[Class- XI , Subject- Mathematics, Chapter-14]

==================================

गणितीय विवेचन
[MATHEMATICAL REASONING]

==

कथन (Statements) गणित की भाषा में एक वाक्य को कथन कहा जाता है, यदि वह या तो सत्य हो अथवा असत्य हो परन्तु सत्य-असत्य दोनों न हो।

किसी कथन का निषेधन (Negation of a Statement) किसी कथन को नकारना (deny) उस कथन का **निषेधन** (Negation) कहलाता है।

मिश्र कथन (संयुक्त कथन) (Compound Statements)

वह गणितीय कथन जो 'और' (तथा), या ('अथवा') आदि प्रकार के संयोजक (connective) शब्दों द्वारा एक से अधिक कथनों को जोड़कर प्राप्त होता है, उसे मिश्र कथन कहते हैं तथा प्रत्येक कथन को इसका घटक कथन कहते हैं।

विशेष शब्द/वाक्यांश (Special Words/Phrases)

संयोजक शब्द 'और' (The Connective Word 'And') संयोजक 'और' के प्रयोग से बने मिश्र कथन सत्य या असत्य होंगे, यदि—

(i) मिश्र कथन के सभी घटक कथन सत्य हों तो मिश्र कथन भी सत्य होगा।

(ii) मिश्र कथन के सभी घटक कथन असत्य हों या कम-से-कम एक घटक असत्य हो तो मिश्र कथन भी असत्य होता है।

शब्द 'या' से प्रयुक्त वाक्य (Sentences with the Word 'Or') संयोजक (Connective) 'या' के प्रयोग से बना मिश्र कथन सत्य या असत्य होगा, यदि—

(i) इसका एक घटक कथन सत्य हो अथवा दोनों घटक कथन सत्य हों, तब मिश्र कथन सत्य होता है।

(ii) इसके दोनों घटक कथन असत्य हों तब मिश्र कथन भी असत्य होता है।

अपवर्जित 'या' और अन्तर्विष्ट 'या' (Exclusive 'OR' and Inclusive 'OR') संयोजक 'या' प्रयुक्त मिश्र कथन सत्य या असत्य होगा, यदि—

(1) अन्तर्विष्ट 'या' प्रयुक्त मिश्र कथन सत्य होता है, जब उसका कोई एक घटक कथन सत्य हो या उसके दोनों घटक कथन सत्य हों।

(2) अन्तर्विष्ट 'या' प्रयुक्त मिश्र कथन असत्य होता है, जब उसके दोनों घटक कथन असत्य होते हैं।

परिमाणवाचक वाक्यांश (सूक्ति) (Quantifiers Phrases) उन वाक्यांशों को परिमाणवाचक वाक्यांश कहा जाता है, जिसमें "एक ऐसे का अस्तित्व है" और "सभी के लिए/प्रत्येक के लिए" प्रयुक्त होता है।

अन्तर्भाव या सप्रतिबन्ध कथन (Implications or Conditional Statements)

वे कथन जिसमें 'यदि तो', 'केवल यदि' और 'यदि और केवल यदि' प्रयुक्त होते हैं जो कि अन्तर्भाव या सप्रतिबन्ध कारक हैं, उन्हें अन्तर्भाव या सप्रतिबन्ध कथन कहते हैं।

विलोम कथन (Converse Statements) 'यदि p तो q' के लिए कथन 'यदि q तो p' '**विलोम कथन**' कहलाता है।

किसी कथन की वैधता के परीक्षण के नियम (Rules for Verification of the Validity of Statements)

किसी कथन की वैधता के परीक्षण के निम्नलिखित नियम हैं—

नियम 1. यदि p तथा q गणितीय कथन हैं, तो यह सिद्ध करने के लिए कि कथन "p और q" सत्य हैं, हमें यह सिद्ध करना होगा कि

(i) कथन p सत्य है।

(ii) कथन q सत्य है।

नियम 2. यदि कथन p और q गणितीय कथन हैं तो यह प्रमाणित करने के लिए कि कथन 'p या q' सत्य है, हमें यह सिद्ध करना होगा कि

(i) जब p असत्य है तो q अनिवार्यतः सत्य है।

(ii) जब q असत्य है तो p अनिवार्यतः सत्य है।

नियम 3. यदि कथन p और q गणितीय कथन हैं तो प्रमाणित करने के लिए कि कथन 'यदि p तो q' सत्य है, हमें यह सिद्ध करना होगा कि—

(i) जब p सत्य है तो q अनिवार्यतः सत्य है। (प्रत्यक्ष विधि)

(ii) जब q असत्य है तो p अनिवार्यतः असत्य है। (प्रतिधनात्मक विधि)

नियम 4. यदि कथन p और q गणितीय कथन हैं तो यह प्रमाणित करने के लिए कि कथन 'p, यदि और केवल यदि' सत्य है तो हमें सिद्ध करना चाहिए कि

(i) यदि p सत्य है तो q सत्य है और

(ii) यदि q सत्य है तो p सत्य है।

विरोधोक्ति द्वारा (By Contradiction)

इस विधि में दिए गए कथन के सापेक्ष एक ऐसा विरोधी उदाहरण प्रस्तुत किया जाता है तथा यह सिद्ध किया जाता है कि प्रदत्त कथन असत्य है। यह विधि प्रायः दिए गए कथन को असत्य सिद्ध करने हेतु अपनाई जाती है।

उदाहरण 1 "किसी कक्षा के अच्छे छात्रों का समूह।"

यह स्पष्ट रूप से नहीं कहा जा सकता है कि कोई छात्र अच्छा है या नहीं। छात्र x कुछ लोगों की राय में अच्छा हो सकता है परन्तु कुछ लोगों की राय में अच्छा नहीं हो सकता है। ऐसी स्थिति में यह निश्चित नहीं कहा जा सकता है कि छात्र x अच्छे छात्रों में से एक है। अतः यह **कथन नहीं** है।

2 क्या निम्नलिखित कथन युग्म (कथन के जोड़े) एक-दूसरे के निषेधन हैं ?

(i) संख्या x एक परिमेय संख्या नहीं है। संख्या x एक अपरिमेय संख्या नहीं है।

(ii) संख्या x एक परिमेय संख्या है। संख्या x एक अपरिमेय संख्या है।

हल : (i) पहला कथन p : संख्या x एक परिमेय संख्या नहीं है।

इसका निषेधन q : संख्या x एक परिमेय संख्या है।

या संख्या x एक अपरिमेय संख्या नहीं है।

दूसरा कथन r : संख्या x एक अपरिमेय संख्या नहीं है।

अतः **दोनों कथन एक-दूसरे के निषेधन हैं।**

(ii) पहला कथन p : संख्या x एक परिमेय संख्या है।

इसका निषेधन q : संख्या x एक परिमेय संख्या नहीं है

अर्थात् संख्या x एक अपरिमेय संख्या है।

दूसरा कथन r : संख्या x एक अपरिमेय संख्या है।

अतः **दोनों कथन एक-दूसरे के निषेधन हैं।**

3 निम्नलिखित मिश्र कथन के घटक कथन ज्ञात कीजिए—
(i) आज विद्यालय खुलेगा और हम विद्यालय जायेंगे।
(ii) मुझे बाजार जाना है और पुस्तकें खरीदनी हैं।
(iii) 2, प्राकृत संख्या है और 2, अभाज्य संख्या है।
(iv) धूप तेज है और गर्मी है।

हल : (i) यह मिश्र कथन है, घटक कथन इस प्रकार हैं—

p : आज विद्यालय खुलेगा।

q : हम विद्यालय जायेंगे।

यहाँ संयोजक शब्द 'और' है।

(ii) यह मिश्र कथन है, घटक कथन इस प्रकार हैं—

p : मुझे बाजार जाना है।

q : पुस्तकें खरीदनी हैं।

यहाँ संयोजक शब्द 'और' है।

(iii) यह मिश्र कथन है, घटक कथन इस प्रकार हैं—

p : 2, प्राकृत संख्या है।

q : 2, अभाज्य संख्या है।

यहाँ संयोजक शब्द 'और' है।

(iv) यह मिश्र कथन है, घटक कथन इस प्रकार हैं—

p : धूप तेज है।

q : गर्मी है।

यही संयोजक शब्द 'और' है।

4 "$\sin\theta$ का मान सदैव शून्य से अधिक होता है।"

हम जानते हैं कि किसी कोण θ के लिए $\sin\theta$ का मान धनात्मक तथा ऋणात्मक दोनों होता है। अतः उपर्युक्त तथ्य सत्य भी है और असत्य भी। अतः यह **कथन नहीं** है।

5 जाँचिए कि क्या नीचे लिखे कथनों के जोड़े (युग्म) एक-दूसरे के निषेधन हैं। अपने उत्तर के कारण भी बतलाइए—

(i) प्रत्येक वास्तविक संख्याओं x और y के लिए $x + y = y + x$ सत्य है।

(ii) ऐसी वास्तविक संख्याओं x और y का अस्तित्व है जिनके लिए $x + y = y + x$ सत्य है।

हल : पहला कथन p : प्रत्येक वास्तविक संख्याओं x और y के लिए $x + y = y + x$ सत्य है।

अतः कथन $p \equiv$ सभी वास्तविक संख्याओं x और y के लिए $x + y = y + x$ सत्य है।

कथन p का निषेधन : सभी वास्तविक संख्याओं x और y के लिए $x + y = y + x$ सत्य नहीं है।

दूसरा कथन q : ऐसी वास्तविक संख्याओं का अस्तित्व है जिनके लिए $x + y = y + x$ सत्य है।

चूँकि q वही कथन है जो कथन p है,

अतः $p \equiv q$

कोई कथन स्वयं का निषेधन नहीं हो सकता, अतः कथनों का युग्म एक-दूसरे का निषेधन नहीं है।