्ड कीजिए।

32. सरल कीजिए: $(3x - 4y)^3 - (3x + 4y)^3$

33. उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग करके $(2a)^3 + b^3 + (3c)^3 - 18abc$ को प्रसारित करिये।

https://www.evidyarthi.in

34. सरल कीजिए: $(x+y+z)^2-(x-y-z)^2$.

खण्ड द

35. गुणनखण्ड कीजिए: $125x^3+8y^3-z^3-30xyz$.

36. $(x+2)$, बहुपद ax^3+bx^2+x-2 का एक गुणनखण्ड है तथा $(x-2)$ से इस बहुपद को भाग देने पर शेषफल 4 प्राप्त होता है, तो a और b के मान ज्ञात कीजिए?

37. जाँच कीजिए कि बहुपद $p(t)=6t^3+3t^2+3t+18$, $(2t+3)$ का एक गुणज है।

38. k का मान ज्ञात करो यदि $(x+k)$ बहुपद $x^3+kx^2-2x+k+4$ का एक गुणनखण्ड है तथा x^4-x का गुणनखण्ड कीजिए।

39. यदि $(x-3)$ तथा $\left(x-\frac{1}{3}\right)$ बहुपद px^2+3x+r, के गुणनखण्ड हों तो सिद्ध कीजिए कि $p=r$.

40. (i) उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग करके, $(-7)^3+(5)^3+(2)^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

(ii) उस घन की विमाएँ ज्ञात करो जिसका आयतन व्यंजक $4x^2+14x+6$ से प्रदर्शित होता है।

41. वह आयत जिसका क्षेत्रफल दिया गया है, की लम्बाई और चौड़ाई के लिए संभव व्यंजक दीजिए।

(i) $(x^2+5\sqrt{5}x+30)$ वर्ग इकाई

(ii) $(24x^2-26x-8)$ वर्ग इकाई

https://www.evidyarthi.in

42. कक्षा IX द्वारा NSS. के अन्तर्गत एक साक्षरता अभियान आयोजित किया गया, रैली हेतु छात्राओं ने $(x - 5)$ पंक्ति (rows), $(3x - 4)$ स्तम्भ (Column) बनाए। कुल छात्राओं की संख्या को बीजीय व्यजंक के रूप में दर्शाइए।

43. वृक्षारोपण कार्यक्रम के अन्तर्गत कक्षा IX के विद्यार्थियों ने कुल $(3x^2 - 4x - 4)$ वृक्ष लगाए। यदि विद्यार्थियों की संख्या $(x - 2)$ है तो प्रत्येक विद्यार्थी द्वारा लगाएँ गए पेड़ों की संख्या ज्ञात कीजिए। (यह मानते हुए कि प्रत्येक विद्यार्थी समान संख्या में पेड़ लगाता है।)

44. यदि $a + b + c = 0$ है तो

$\frac{(b+c)^2}{bc} + \frac{(c+a)^2}{ca} + \frac{(a+b)^2}{ab}$ का मान ज्ञात कीजिए

45. सरल कीजिए:

$$\frac{(a^2-b^2)^3 + (b^2-c^2)^3 + (c^2-a^2)^3}{(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3}$$

46. गुणनखण्ड कीजिए:

$(2a-b-c)^3 + (2b-c-a)^3 + (2c-a-b)^3$

47. यदि बहुपद $4x^3-16x^2+ax+7$, $x-1$ से पूर्णतया विभाजित हो, तो a का मान ज्ञात कीजिए। इसका प्रयोग करते हुए, बहुपद का गुणनखंड कीजिए।

48. गुणनखंड कीजिए:

$x^2 - \frac{13}{24}x - \frac{1}{12}$

49. गुणनखंड कीजिए:

$9x^3 - 27x^2 - 100x + 300$

https://www.evidyarthi.in

50. गुणनखंड कीजिए:

$x^4 - 5x^2 + 4$

51. यदि $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -1$, जहाँ $x \neq 0,\ y \neq 0$ तो $x^3 - y^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

52. सरल कीजिए।

$$\frac{155 \times 155 + 155 \times 55 + 55 \times 55}{155 \times 155 \times 155 - 55 \times 55 \times 55}$$

https://www.evidyarthi.in

अध्याय–2
बहुपद
उत्तर

1. 5 2. –2 3. $a = 3$

4. 5 5. –12 6. $+\sqrt{8}, -\sqrt{8}$

7. शेषफल 8. $x^3 - 3x^2 + 2$ या अन्य उदाहरण

9. $2x, 2x^2 + 3, x^2 + 2x - 3$ या अन्य उदाहरण

10. हाँ 11. घात = 0 12. $k = 2$

13. $(2x - 1)^2$ 14. नहीं 15. संकेत $x = 5$

16. 991026973 17. 0, 2, –3 18. $3x + 2$

19. $\left(2x + \sqrt{3}y\right)\left(4x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2\right)$ 20. 18

21. संकेत $(100 + 6)(100 - 6)$ 22. $\frac{1}{25}$

23. $4x^2 + 9y^2 + z^2 - 12xy - 6yz + 4xz$ 24. 701

25. $(8a + 6b)^2$ 26. $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$

27. 207 28. $117a^3 - 133b^3$ 29. –34

30. $p^8 - \frac{1}{p^8}$ 31. $\left(k - \sqrt{2}\right)\left(7\sqrt{2}k + 4\right)$

32. $-8y(16y^2 + 27x^2)$ or $-128y^3 - 216x^2y$

33. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + 4 - \frac{1}{4}xy - y + 2x$ 34. $4xy + 4zx$

35. $(5x + 2y + z)(25x^2 + 4y^2 + z^2 - 10xy - 2yz - 5zx)$

36. $a = 0, b = 2$ 37. हाँ

38. $k = \frac{4}{3}, x(x - 1)\left(x^2 + x + 1\right)$

https://www.evidyarthi.in

40. (i) -210; (ii) 2, $(x+3)$, $(2x+1)$

41. (i) $\left(x+2\sqrt{5}\right), \left(x+3\sqrt{5}\right)$ (ii) $(4x+1), (6x-8)$

42. $3x^2-19x+20$

43. $(3x+2)$

44. 3

45. $(a+b)(b+c)(c+a)$

46. $3(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)$

47. $a=5$, $(x-1)(2x+1)(2x-7)$

48. $\frac{1}{24}(3x-2)(8x+1)$

49. $(3x+10)(x-3)(3x-10)$

50. $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

51. 0

52. 0.01

evidyarthi

https://www.evidyarthi.in

अभ्यास परीक्षा

बहुपद

Time : 50 Min. M.M. 20

1. क्या $(x^2)^{1/2} + \sqrt[2]{5}$ एक बहुपद है? (1)

2. दर्शाइये कि x = 1, बहुपद $3x^3 - 4x^2 + 8x - 7$ का एक शून्यक है। (1)

3. बहुपद $x^2 - 4x + 3$ के शून्यक ज्ञात कीजिए। (2)

4. यदि $x + y + z = 16$, $xy + yz + zx = 11$ है तो $x^2 + y^2 + z^2$ का मान ज्ञात कीजिए। (2)

5. यदि $3x - 4$ बहुपद $p(x) = 2x^3 - 11x^2 + kx - 20$ का एक गुणनखंड है तो k का मान ज्ञात कीजिए। (3)

6. गुणनखंड कीजिए : $a^2 + b^2 + 2(ab + bc + ca)$ (3)

7. यदि $a + b + c = 0$ है तो निम्न का मान ज्ञात कीजिए : (4)
$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}$$

8. गुणनखंड प्रमेय की सहायता से $x^3 - 23x^2 - 142x - 120$ का गुणनखंड ज्ञात कीजिए। (4)

https://www.evidyarthi.in