

त्रिविमीय ज्यामिति का परिचय

Introduction to three dimensional Geometry

एक समतल में स्थित किसी बिन्दु की स्थिति को गुण और कोटि दो संख्याओं की सहायता से बता सकते हैं। वह समतल जिस पर x अक्ष तथा y अक्ष स्थित होते हैं उसे कार्तीय तल या xy तल भी कहते हैं। समतल xy में किसी स्थित किसी बिन्दु को x निर्देशांक व y निर्देशांक की सहायता से बिन्दु (x, y) द्वारा व्यक्त करते हैं। बिन्दु (x, y) से केवल एक समतल पर विचार करने वाली स्थितिओं का अध्ययन किया जा सकता है। गणित की भाषा में छोड़ा हरकर सामान्य स्थितिओं का अध्ययन तो एक समतल में कर सकते हैं लेकिन हवा में उड़ रही पतंग की स्थिति निर्धारित नहीं कर सकते। गेज पर रखे टेबिल लैम्प के बल्ब की स्थिति निर्धारित नहीं कर सकते हैं। समतलीय अध्ययन के x अक्ष और y अक्ष केवल दो निर्देशाक्ष आवश्यक हैं, परन्तु गेज पर रखे टेबिल लैम्प के बल्ब की स्थिति गेज के समतल से निर्धारित नहीं है। इसकी स्थिति निर्धारित करने के लिये गेज के तल से बल्ब की ऊँचाई की गणना करना होगा। इसी प्रकार पतंग की विभिन्न स्थितिओं भी उसकी श्रृंखला से ऊँचाई पर निर्भर करती हैं। यह स्थिति एक तलीय न होकर आकाशीय होती है।

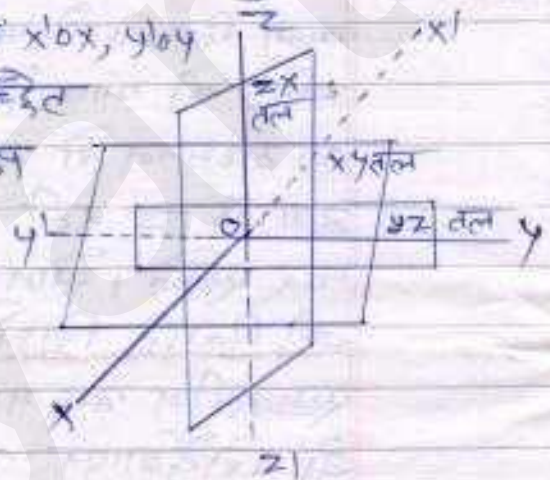
इस प्रकार आकाशीय स्थितियों का निर्धारण अशुभ नहीं होता है। इसके लिये तीसरे अक्ष की आवश्यकता होती है। अतः आकाशीय पिंडों की स्थितियों का अध्ययन त्रिविमीय होगा है। त्रिविमीय अध्ययन में तीन परस्पर लंबविक तलों से संबंधित दूरियों को निर्धारित करने के लिये तीन संख्याओं की आवश्यकता होती है, जो बिन्दु की दो परस्पर लंबव दीवियों से दूरियों

तब इस कमीरे के फर्श से ऊँचाई को 'वमर' करती है।

निर्देशांक:- परस्पर प्रतिच्छेदित करने वाले तलों से लम्ब दूरियों को वमर करने वाली तीन संख्याएँ उस बिन्दु के तीन निर्देशांक तलों के सापेक्ष निर्देशांक कहलाते हैं। ये तीन संख्याएँ x, y, z से वमर की जाती हैं और उस बिन्दु के निर्देशांक (x, y, z) होते हैं।

त्रिविमीय अन्तरिक्ष में निर्देशाक्ष और निर्देशांक तल:-
Coordinate Axes and Coordinate planes in three Dimensional Space

तीन समतल परस्पर लम्बवत् हैं जो बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। ये तीनों तल रेखाएँ xOx', yOy', zOz' पर परस्पर प्रतिच्छेद करते हैं। इन्हें x अक्ष, y अक्ष और z अक्ष कहते हैं। बिन्दु O मूल बिन्दु कहलाता है।



समकोणिक निर्देशांक निकाय:- x अक्ष, y अक्ष तथा z अक्ष परस्पर लम्बवत् होते हैं। इन्हें समकोणिक निर्देशांक निकाय कहते हैं।
System of Rectangular Coordinates

निर्देशांक तल:- तल xOy, yOz, zOx को क्रमशः xy तल, yz तल और zx तल कहलाते हैं। इन तीनों तलों को निर्देशांक तल कहते हैं।
Coordinate planes

दूरी नापना:- निर्देशांक तल में दूरियाँ मूल बिन्दु O से नापी जाती हैं।
Measurement of Distance

- 1- तल yz के सम्मुख Ox दिशा में नापी गयी दूरी धनात्मक होती है।
- 2- तल yz के सम्मुख Ox' दिशा में नापी गयी दूरी ऋणात्मक होती है।
 ये x दूरियाँ x निर्देशांक कहलाती हैं।
- 3- तल zx के वासी और Oy दिशा में नापी गयी दूरी

धनात्मक होती है,

4- तल zx के बायी ओर oy दिशा में नापी गयी दूरी ऋणात्मक होती है।

इन दूरियों का परिमाण धनिर्देशांक कहलाता है।

5- तल xy से oz दिशा में नापी गयी दूरी धनात्मक होती है,

6- तल xy से oz दिशा में नापी गयी दूरी ऋणात्मक होती है।

इन दूरियों का परिमाण z निर्देशांक कहलाता है।

अष्टांश:- तीन निर्देशांक तल अन्तरिक्ष के 8 भागों में विभक्त करते हैं। उन्हें अष्टांश कहते हैं।

Octants

$xoyz$, $x'oyz$, $x'oyz'$, $y'oxz$, $xoyz'$, $x'oyz'$, $x'oyz'$, $y'oxz'$ आठ अष्टांश कहलाते हैं।

अन्तरिक्ष में एक बिन्दु के निर्देशांक:- xyz निर्देशांक

Coordinates of a Point in Space -

निकाश का मूल

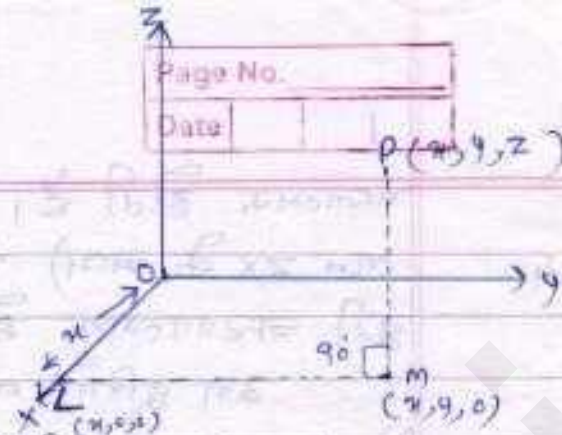
बिन्दु O है। रेखाएँ ox , oy , oz क्रमशः x अक्ष, y अक्ष व z अक्ष हैं। xoy , $oyoz$, zox परस्पर लम्बवत् तीन तल हैं, जिन्हें xy तल, yz तल, zx तल कहते हैं। तल xy , तल yz , तल zx तीन तल हैं अन्तरिक्ष में बिन्दु P है जिसके निर्देशांक (x, y, z) हैं।

बिन्दु $P(x, y, z)$ के निरूपण के लिये ox दिशा में दूरी $x = OL$ लेते हैं। L से oy के समान्तर दूरी $y = Lm$ लेते हैं। m से oz के समान्तर दूरी $z = mp$ लेते हैं। अन्तरिक्ष में बिन्दु $P(x, y, z)$ की स्थिति रेखा mp के सिरे P से व्यक्त होती है।

त्रिविमीय अक्षमण के बाद निम्न परिणाम निकलते हैं

1- मूल बिन्दु के निर्देशांक $= (0, 0, 0)$

2- x अक्ष पर स्थित बिन्दु के निर्देशांक $= (x, 0, 0)$



- 3- x अक्ष पर स्थित बिन्दु के निर्देशांक $= (x, 0, 0)$
- 4- z अक्ष पर स्थित बिन्दु के निर्देशांक $= (0, 0, z)$
- 5- तल xy में स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक $= (x, y, 0)$
- 6- तल yz में स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक $= (0, y, z)$
- 7- तल xz में स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक $= (x, 0, z)$

जहाँ x, y, z के मान धनात्मक व ऋणात्मक दोनों ही हो सकते हैं।

विभिन्न अपरंशों में स्थित बिन्दुओं के निर्देशांक :-

बिन्दु के निर्देशांक	निर्देशांकों के चिन्ह			अपरंश का नाम	अपरंश का क्रम
	x निर्देशांक	y निर्देशांक	z निर्देशांक		
$(+, +, +)$	+	+	+	$xOyZ$	I
$(-, +, +)$	-	+	+	$x'OyZ$	II
$(-, -, +)$	-	-	+	$x''OyZ$	III
$(+, -, +)$	+	-	+	$y'OxZ$	IV
$(+, +, -)$	+	+	-	$xOyZ'$	V
$(-, +, -)$	-	+	-	$x'OyZ'$	VI
$(-, -, -)$	-	-	-	$x''OyZ'$	VII
$(+, -, -)$	+	-	-	$y'OxZ'$	VIII

दो बिन्दुओं के बीच की दूरी :-

Distance between two points समकोणिक अक्ष OX, OY, OZ के समक्ष दो बिन्दु $P(x, y, z)$

तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ हैं।

बिन्दु P के कोऑर्डिनेट के सिमे Ox अक्ष पर दूरी

$OL = x$ लेका बिन्दु P से Ox के लम्बवत् दूरी $PL = y$,

ली। बिन्दु L से अक्ष OZ के समान्तर व तल xOy पर लम्ब

$LP = z$, खींचकर बिन्दु P प्राप्त किया। इसी प्रकार

बिन्दु $B(x_2, y_2, z_2)$ के कोऑर्डिनेट के लिये OX अक्ष पर दूरी $OM = x_2$ लेता बिन्दु M से OX के लम्बवत् दूरी $MN = y_2$ ली बिन्दु N से सहा OZ के समान्तर व ल XOY पर बिन्दु P प्राप्त किया।

बिन्दु L से $LS \parallel KM$ लीमी
समकोण ΔLSN में

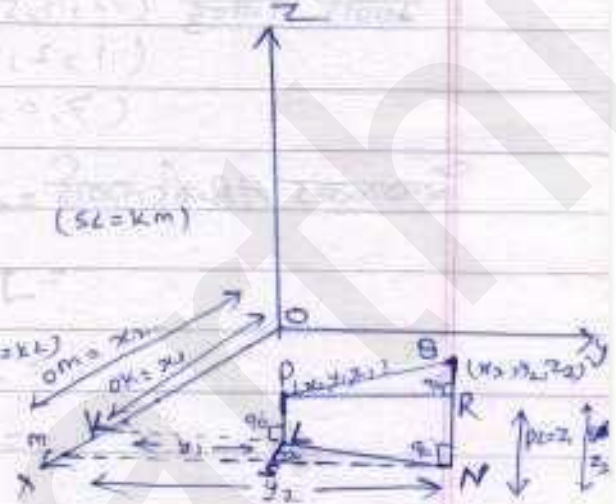
$$LN^2 = SL^2 + SN^2$$

$$= x_2^2 + (MN - MS)^2 \quad (SL = KM)$$

$$= (OM - OK)^2 + (MN - MS)^2$$

$$= (OM - OK)^2 + (MN - KL)^2 \quad (MS = KL)$$

$$LN^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$



समकोण ΔPBR में

$$PB^2 = PR^2 + BR^2$$

$$= LN^2 + (BN - RN)^2$$

$$= LN^2 + (BN - PL)^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$PB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

प्रश्न:- बिन्दु $(2, 3, 5)$ व $(4, 3, 1)$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए

हल:- दिये हुए बिन्दु $(2, 3, 5)$ और $(4, 3, 1)$

$$x_1 = 2 \quad y_1 = 3 \quad z_1 = 5$$

$$x_2 = 4 \quad y_2 = 3 \quad z_2 = 1$$

इन बिन्दुओं के बीच की दूरी

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$= \sqrt{(4 - 2)^2 + (3 - 3)^2 + (1 - 5)^2}$$

$$= \sqrt{(2)^2 + (0)^2 + (4)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 0 + 16}$$

$$= \sqrt{2 \times 2 \times 5}$$

$$= 2\sqrt{5} \text{ मालक}$$

प्रश्न:- कौनसे बिन्दु $(-2, 3, 5)$, $(1, 2, 3)$ और $(7, 0, -1)$ सौकर हैं

हल:- बिन्दु $(-2, 3, 5)$, $(1, 2, 3)$ और $(7, 0, -1)$

$$\text{माना बिन्दु } (-2, 3, 5) = A \quad x_1 = -2, y_1 = 3, z_1 = 5$$

$$(1, 2, 3) = B \quad x_2 = 1, y_2 = 2, z_2 = 3$$

$$(7, 0, -1) = C \quad x_3 = 7, y_3 = 0, z_3 = -1$$

$$\text{बिन्दुओं A और B की लम्बाई} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$= \sqrt{1 - (-2)^2 + (2-3)^2 + (3-5)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 1 + 4}$$

$$= \sqrt{14} \text{ मालक}$$

$$\text{बिन्दुओं B और C की लम्बाई} = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2}$$

$$= \sqrt{(7-1)^2 + (0-2)^2 + (-1-3)^2}$$

$$= \sqrt{(6)^2 + (-2)^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 4 + 16}$$

$$= \sqrt{56}$$

$$= \sqrt{2 \times 2 \times 14}$$

$$= 2\sqrt{14} \text{ मालक}$$

$$\text{बिन्दुओं C और A की लम्बाई} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2}$$

$$= \sqrt{[7 - (-2)]^2 + (0-3)^2 + (-1-5)^2}$$

$$= \sqrt{(7+2)^2 + (-3)^2 + (-6)^2}$$

$$= \sqrt{(9)^2 + (-3)^2 + (-6)^2}$$

$$= \sqrt{81 + 9 + 36}$$

$$= \sqrt{3 \times 3 \times 14}$$

$$= 3\sqrt{14} \text{ मालक}$$

$$\therefore AB + BC = \sqrt{14} + 2\sqrt{14}$$

$$= (1+2)\sqrt{14}$$

$$= 3\sqrt{14}$$

$$\therefore AB + BC = CA$$

अतः बिन्दु A, B, C संरेख हैं।

प्रश्न:- सातगढ़ की लिए बिन्दु $(0, 7, 10)$, $(-1, 6, 6)$ और $(-4, 9, 6)$ एक सम्मोचन त्रिभुज के शीर्ष हैं।

हल:- माना बिन्दु $(0, 7, 10) = A$ $x_1 = 0$ $y_1 = 7$ $z_1 = 10$
 $(-1, 6, 6) = B$ $x_2 = -1$ $y_2 = 6$ $z_2 = 6$
 $(-4, 9, 6) = C$ $x_3 = -4$ $y_3 = 9$ $z_3 = 6$

रेखाखंड AB की लम्बाई $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
 $= \sqrt{(-1 - 0)^2 + (6 - 7)^2 + (6 - 10)^2}$
 $= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-4)^2}$
 $= \sqrt{1 + 1 + 16}$
 $= \sqrt{18} \text{ मालक}$

रेखाखंड BC की लम्बाई $= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2}$
 $= \sqrt{(-4 - (-1))^2 + (9 - 6)^2 + (6 - 6)^2}$
 $= \sqrt{(-4 + 1)^2 + (3)^2 + 0}$
 $= \sqrt{(-3)^2 + (3)^2 + 0}$
 $= \sqrt{9 + 9}$
 $= \sqrt{18} \text{ मालक}$

$$\begin{aligned}
 \text{रेखा } AB \text{ के } A \text{ की लम्बाई} &= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2} \\
 &= \sqrt{(-4 - 0)^2 + (9 - 7)^2 + (6 - 10)^2} \\
 &= \sqrt{(-4)^2 + (2)^2 + (-4)^2} \\
 &= \sqrt{16 + 4 + 16} \\
 &= \sqrt{36}
 \end{aligned}$$

$$AB^2 + BC^2 = (\sqrt{18})^2 + (\sqrt{18})^2$$

$$= 18 + 18$$

$$= 36$$

$$CA^2 = (\sqrt{36})^2$$

$$= 36$$

$$AB^2 + BC^2 = CA^2$$

अतः बिन्दु $(0, 7, 10)$, $(-1, 6, 6)$ तथा $(-4, 9, 6)$

समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

विभाजन सूत्र और इसके अनुप्रयोग:- दो बिन्दुओं के *Section Formula and its Applications* मिलने वाली

रेखा के विभिन्न अनुपात में विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक:- माना कि अन्तरिक्ष

में परस्पर लम्बवत तल xy , yz , xz के सापेक्ष

दो बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ हैं। इन

बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा PQ को बिन्दु $R(x, y, z)$

पर $l:m:n$ के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है

बिन्दु P, R, Q से xy तल पर PL, RN , और लम्ब खींचे

जिसमें $PL \parallel RN \parallel OM$

अब PL, RN, OM के पाद x, y तल पर रेखा

LMN पर मिलते हैं। बिन्दु R से LM के समांतर

एक रेखा RA खींची जो OM से बिन्दु T पर मिलती

मिलती है। इस प्रकार P से LM के समान्तर रेखा PS खींची जो RN से बिन्दु S पर मिलती है।

$\therefore PL \parallel RN \parallel LM$ और PB तिर्यक रेखा है।

$$\angle RBT = \angle PRS \quad (\text{संगत कोण})$$

$$\angle RPS = \angle BRT \quad (\text{संगत कोण})$$

$\therefore \triangle PRS$ और $\triangle RBT$ समरूप हैं

$$\frac{PR}{RB} = \frac{RS}{BT}$$

$$= \frac{RN - SN}{BM - TM}$$

$$= \frac{RN - PL}{BM - RN}$$

$$\therefore \frac{m_1}{m_2} = \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z}$$

$$m_1 z_2 - m_1 z = m_2 z - m_2 z_1$$

$$-m_1 z - m_2 z = -m_1 z_2 - m_2 z_1$$

$$\therefore m_1 z + m_2 z = m_1 z_2 + m_2 z_1$$

$$(m_1 + m_2) z = m_1 z_2 + m_2 z_1$$

$$z = \frac{m_1 z_2 + m_2 z_1}{m_1 + m_2}$$

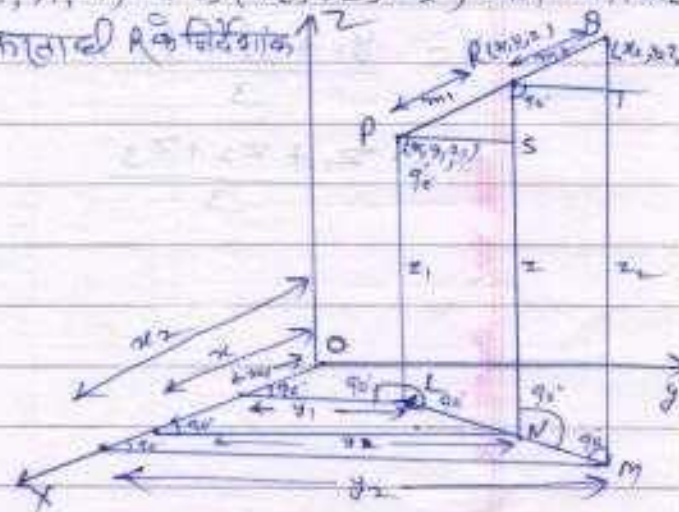
$$\text{इसी } x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$$

ii) बिन्दु R जो $P(x_1, y_1, z_1)$ व $B(x_2, y_2, z_2)$ को m_1 : m_2 में कटतः विभाजित करता है R के निर्देशांक

$$x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$$

$$y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$$

$$z = \frac{m_1 z_2 + m_2 z_1}{m_1 + m_2}$$



2-

यदि बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाली रेखा के बिन्दु $R(x, y, z)$, $m_1 : m_2$ के अनुपात में बाह्यतः विभाजित करता है तो R के निर्देशांक

$$x = \frac{m_1 x_2 - m_2 x_1}{m_1 - m_2}$$

$$y = \frac{m_1 y_2 - m_2 y_1}{m_1 - m_2}$$

$$z = \frac{m_1 z_2 - m_2 z_1}{m_1 - m_2}$$

3-

यदि दो बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाली रेखा PQ का मध्य बिन्दु R के निर्देशांक

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

4-

यदि ΔPQR के शीर्षों के निर्देशांक $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ व $R(x_3, y_3, z_3)$ हैं तो त्रिभुज के गुणक केन्द्र के निर्देशांक

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

$$z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

प्रश्न 1:- बिन्दु $P(-1, 2, 3)$ व $Q(3, 4, -5)$ को मिलाने वाली रेखा को बिन्दु R 2:3 के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है तो बिन्दु R के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल:- बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ में $x_1 = -1, y_1 = 2, z_1 = 3$
 बिन्दु $Q(x_2, y_2, z_2)$ में $x_2 = 3, y_2 = 4, z_2 = -5$

$$m_1 : m_2 = 2 : 3$$

बिन्दु R के निर्देशांक

$$x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{2 \times 3 + 3 \times (-1)}{2 + 3}$$

$$= \frac{6 + 3}{5}$$

$$= \frac{9}{5}$$

$$y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{2 \times 4 + 3 \times 2}{2 + 3}$$

$$= \frac{8 + 6}{5}$$

$$= \frac{14}{5}$$

$$z = \frac{m_1 z_2 + m_2 z_1}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{2 \times (-5) + 3 \times 3}{2 + 3}$$

$$= \frac{-10 + 9}{5}$$

$$= -\frac{1}{5}$$

बिन्दु R के निर्देशांक $= \left(\frac{9}{5}, \frac{14}{5}, -\frac{1}{5} \right)$ **उत्तर**

प्र० 2:- बिन्दु $P(-2, 3, 5)$ और $Q(1, -4, 6)$ को 2:3 में बाह्यतः विभाजित करने वाले बिन्दु R के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल:- बिन्दु $P(-2, 3, 5)$ में $x_1 = -2, y_1 = 3, z_1 = 5$
 बिन्दु $Q(1, -4, 6)$ में $x_2 = 1, y_2 = -4, z_2 = 6$

$m_1 : m_2 = 2 : 3$
 बिन्दु R के निर्देशांक

$$x = \frac{m_1 x_2 - m_2 x_1}{m_1 - m_2}$$

$$= \frac{2 \times 1 - 3 \times (-2)}{2 - 3}$$

$$= \frac{2 + 6}{-1}$$

$$= \frac{8}{-1}$$

$$= -8$$

$$\therefore x = -8$$

$$y = \frac{m_1 y_2 - m_2 y_1}{m_1 - m_2}$$

$$= \frac{2 \times (-4) - 3 \times (3)}{2 - 3}$$

$$= \frac{-8 - 9}{-1}$$

$$= \frac{-17}{-1}$$

$$= 17$$

$$\therefore y = 17$$

$$z = \frac{m_1 z_2 - m_2 z_1}{m_1 - m_2}$$

$$= \frac{2 \times 6 - 3 \times 5}{2 - 3}$$

$$= \frac{12 - 15}{-1}$$

$$= \frac{-3}{-1}$$

$$= 3$$

बिन्दु R के निर्देशांक $= (-8, 17, 3)$

अथ

प्र० 3- विशालन खल का प्रयोग करके दिखाइए कि बिन्दु $A(2, -3, 4)$ और $B(-1, 2, 1)$ तथा $C(0, \frac{1}{3}, 1)$ संरेख हैं।

हल:- माना रेखाखंड AB को बिन्दु $P(x, y, z)$, $K:1$ में विभाजित करता है।

बिन्दु $A(2, -3, 4)$ में $x_1 = 2, y_1 = -3, z_1 = 4$

बिन्दु $B(-1, 2, 1)$ में $x_2 = -1, y_2 = 2, z_2 = 1$

बिन्दु P के निर्देशांक

$$m_1 : m_2 = K : 1$$

$$m_1 = K$$

$$m_2 = 1$$

$$x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{K(-1) + 1 \times 2}{K+1}$$

$$\therefore x = \frac{-K+2}{K+1}$$

$$y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{K \times 2 + 1 \times (-3)}{K+1}$$

$$\therefore y = \frac{2K-3}{K+1}$$

$$z = \frac{m_1 z_2 + m_2 z_1}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{K \times 1 + 1 \times 4}{K+1}$$

$$\therefore z = \frac{K+4}{K+1}$$

चूंकि P व C बिन्दु संरेखी हैं,

$$\therefore \left(\frac{-K+2}{K+1}, \frac{2K-3}{K+1}, \frac{K+4}{K+1} \right) = \left(0, \frac{1}{3}, 1 \right)$$

$$\therefore \frac{-K+2}{K+1} = 0$$

$$-K+2 = 0 \times (K+1)$$

$$-K+2 = 0$$

$$-K = -2$$

$$K = 2$$

$$\therefore \text{अनुपात} = K:1 = 2:1$$

महत्वपूर्ण प्रश्न

Page No.

Date

- 1- क्या बिन्दु $A(3, 6, 9)$, $B(10, 20, 30)$ और $C(25, 45, 55)$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।
- 2- सिद्ध कीजिए बिन्दु $P(1, 2, 3)$, $Q(-1, -2, -1)$, $R(2, 3, 2)$ और $S(4, 7, 6)$ एक समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष हैं।
- 3- बिन्दु P से कौन समान्तर का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $A(3, 4, -5)$ और $B(-2, 1, 4)$ से समान दूरी पर है।
- 4- सिद्ध कीजिए बिन्दु $(0, 7, -10)$, $(1, 6, -6)$ और $(4, 9, -6)$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।
- 5- बिन्दु $(-2, 4, 2)$ और $(3, -5, 8)$ को मिलाने वाला रेखाखंड yz तल द्वारा किस अनुपात में विभाजित होता है।
- 6- त्रिभुज ABC के शीर्षों के निर्देशांक $A(0, 0, 6)$, $B(0, 4, 0)$ तथा $C(6, 0, 0)$ हैं तो माध्यिकाओं की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
- 7- y अक्ष पर स्थित उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिसकी बिन्दु $(3, -2, 5)$ से दूरी 5 है।

$$(x, y, z) = \left(\frac{0+3}{1+1}, \frac{0-2}{1+1}, \frac{6+5}{1+1} \right)$$

$$x = 1.5$$

$$y = -1$$

$$(1.5, -1, 5.5)$$

$$x = 1.5$$

$$y = -1$$

$$z = 5.5$$