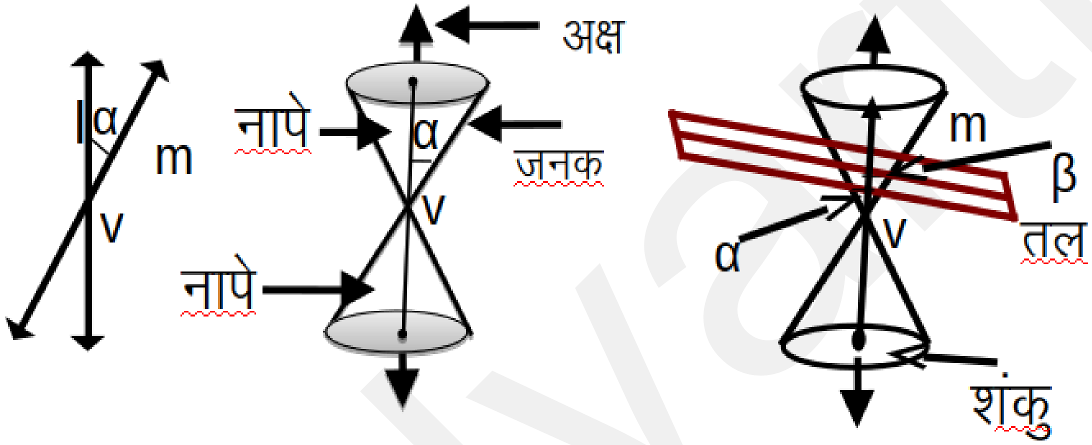
शंकु परिच्छेद (Conic Section)

एक लम्बवृत्तीय द्विशंकु और एक समतल के परिच्छेदन से प्राप्त बक्र को शंकु परिच्छेद या शांकव कहते है। लम्बवृतीय द्विशंकु और एक तल के परिच्छेदन के परिणाम स्वरूप विभिन्न प्रकार के वक्र जैसे वृत्त, परवलय, दीर्घवृत्त और अतिपरवलय प्राप्त होते हैं। परवलय और अतिपरवलय नाम अपोलोनियस (262B.C.-190B.C.) द्वारा दिये गये हैं।

माना l एक स्थिर रेखा है, m दूसरी रेखा है जो पहली रेखा को स्थिर बिन्दु v पर प्रतिच्छेद करती है और कोण α बनाती है, परिच्छेदी तल, शंकु के लम्बवत अक्ष के साथ β कोंण बनाता है। यदि रेखा m को रेखा l के परितः इस प्रकार घुमाते हैं कि सभी स्थितियों में α अचर रहे तब उत्पन्न पृष्ठ एक लम्बवृत्तीय खोखला द्विशंकु प्राप्त होता है। बिन्दु v को शंकु का शीर्ष (vertex), रेखा l शंकु का अक्ष (axis) तथा घुमने वाली रेखा m शंकु की जनक (generator) कहलाती है। शीर्ष शंकु को दो भागों में विभक्त करता है जिन्हें नापे (nappes) कहते हैं।



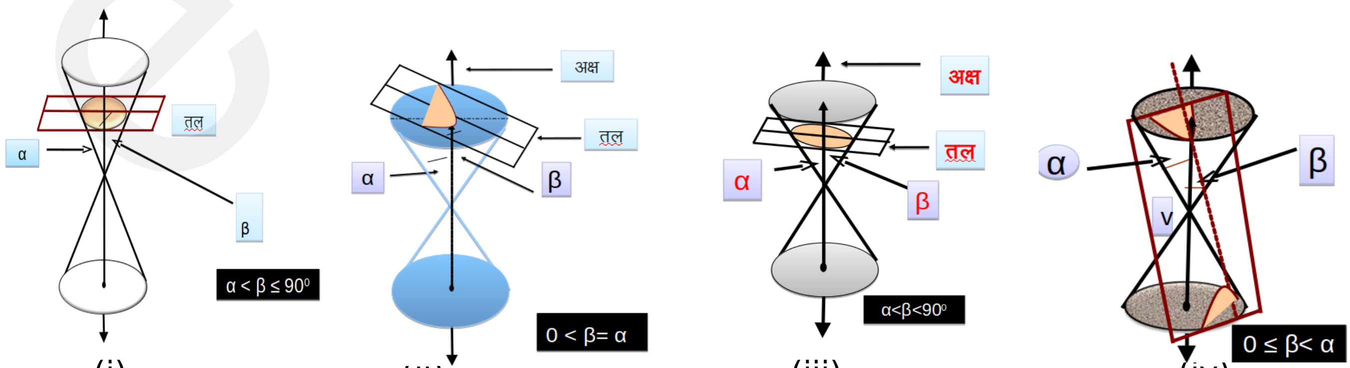
शंकु के परिच्छेद

(i) जब तल ,शंकु के नापे (शीर्ष के अतिरिक्त) को काटता है तथा परिच्छेदी तल, शंकु के लम्बवत अक्ष के साथ 90^0 का कोंण बनाता है। अर्थात $\beta = 90^0$,तो शांकव एक वृत्त होता है। परन्तु जब तल,शंकु के नापे को शीर्ष पर काटता है तथा $\alpha < \beta \le 90^0$,परिच्छेद एक बिन्दु होता है।

(ii) जब तल ,शंकु के नापे को काटता है तथा $\beta = \alpha$, तब शंकु परिच्छेद एक परवलय होता है।

(iii) जब तल ,शंकु के नापे को काटता है तथा $\alpha < \beta < 90$, तब शंकु परिच्छेद एक दीर्घवृत्त होता है।

(iv) जब तल ,शंकु के दोनों नापे को काटता है तथा $0 \le \beta < \alpha$, तब शंकु परिच्छेद एक अतिवरवलय होता है।



(i) (ii) (iii) (iv)

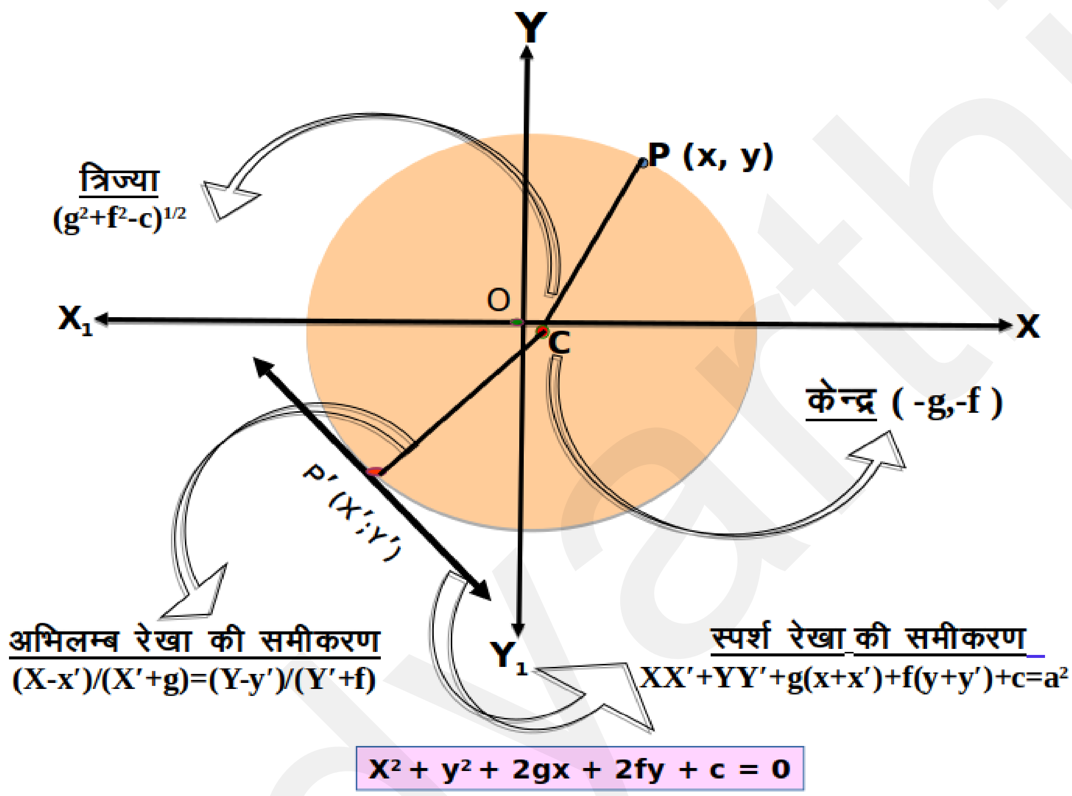
वृत्त (Cercle)

तल में स्थित उन सभी बिन्दुओं का बिन्दुपथ जिनकी स्थिर बिन्दु से दूरी सदैव समान होती है, वृत्त कहलाता है। स्थिर बिन्दु को केन्द्र तथा एक समान दूरी को वृत्त की त्रिज्या कहते है।

यदि शांकव की द्विघात समीकरण $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ में $a = b = 1$ और $h=0$ हों, तब $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ अथवा $(x^2+2gx+g^2)+(y^2+2fy+f^2)=g^2+f^2-c$

अथवा $(x+g)^2+(y+f)^2=(g^2+f^2-c)^{1/2}$ -------------------(1).

यदि सम्बन्ध (1) की तुलना वृत्त की सामान्य समीकरण $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ से करने पर ज्ञात होता है कि वृत्त का केन्द्र = $(-g, -f)$ तथा वृत्त की त्रिज्या $(r) = (g^2+f^2-c)^{1/2}$



उदाहरण (Example):

उदाहरण 1– वृत्त $x^2 + y^2 + 8x + 10y - 8 = 0$ का केन्द्र तथा त्रिज्या ज्ञात कीजिये।

हलः माना वृत्त $x^2 + y^2 + 8x + 10y - 8 = 0$ का केन्द्र (h, k) तथा त्रिज्या r है।

∵ वृत्त का समीकरण $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$ की तुलना दी समीकरण से करने पर–

$-2h = 8 \Rightarrow h = -4,$

$-2k = 10 \Rightarrow k = -5,$

$\Rightarrow$ केन्द्र = (h, k) = (-4, -5),

$h^2 + k^2 - r^2 = -8 \Rightarrow r = 7 \Rightarrow$ त्रिज्या = 7 मात्रक

उदाहरण 2– उस वृत्त की समीकरण ज्ञात कीजिये, जिसका केन्द्र (-2, 3)तथा त्रिज्या 4 इकाई है।

हलः माना वृत्त में स्थित बिन्दु (x, y) है।

अतः बिन्दु (x, y) और केन्द्र (-2, 3) के बीच की दूरी = वृत्त की त्रिज्या

$\Rightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} = 4,$

$\Rightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = 4^2$,

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 6x + 4 + 9 - 16 = 0$,

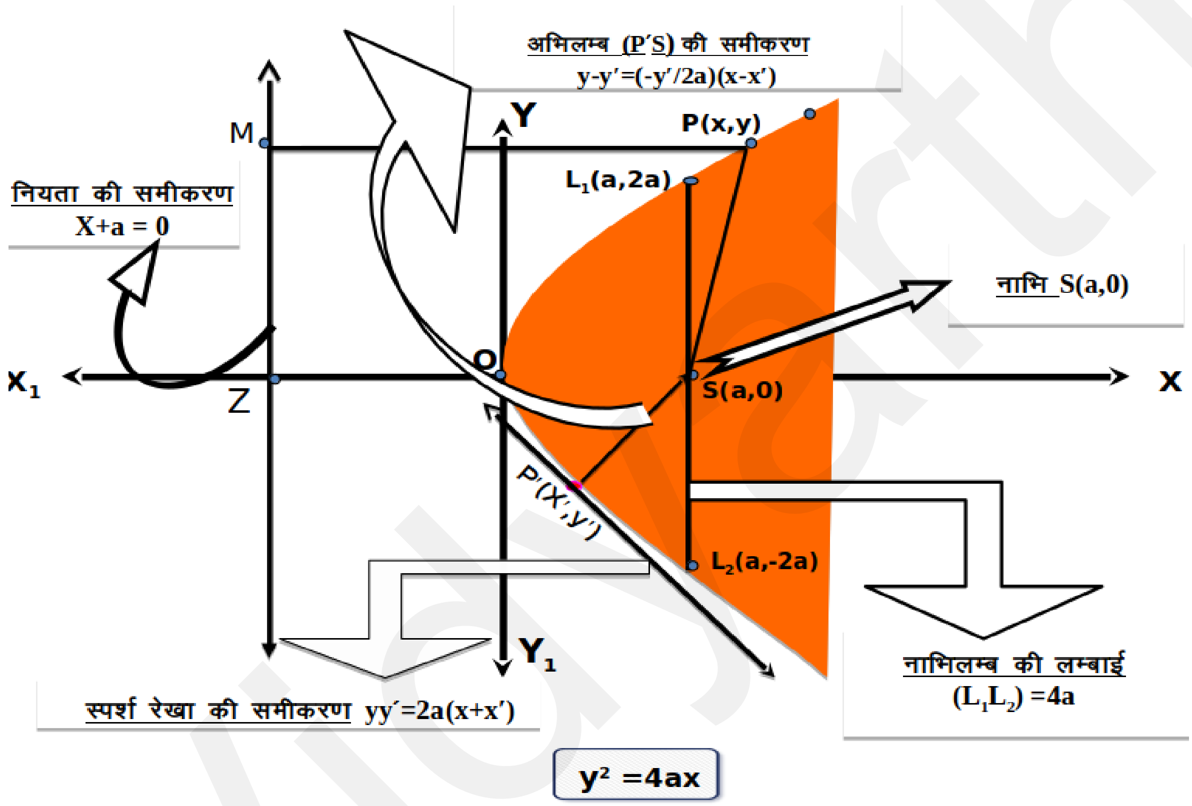
$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 6x - 3 = 0$

अतः वृत्त की समीकरण $x^2 + y^2 + 4x - 6x - 3 = 0$ है।

परवलय (Parabola)

वे सभी बिन्दुओं का बिन्दुपथ जिसकी एक नियत रेखा और जो नियत रेखा पर स्थित न हो ऐसे स्थिर बिन्दु से दूरियॉ सदैव समान रहती है, परवलय कहलाता है। अर्थात SP/PM = 1 अथवा SP= PM

नियत रेखा ZM को नियता और जो नियत रेखा पर स्थित न हो ऐसे स्थिर बिन्दु S को परवलय की नाभि कहते है।



माना परवलय में स्थित बिन्दु (x, y) है। तब परिभाषानुसार –

बिन्दु P(x, y) की नियता x + a = 0 से दूरी = बिन्दु P(x, y) की नाभि S(a, 0) से दूरी

$\Rightarrow \quad (x+a) / \sqrt{\{(1)^2 + (0)^2\}} = \sqrt{\{(x-a)^2 + (y)^2\}}$

$\Rightarrow \quad (x+a)^2 = (x-a)^2 + (y)^2 \Rightarrow x^2 + a^2 + 2ax = x^2 + a^2 - 2ax + y^2 \Rightarrow$ $\mathbf{y^2 = 4ax}$

अतः x- अक्ष के प्रति सममित परवलय की ब्यापक समीकरण $\mathbf{y^2 = 4ax}$ होती है।

जहॉ (i) नाभि **(a, 0)** (ii) नियता की समीकरण **x + a = 0**

(iii) नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई = **4a** (iv) नाभिलम्ब जीवा के सिरों के निर्देशांक **(a, ±2a)**

उदाहरण (Example):

उदाहरण 1– परवलय $y^2 = 12x$ में नाभि के निर्देशांक, अक्ष, नियता की समीकरण और नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिये।

हलः दिया है परवलय $y^2 = 12x$, जिसकी तुलना परवलय की ब्यापक समीकरण $y^2 = 4ax$ करने पर–

$4a = 12 \quad \Rightarrow \quad a = 3$

अतः (i) नाभि (3, 0)

(ii) x- अक्ष

(iii) नियता की समीकरण $x + 3 = 0$

(iv) नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई = 12

(v) नाभिलम्ब जीवा के सिरों के निर्देशांक $(3, \pm 6)$

उदाहरण 2– परवलय की समीकरण ज्ञात कीजिये, जो कि शीर्ष (0, 0), (5, 2) से जाता है और y- अक्ष के सापेक्ष सममित है।

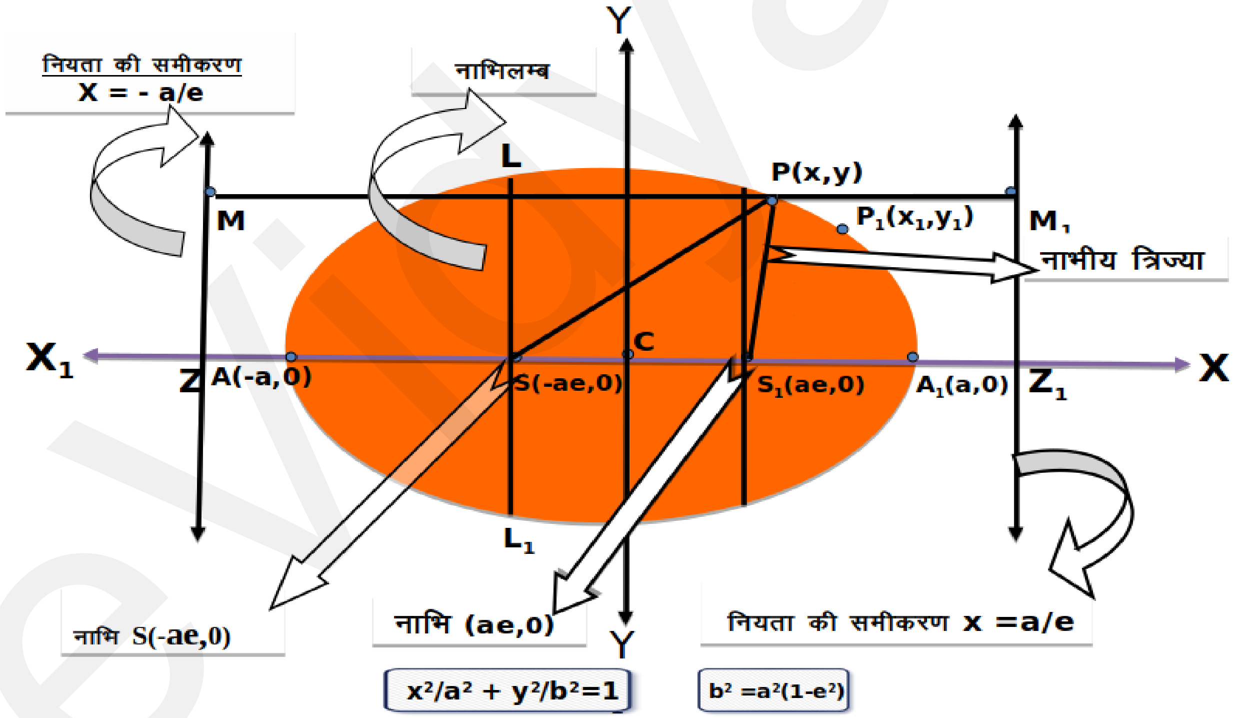
हल: माना परवलय की समीकरण $x^2 = 4ay$ है। परवलय (5, 2) से जाता है।

अतः $(5)^2 = 4a \times 2 \quad \Rightarrow \quad a = 25/8$

अतः परवलय की समीकरण $x^2 = 4 \times 25/8\, y \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = 25y$

दीर्घवृत्त (Ellipse)

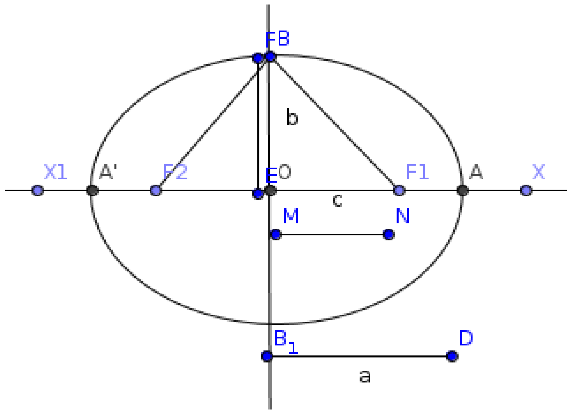
वे सभी बिन्दुओं का बिन्दुपथ जिसकी जिसकी तल में स्थित दो स्थिर बिन्दुओं से दूरियॉ का योग सदैव अचर रहता है, दीर्घवृत्त कहलाता है। अर्थात $SP + PS_1 = \text{constant}$, स्थिर बिन्दुओं S तथा S_1 को दीर्घवृत्त की नाभि कहते है।



दीर्घवृत्त की नाभियों से जाने वाले रेखाखण्ड SS_1 को **दीर्घ अक्ष** कहते है। वह रेखाखण्ड जो दीर्घ अक्ष पर लम्ब हो और केन्द्र से होकर जाता है, **लघु अक्ष** कहलाता है। दीर्घ अक्ष की लम्बाई **2a** तथा लघु अक्ष की लम्बाई **2b** है। दीर्घ अक्ष के अन्त्य बिन्दु A, A_1 को **शीर्ष** कहते है।

दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता(Eccentricity of Ellipse)

किसी दीर्घवृत्त में केन्द्र से नाभि की दूरी और केन्द्र से संगत शीर्ष की दूरी के अनुपात को **उत्केन्द्रता** e कहते है। यदि F_1F_2 का 2c मान हों, अतः $e = c / a \Rightarrow c = ae$, बिन्दु P की नाभियों से दूरियॉ का योग सदैव अचर रहता है।



अतः $AF_1 + AF_2 = (AO - OF_1) + (AO + OF_2)$

$= (a-c) + (a+c) = 2a$

तथा $BF_1 + BF_2 = \sqrt{(b^2 + c^2)} + \sqrt{(b^2 + c^2)}$

$= 2\sqrt{(b^2 + c^2)}$

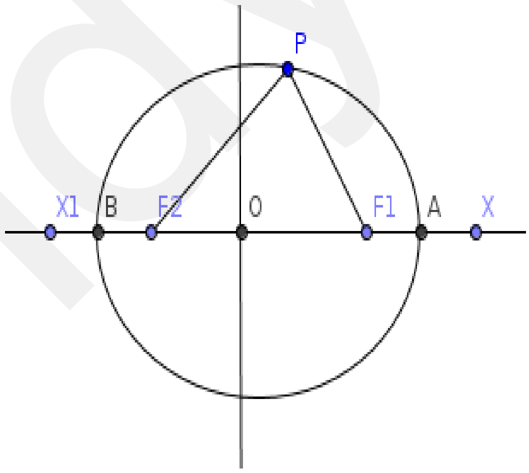
इस प्रकार $2\sqrt{(b^2 + c^2)} = 2a \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2$

$\Rightarrow e^2 = 1 - b^2 / a^2 \qquad \Rightarrow e = \sqrt{(1 - b^2 / a^2)}$

दीर्घवृत्त की मानक समीकरण (Standard Equation of Ellipse)

बिन्दु P की नाभियों से दूरियॉ का योग सदैव अचर रहता है। यदि F_1F_2 का 2c मान हों,

अब $PF_1 + PF_2 = 2a$



$\Rightarrow \sqrt{\{(x - c)^2 + (y- 0)^2\}} + \sqrt{\{(x + c)^2 + (y- 0)^2\}} = 2a$

$\Rightarrow \sqrt{\{(x + c)^2 + (y- 0)^2\}} = 2a - \sqrt{\{(x - c)^2 + (y- 0)^2\}}$

$\Rightarrow (x + c)^2 + (y- 0)^2 = [2a - \sqrt{\{(x - c)^2 + (y- 0)^2\}}]^2$

$\Rightarrow x^2 + c^2 + 2cx + y^2 = 4a^2 + (x - c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{\{(x - c)^2 + y^2\}}$

$\Rightarrow x^2 + c^2 + 2cx + y^2 = 4a^2 + x^2 + c^2 - 2cx + y^2 - 4a\sqrt{\{(x - c)^2 + y^2\}}$

$\Rightarrow 4a\sqrt{\{(x - c)^2 + y^2\}} = 4a^2 - 4cx$

$\Rightarrow a\sqrt{\{(x - c)^2 + y^2\}} = a^2 - cx$

$\Rightarrow \{ (x - c)^2 + y^2 \} = \{a - (c/a)x\}^2$

$\Rightarrow x^2 + c^2 - 2cx + y^2 = a^2 - 2cx + (c^2 / a^2) x^2$

$\Rightarrow (1 - c^2 / a^2) x^2 + y^2 = a^2 - c^2$

$\Rightarrow \{(a^2 - c^2)x^2\}/ a^2 + y^2 = a^2 - c^2$

$\Rightarrow (b^2 x^2)/ a^2 + y^2 = b^2$, जहॉ $a^2 - c^2 = b^2$

$\Rightarrow$ $\mathbf{x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1}$

अतः x- अक्ष के प्रति सममित दीर्घवृत्त की मानक समीकरण $\mathbf{x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1}$ होती है।

जहॉ (i) नाभि **($\pm$ ae , 0)**

(ii) नियता की समीकरण **x $\pm$ ae = 0**

(iii) नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई = 2 $\mathbf{b^2 / a}$

(iv) नाभिलम्ब जीवा के सिरों के निर्देशांक **(ae , $\pm b^2$ /a)**

(v) उत्केन्द्रता $\mathbf{e = \sqrt{(1 - b^2 / a^2)}}$

उदाहरण (Example):

उदाहरण 1– e का मान दीर्घवृत्त के लिए होता है.....

A : e =0

B : e =1

C : e < 1

D : e > 1

हलः C : e < 1

उदाहरण 2– दीर्घवृत्त $x^2 / 36 + y^2 / 16 = 1$ में नाभियों तथा शीर्षों के निर्देशांक, दीर्घ अक्ष, लघु अक्ष, उत्केन्द्रता तथा नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिये।

हलः दिया है दीर्घवृत्त $x^2 / 36 + y^2 / 16 = 1$,

जिसकी तुलना दीर्घवृत्त की मानक समीकरण $x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$ करने पर–

$a^2 = 36 \Rightarrow a = 6,$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4,$

$e = \sqrt{(1 - b^2 / a^2)}$

$\Rightarrow e = \sqrt{(1 - 4^2 / 6^2)} = \sqrt{5} / 3$

अतः (i) नाभि = ($\pm$ae , 0) = ($\pm 2\sqrt{5}$, 0)

(ii) शीर्षों के निर्देशांक = ($\pm$ a, 0) = ($\pm$ 6, 0)

(iii) दीर्घ अक्ष = 2a = 12

(iv) लघु अक्ष = 2b = 8

(v) नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई= $2 b^2 /a = 16 / 3$

उदाहरण 3– दीर्घवृत्त की समीकरण ज्ञीत कीजिये, यदि शीर्षों के निर्देशांक = $(\pm 5, 0)$ तथा नाभियॉ = $(\pm 4 , 0)$ है।

हल: यदि शीर्षों के निर्देशांक = $(\pm 5, 0)$ तथा नाभियॉ = $(\pm 4 , 0)$ है।

अतः दीर्घवृत्त x- अक्ष के प्रति सममित है।

$(\pm a, 0) = (\pm 5, 0)$

$\Rightarrow a = 5,$

$(\pm ae , 0) = (\pm 4 , 0)$

$\Rightarrow ae = 4$

$\Rightarrow e = 4/5,$

$e = \sqrt{(1 - b^2 / a^2)}$

$\Rightarrow 4/5 = \sqrt{(1 - b^2 / 5^2)}$

$\Rightarrow (4/5)^2 = (1 - b^2 / 25)$

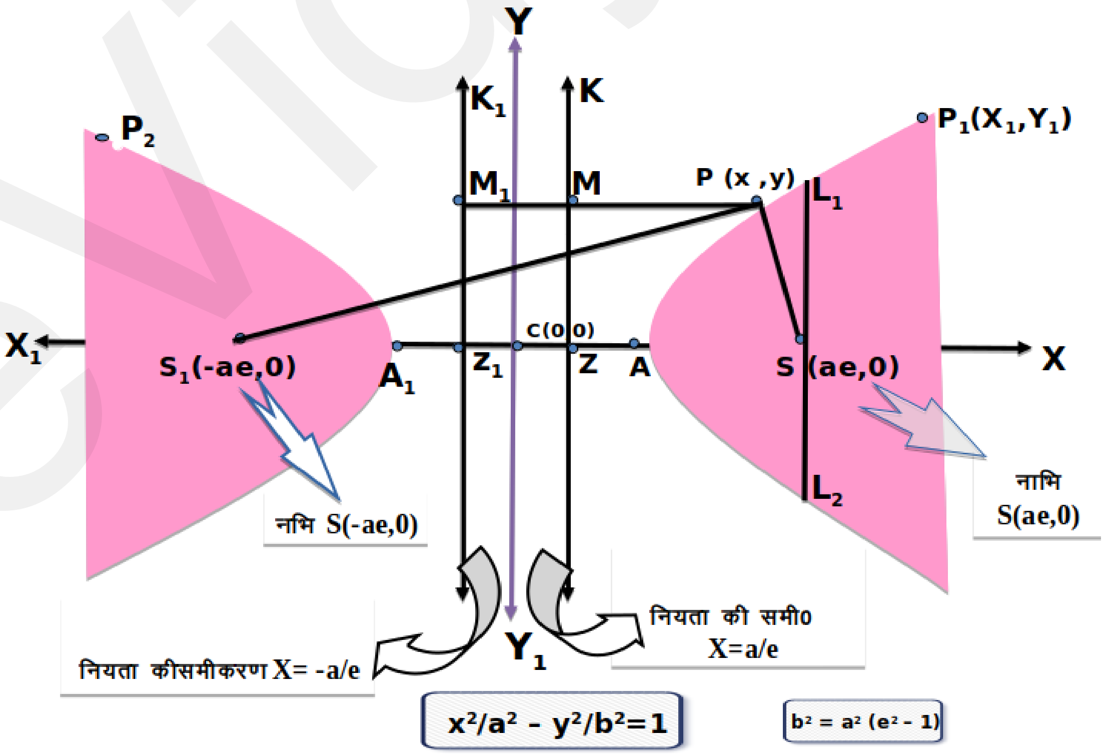
$\Rightarrow b^2 / 25 = 16 / 25$

$\Rightarrow b = 3$

अतः दीर्घवृत्त की समीकरण $x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$ अर्थात् $x^2 / 25 + y^2 / 9 = 1$ है।

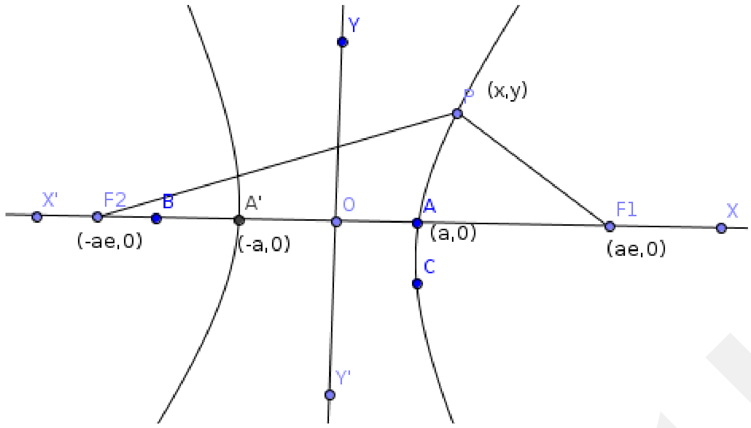
अतिपरवलय (Hyperbola)

वे सभी बिन्दुओं का बिन्दुपथ जिसकी तल में स्थित दो स्थिर बिन्दुओं से दूरियॉ का अन्तर सदैव अचर रहता है, अतिपरवलय कहलाता है। अर्थात $PS_1 - SP = \text{constant}$, स्थिर बिन्दुओं S तथा S_1 को अतिपरवलय की नाभि कहते है। अतिपरवलय की नाभियों से जाने वाले रेखाखण्ड AA_1 को **अनुप्रस्थ अक्ष** कहते है। वह रेखाखण्ड जो दीर्घ अक्ष पर लम्ब हो और केन्द्र से होकर जाता है, **संयुग्मी अक्ष** कहलाता है। अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई **2a** तथा संयुग्मी अक्ष की लम्बाई **2b** है। अनुप्रस्थ अक्ष के अन्त्य बिन्दु A, A_1 को **शीर्ष** कहते है। किसी अतिपरवलय में केन्द्र से नाभि की दूरी और केन्द्र से संगत शीर्ष की दूरी के अनुपात को **उत्केन्द्रता** e कहते है। अर्थात् $e = CS / a \Rightarrow CS = ae.$



अतिपरवलय की मानक समीकरण (Standard Equation of Hyperbola)

बिन्दु P की नाभियों से दूरियॉ का अन्तर सदैव अचर रहता है। यदि F_1F_2 का 2c मान हों,



अत: $AF_2 - AF_1 = (AO + OF_2) - (OF_1 - AO) = (a+c) - (c-a) + = 2a$

तथा $PF_2 - PF_1 = \sqrt{\{(x+ae)^2 + y^2\}} - \sqrt{\{(x-ae)^2 + y^2\}}$

अब $PF_2 - PF_1 = 2a$

इस प्रकार $\sqrt{\{(x+ae)^2 + y^2\}} - \sqrt{\{(x-ae)^2 + y^2\}} = 2a$

$\Rightarrow \sqrt{\{(x+ae)^2 + y^2\}} = 2a + \sqrt{\{(x-ae)^2 + y^2\}}$

$\Rightarrow (x+ae)^2 + y^2 = [2a + \sqrt{\{(x-ae)^2 + y^2\}}]^2$

$\Rightarrow x^2 + a^2e^2 + 2aex + y^2 = 4a^2 + (x-ae)^2 + y^2 + 4a\sqrt{\{(x-ae)^2 + y^2\}}$

$\Rightarrow x^2 + a^2e^2 + 2aex + y^2 = 4a^2 + x^2 + a^2e^2 - 2aex + y^2 + 4a\sqrt{\{(x-ae)^2 + y^2\}}$

$\Rightarrow 4a\sqrt{\{(x-ae)^2 + y^2\}} = -4a^2 + 4aex$

$\Rightarrow a\sqrt{\{(x-ae)^2 + y^2\}} = -a^2 + aex$

$\Rightarrow \{(x-ae)^2 + y^2\} = \{-a + (ae/a)x\}^2$

$\Rightarrow x^2 + a^2e^2 - 2aex + y^2 = a^2 - 2aex + (a^2e^2 / a^2)x^2$

$\Rightarrow (1 - e^2)x^2 + y^2 = a^2 - a^2e^2$

$\Rightarrow (1 - e^2)x^2 + y^2 = a^2(1 - e^2)$

$\Rightarrow x^2 - y^2/(e^2 - 1) = a^2$

$\Rightarrow x^2/a^2 - y^2/a^2(e^2 - 1) = 1$

$\Rightarrow x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, जहॉ $a^2e^2 = a^2 + b^2$

अत: x- अक्ष के प्रति सममित दीर्घवृत्त की मानक समीकरण $\mathbf{x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1}$ होती है।

जहॉ (i) नाभि **($\pm$ ae , 0)**

(ii) नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई = 2 $\mathbf{b^2}$ **/a**

(iii) नाभिलम्ब जीवा के सिरों के निर्देशांक **(ae , $\pm$ b^2 /a)**

(iv) उत्केन्द्रता **e = $\sqrt{(1 + b^2/a^2)}$**

उदाहरण (Example):

उदाहरण 1– e का मान अतिपरवलय के लिए होता है.....

A : $e = 0$

B : $e = 1$

C : $e < 1$

D : $e > 1$

हलः D : $e > 1$

उदाहरण 2– अतिपरवलय $x^2/16 - y^2/9 = 1$ में नाभियों तथा शीर्षों के निर्देशांक, उत्केन्द्रता तथा नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिये।

हलः दिया है अतिपरवलय $x^2/16 - y^2/9 = 1$,

जिसकी तुलना दीर्घवृत्त की मानक समीकरण $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ करने पर–

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4, \quad b^2 = 9 \Rightarrow b = 3,$

$e = \sqrt{(1 + b^2/a^2)}$

$\Rightarrow e = \sqrt{(1 + 3^2/4^2)} = 5/4$

अतः (i) नाभि = $(\pm ae , 0) = (\pm 5 , 0)$

(ii) शीर्षों के निर्देशांक = $(\pm a, 0) = (\pm 4, 0)$

(iii) उत्केन्द्रता = $e = 5/4$

(v) नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई= $2b^2/a = 9/2$

प्रश्नावली

1– बक परवलय निरुपित करता है,यदि–

A : $e < 1$

B : $e > 1$

C : $e = 1$

D : $e = 0$

2– वृत्त $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 36$ का केन्द्र तथा त्रिज्या ज्ञात किजिये।

3– परवलय की समीकरण ज्ञात किजिए, जिसका शीर्ष (0,0) तथा नाभि (-2,0) है।

4– उस दीर्घवृत्त की समीकरण ज्ञात किजिए, जिसका शीर्ष (± 13,0) तथा नाभियॉ (± 5,0) है।

5– उस अतिपरवलय की समीकरण ज्ञात किजिए, जिसकी नाभियॉ (0,± 12) तथा नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई 36 है।

....

उत्तरमाला

1– C : $e = 1$, **2–** (-5,3), 6 **3–** $y^2 = -8x$ **4–** $(x^2/16\,9) - (y^2/144) = 1$, **5–** $3y^2 - x^2 = 108$

आभारः **विद्यालयी शिक्षा परिषद, उत्तराखण्ड द्वारा निर्धारित पाठ्य– पुस्तकें एंव सहायक पाठ्य पुस्तकें।**