

## समुच्चय (Sets)

वस्तु अथवा अवयवों के सुपरिभाषित संग्रह को समुच्चय कहते हैं।

### समुच्चय का संकेतन(Notation of Sets)

समुच्चयों को मुख्यतः अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों से निरूपित किया जाता है। जैसे—  $A, B, X, Y, Z$  आदि।  
जैसे कि—  $N$  : प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय,  $Z$  : पूर्णाकों का समुच्चय,  $Z^+$  : धन पूर्णाकों का समुच्चय,  
 $Z^-$  : ऋण पूर्णाकों का समुच्चय,  $R$  : वास्तविक संख्याओं का समुच्चय

### समुच्चय के अवयव (Elements of Sets)

समुच्चय में संग्रहीत वस्तुओं को अवयव कहते हैं। इन्हें अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षरों से निरूपित किया जाता है।  
जैसे—  $a, b, x, y, z$  आदि।

### समुच्चय के निरूपण (Representation of Sets)

समुच्चय दो विधियों से निरूपित किया जाता है—

- 1— सारणीबद्ध या रोस्टर विधि: जैसे—  $A = \{1, 2, 3, \dots\}$
- 2— निर्माण या गुण विधि: जैसे—  $A = \{x : x, \text{ एक धनात्मक संख्या है} \}$

### समुच्चय के प्रकार (Types of Sets)

**रिक्त समुच्चय (Empty Set):** वह समुच्चय जिसमें कोई अवयव नहीं होता, रिक्त या शून्य समुच्चय कहलाता है। इसे ग्रीक अक्षर  $\phi$  या  $\{ \}$  से प्रदर्शित करते हैं। जैसे—  $A = \{x : x, \text{ एक धनात्मक संख्या है तथा } 3 < x < 4\}$

**एकल समुच्चय (Singleton Set):** वह समुच्चय जिसमें कोई एक अवयव होता है, एकल समुच्चय कहलाता है।  
जैसे—  $A = \{x : x, \text{ एक धनात्मक संख्या है तथा } 3 < x < 5\}$

**समान समुच्चय (Equal Sets):** दो समुच्चय जिनके प्रत्येक अवयव एक-दूसरे में विद्यमान हों, उन्हें समान समुच्चय कहते हैं। जैसे—  $A = \{x : x, \text{ एक धनात्मक संख्या है तथा } 3 < x < 6\}$ ,  $B = \{4, 5\}$  अर्थात  $A = B$

**परिमित तथा अपरिमित समुच्चय (Finite and Infinite Sets):** वह समुच्चय जिसमें अवयवों की संख्या निश्चित होती है, परिमित समुच्चय कहलाता है। जैसे—  $A = \{x : x, \text{ एक धनात्मक संख्या है तथा } 1 < x < 10\}$   
वह समुच्चय जिसमें अवयवों की संख्या अनिश्चित होती है, अपरिमित समुच्चय कहलाता है। जैसे—  $B = \{1, 2, 3, \dots\}$

**तुल्य समुच्चय (Equivalent Sets):** दो समुच्चय जिनमें अवयवों की संख्या एक समान हों, उन्हें तुल्य समुच्चय कहते हैं। जैसे—  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{3, 4, 5\}$  अर्थात  $A$  और  $B$  तुल्य समुच्चय हैं।

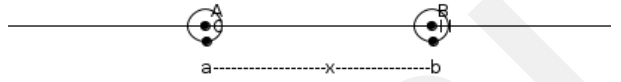
**उपसमुच्चय(Sup-Sets):** दो समुच्चय अर्थात  $A$  और  $B$  जिनमें  $A$  के सभी अवयव  $B$  के अवयव हों, परन्तु यह आवश्यक नहीं कि  $B$  के सभी अवयव  $A$  के अवयव हों, तो  $A$  को  $B$  का उपसमुच्चय कहते हैं। अर्थात  $A \subseteq B$   
अतः  $A \subseteq B$ , यदि  $a \in A \Rightarrow a \in B$  या यदि  $a \in A \Rightarrow a \in B$  तब  $A \subseteq B$

जैसे—  $A = \{3, 4, 5\}$ ,  $B = \{3, 4, 5, 6\}$  अर्थात  $A, B$  का उपसमुच्चय है।

**उचित उपसमुच्चय(Proper Subsets) :** दो समुच्चय अर्थात A और B जिनमें A के सभी अवयव B के अवयव हों, परन्तु B में कम से कम एक अवयव अधिक हों, तो A को B का उचित उप समुच्चय कहते हैं।  
जैसे-  $A=\{3,4,5\}$ ,  $B=\{3,4,5,6\}$  अर्थात A, B का उचित उप समुच्चय है।

**अन्तराल (Interval):** वास्तविक संख्याओं का समुच्चय में तीन प्रकार के अन्तराल होते हैं। यदि R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। जहाँ a तथा b अवयव R के अवयव हों, परन्तु  $a < b$  .

**विवृत अन्तराल (Open Interval):** वास्तविक संख्याओं का समुच्चय  $\{x: a < x < b\}$  विवृत या खुला अन्तराल कहलाता है, यदि अवयव x, a तथा b के मध्य के अवयव हों।  
परन्तु a तथा b इसमें न हों। इसे प्रतीक (a,b) द्वारा निरूपित किया जाता है।



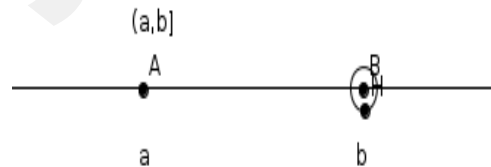
**संवृत अन्तराल(Closed Interval):** वास्तविक संख्याओं का समुच्चय  $[a, b] = \{x: a \leq x \leq b\}$  संवृत या बन्द अन्तराल कहलाता है, यदि अवयव x, a तथा b के मध्य के अवयव हों, a तथा b इसमें हों। इसे प्रतीक [a,b] द्वारा निरूपित किया जाता है।



**अर्धसंवृत अन्तराल (Semi Closed Interval):** ऐसा अन्तराल  $[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$ , जिसमें a सम्मिलित हैं परन्तु b नहीं, अर्धसंवृत अन्तराल कहलाता है। इसे प्रतीक [a,b) द्वारा निरूपित किया जाता है।



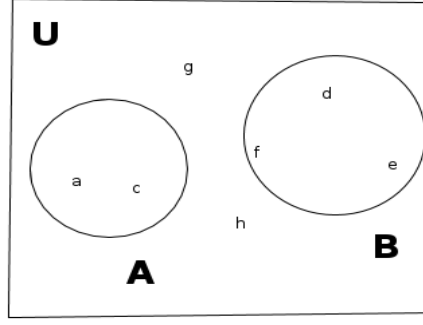
ऐसा अन्तराल  $(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$ , जिसमें b सम्मिलित हैं परन्तु a नहीं, अर्धसंवृत अन्तराल कहलाता है। इसे प्रतीक (a,b] द्वारा निरूपित किया जाता है।



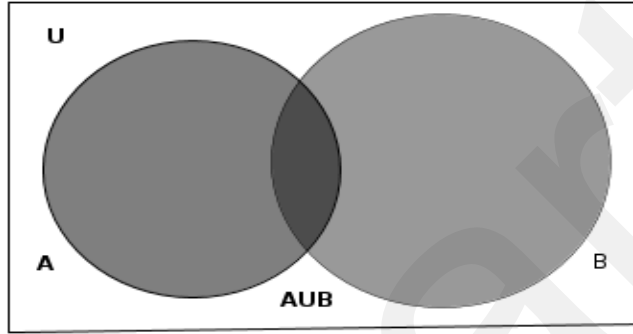
**समष्टीय या सार्वत्रिक समुच्चय (Universal Set):** उस मुख्य समुच्चय को सार्वत्रिक समुच्चय कहते हैं, जिसके अन्य सम्भावित उपसमुच्चय हों। इसे प्रायः U से निरूपित करते हैं।

**घात समुच्चय (Power Set):** किसी समुच्चय के उपसमुच्चयों के समुच्चय को घात समुच्चय कहते हैं। किसी समुच्चय A के घात समुच्चय को प्रायः  $P(A)$  से निरूपित करते हैं। घात समुच्चय के उपसमुच्चयों की कुल संख्या  $2^n$  होती है।

**समुच्चयों का वेन आरेख निरूपण (Venn Diagram of Sets):** समुच्चय  $A=\{a,b,c\}$  तथा  $B=\{d,e,f\}$  का वेन आरेख निरूपण इस प्रकार करते हैं—



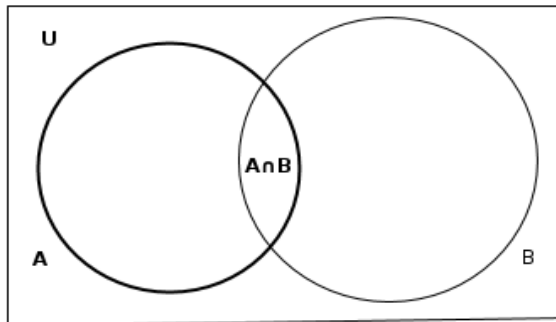
**समुच्चयों का सम्मिलन (Union of Sets):** किसी दो समुच्चयों A तथा B का सम्मिलन, वह समुच्चय है जिसके सभी अवयव या A में हैं या B में हैं या दोनों में हैं। प्रतीकात्मक रूप में,  $A \cup B = \{x: x \in A \text{ or } x \in B\}$  लिखा जा सकता है। समुच्चयों का सम्मिलन को बेन आरेख के रूप में इस प्रकार निरूपित करते हैं। छायांकित  $A \cup B$  भाग है।



**सम्मिलन की संकियाओं के गुणधर्म:** किन्हीं दो समुच्चयों A तथा B के लिए—

- 1- कम विनिमेय नियम:  $A \cup B = B \cup A$
- 2- साहचर्य नियम:  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- 3- तत्समयक नियम:  $A \cup \phi = A$
- 4- वर्गसम नियम:  $A \cup A = A$
- 5- सार्वत्रिक समुच्चय U के लिए नियम:  $A \cup U = U$

**समुच्चयों का सर्वनिष्ठ (Intersection of Sets):** किसी दो समुच्चयों A तथा B का सर्वनिष्ठ, वह समुच्चय है जिसके सभी अवयव A तथा B दोनों में हों। प्रतीकात्मक रूप में,  $A \cap B = \{x: x \in A \text{ and } x \in B\}$  लिखा जा सकता है। समुच्चयों का सर्वनिष्ठ को बेन आरेख के रूप में इस प्रकार निरूपित करते हैं। छायांकित  $A \cap B$  भाग है।

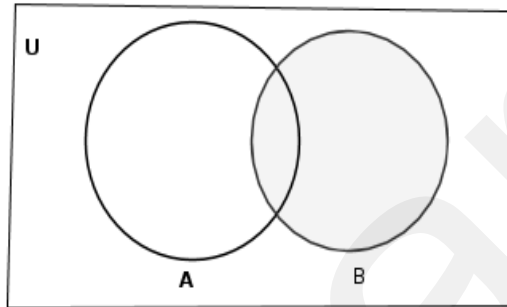


**असंयुक्त समुच्चय (Disjoint Sets):** यदि A तथा B दोनों समुच्चयों में कोई अवयव उभयनिष्ठ नहीं है तो इन्हें असंयुक्त समुच्चय कहते हैं। प्रतीकात्मक रूप में,  $A \cap B = \phi$  लिखा जा सकता है।

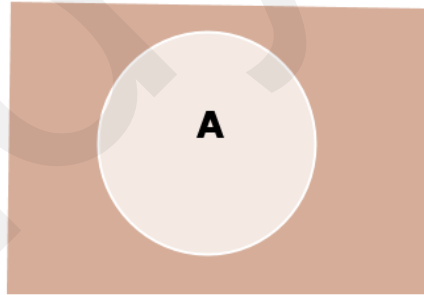
सर्वनिष्ठ की संक्रियाओं के गुणधर्म: किन्हीं दो समुच्चयों A तथा B के लिए—

- 1- कम विनिमेय नियम:  $A \cap B = B \cap A$
- 2- साहचर्य नियम:  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- 3- तत्समयक नियम:  $A \cap \phi = \phi$
- 4- वर्गसम नियम:  $A \cap A = A$
- 5- सार्वत्रिक समुच्चय U के लिए नियम:  $A \cap U = A$
- 6- वितरण नियम:  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

**समुच्चयों का अन्तर(Difference of Sets):** दो समुच्चयों A तथा B का अन्तर  $(A - B)$ , उन अवयवों का समुच्चय है जो A में है परन्तु B में नहीं है। इसे प्रतीकात्मक रूप में  $(A - B)$  से निरूपित किया जाता है।  
अर्थात्  $(A - B) = \{ x: x \in A \text{ and } x \notin B \}$  . छायांकित  $(A - B)$  भाग है।



**पूरक समुच्चय(Complement of a Set):** किसी समुच्चय A का पूरक सार्वत्रिक समुच्चय U के सापेक्ष वह समुच्चय है, जिसके अवयव U में हों लेकिन में A न हो। इसे प्रतीकात्मक रूप में  $A'$  से निरूपित किया जाता है।  
अर्थात्  $A' = \{ x: x \in U \text{ and } x \notin A \}$  . छायांकित  $A'$  भाग है।



**पूरकों के गुणधर्म (Properties of Complements):** किन्हीं दो समुच्चयों A तथा B के लिए—

1.  $A \cup A' = U$
2.  $A \cap A' = \phi$
3.  $(A')' = A$
4.  $(U)' = \phi$
5.  $(\phi)' = U$
6.  $(A \cup B)' = A' \cap B'$
7.  $(A \cap B)' = A' \cup B'$

सम्मिलन तथा सर्वनिष्ठ की संक्रियाओं के गुणधर्म: किन्ही परिमित समुच्चयों A, B तथा C के लिए—

1.  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
2.  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$  , यदि  $A \cap B = \phi$  हों।
3.  $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) + n(A \cap B \cap C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A)$
4.  $n(A') = n(U) - n(A)$
5.  $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$

**उदाहरण (Example):**

**उदाहरण 1—** समुच्चयों A, B तथा C के लिए सिद्ध किजिये कि  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

**हल:** माना  $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A$  and  $x \in (B \cup C)$   
 $\Rightarrow x \in A$  and  $x \in B$  or  $x \in C$   
 $\Rightarrow x \in A$  and  $x \in B$  or  $x \in A$  and  $x \in C$   
 $\Rightarrow x \in (A \cap B)$  or  $x \in (A \cap C)$   
 $\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$   
 $\Rightarrow A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$  -----(1)

**पुनः**  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in (A \cap B)$  or  $x \in (A \cap C)$   
 $\Rightarrow x \in A$  and  $x \in B$  or  $x \in A$  and  $x \in C$   
 $\Rightarrow x \in A$  and  $x \in B$  or  $x \in C$   
 $\Rightarrow x \in A$  and  $x \in (B \cup C)$   
 $\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$   
 $\Rightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$  -----(2)

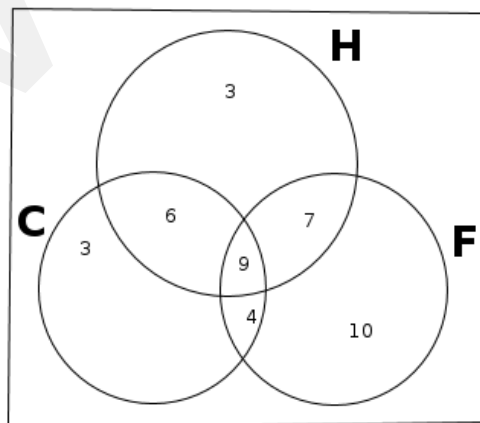
सम्बन्ध (1) तथा (2) से  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

**उदाहरण 2—** किसी विद्यालय की क्रिकेट टीम में 22, हाकी टीम में 25 तथा फुटबाल टीम में 30 लड़के हैं। अब यदि 15 लड़के हाकी और क्रिकेट, 16 लड़के हाकी और फुटबाल, 13 लड़के फुटबाल और क्रिकेट तथा 9 लड़के हाकी, फुटबाल और क्रिकेट खेलते हैं तो खेलने वाले कुल लड़कों की संख्या ज्ञात कीजिये।

**हल:** माना C, H और F क्रमशः क्रिकेट, हाकी तथा फुटबाल खेलने वाले लड़को का समुच्चय है।

दिया है  $n(C) = 22$ ,  $n(H) = 25$ ,  $n(F) = 30$ ,  $n(C \cap H \cap F) = 9$ ,

$n(C \cap H) = 15$ ,  $n(H \cap F) = 16$  तथा  $n(C \cap F) = 13$



$$\begin{aligned} \text{अब,केवल } C \text{ व } H \text{ खेलने वाले खिलाड़ियों की संख्या} &= n(C \cap H) - n(C \cap H \cap F) \\ &= 15 - 9 = 6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{केवल } H \text{ व } F \text{ खेलने वाले खिलाड़ियों की संख्या} &= n(H \cap F) - n(C \cap H \cap F) \\ &= 16 - 9 = 7, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{केवल } C \text{ व } F \text{ खेलने वाले खिलाड़ियों की संख्या} &= n(C \cap F) - n(C \cap H \cap F) \\ &= 13 - 9 = 4, \end{aligned}$$

$$\text{केवल } C \text{ खेलने वाले खिलाड़ियों की संख्या} = 22 - 6 - 9 - 4 = 3,$$

$$\text{केवल } H \text{ खेलने वाले खिलाड़ियों की संख्या} = 25 - 6 - 9 - 7 = 3$$

$$\text{तथा केवल } F \text{ खेलने वाले खिलाड़ियों की संख्या} = 30 - 7 - 9 - 4 = 10$$

$$\text{अतः खिलाड़ियों की कुल संख्या} = 3 + 6 + 3 + 9 + 7 + 10 + 4 = 42$$

**उदाहरण 3—** एक सर्वेक्षण में यह पाया गया कि 35 विद्यार्थियों के समूह में क्रमशः 20, 15 तथा 14 विद्यार्थियों गणित, भौतिक तथा रसायन शास्त्र लिये, जब कि 7 विद्यार्थियों ने गणित तथा रसायन शास्त्र लिया। 10 विद्यार्थियों ने गणित तथा भौतिक लिया तथा 6 विद्यार्थियों ने भौतिक तथा रसायन शास्त्र लिया तथा 4 विद्यार्थियों ने सभी विषय को लिया। ज्ञात किजिये जिन्होंने—

- 1— केवल गणित लिया हो।
- 2— केवल भौतिक लिया हो।
- 3— केवल रसायन शास्त्र लिया हो।
- 4— गणित तथा भौतिक परन्तु रसायन शास्त्र नहीं लिया हो।
- 5— भौतिक तथा रसायन शास्त्र परन्तु गणित नहीं लिया हो।
- 6— केवल एक विषय लिया हो।

**हल:** माना गणित, भौतिक तथा रसायन शास्त्र विषय लेने वाले विद्यार्थियों का समुच्चय क्रमशः M, P और C है। वेन आरेख में, माना a, b, c, d, e, f तथा g क्रमशः उन क्षेत्रों में विद्यार्थियों की संख्या को निरूपित करता है।

$$\text{अतः } n(M) = a + b + d + e$$

$$n(P) = b + c + e + f$$

$$n(C) = d + e + f + g$$

$$n(M \cap P) = b + e$$

$$n(M \cap C) = d + e$$

$$n(P \cap C) = e + f$$

$$n(M \cap P \cap C) = e$$

$$\text{प्रश्नानुसार } n(M \cap P \cap C) = e = 4 \text{ -----(i)}$$

$$n(M \cap P) = b + e = 10 \text{ -----(ii)}$$

$$n(M \cap C) = d + e = 7 \text{ -----(iii)}$$

$$n(P \cap C) = e + f = 6 \text{ -----(iv)}$$

$$\text{अतः } e = 4, b = 6, d = 3, f = 2$$

$$\text{प्रश्नानुसार } n(M) = a + b + d + e = 20 \quad \Rightarrow a + 6 + 3 + 4 = 20 \quad \Rightarrow a = 7$$

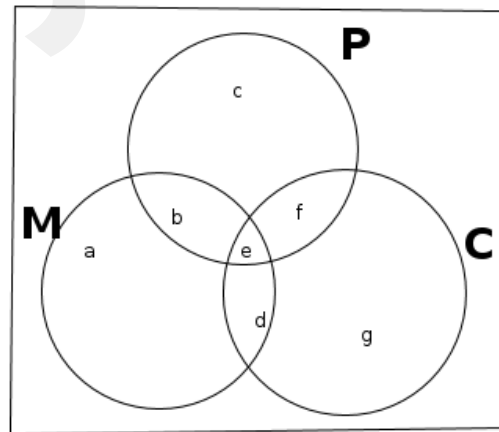
$$n(P) = b + c + e + f = 15 \quad \Rightarrow 6 + c + 4 + 2 = 15 \quad \Rightarrow c = 3$$

$$n(C) = d + e + f + g = 14 \quad \Rightarrow 3 + 4 + 2 + g = 14 \quad \Rightarrow g = 5$$

$$\text{अतः 1— केवल गणित लिया हो} = a = 7$$

$$2— \text{केवल भौतिक लिया हो} = c = 3$$

$$3— \text{केवल रसायन शास्त्र लिया हो} = g = 5$$



- 4- गणित तथा भौतिक परन्तु रसायन शास्त्र नहीं लिया हो =  $a+b+c = 16$   
 5- भौतिक तथा रसायन शास्त्र परन्तु गणित नहीं लिया हो =  $c+f+g = 10$   
 6- केवल एक विषय लिया हो =  $a+c+g = 15$

**उदाहरण 4-** यदि  $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ,  $A = \{2,4,6,8\}$  और  $B = \{2,3,5,7\}$  तो सत्यापित किजिए कि:

(i)  $(A \cup B)' = A' \cap B'$                       (ii)  $(A \cap B)' = A' \cup B'$

**हल:** दिया है:  $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ,

$A = \{2,4,6,8\}$

और  $B = \{2,3,5,7\}$

अतः (i)  $A \cup B = \{2,3,4,5,6,7,8\}$

$(A \cup B)' = U - (A \cup B) = \{1,9\}$

$A' = U - A = \{1,3,5,7,9\}$ ,

$B' = U - B = \{1,4,6,8,9\}$ ,

$A' \cap B' = \{1,9\}$  अर्थात्  $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(ii)  $A \cap B = \{2\}$

$(A \cap B)' = U - (A \cap B)$

$\Rightarrow (A \cap B)' = \{1,3,4,5,6,7,8,9\}$ ,

$A' = U - A$

$\Rightarrow A' = \{1,3,5,7,9\}$ ,

$B' = U - B$

$\Rightarrow B' = \{1,4,6,8,9\}$ ,

$A' \cup B' = \{1,3,4,5,6,7,8,9\}$  अर्थात्  $(A \cap B)' = A' \cup B'$

### प्रश्नावली

- 1-  $\{x : x \in \mathbb{R}, -4 < x \leq 6\}$  को अन्तराल रूप में लिखिये।  
 2-  $[6, 12]$  को निर्माण रूप में लिखिये।  
 3-  $A = \{2,4,6,8\}$  और  $B = \{2,3,5,7\}$  तो सत्यापित किजिए कि: (i)  $A - B$     (ii)  $B - A$   
 4- यदि  $X$  और  $Y$  दो ऐसे समुच्चय हैं कि  $X \cup Y$  में 18,  $X$  में 8 और  $Y$  में 15 अवयव हों तो  $X \cap Y$  में कितने अवयव होंगे?  
 5- यदि विद्यार्थियों के एक समूह में, 100 विद्यार्थी हिन्दी, 50 विद्यार्थी अंग्रेजी तथा 25 विद्यार्थी दोनों भाषाओं को जानते हैं। विद्यार्थियों में प्रत्येक या तो हिन्दी या अंग्रेजी जानता है। समूह में कुल कितने विद्यार्थी हैं?  
 6- एक सर्वेक्षण में पाया गया कि 21 लोग उत्पाद  $A$ , 26 लोग उत्पाद  $B$ , 29 लोग उत्पाद  $C$  पसन्द करते हैं। यदि 14 लोग उत्पाद  $A$  तथा  $B$ , 12 लोग उत्पाद  $C$  तथा  $A$ , 14 लोग उत्पाद  $B$  तथा  $C$  और 8 लोग तीनों उत्पादों को पसन्द करते हैं। ज्ञात कीजिये कि कितने लोग केवल उत्पाद  $C$  को पसन्द करते हैं?

### उत्तरमाला

- 1-  $(-4, 6]$ ,    2-  $\{x : x \in \mathbb{R}, 6 \leq x \leq 12\}$ ,    3- (i)  $\{4,6,8\}$ ,    (ii)  $\{3,5,7\}$ ,    4- 5,    5- 125,    6- 11

**आभार:** विद्यालयी शिक्षा परिषद, उत्तराखण्ड द्वारा निर्धारित पाठ्य- पुस्तकें एवं सहायक पाठ्य पुस्तकें।