①

कक्षा - 11
विषय - गणित
पाठ - सांख्यिकी

* आँकड़ों का प्रबन्धन - *आपके रोजमर्रा के जीवन में आपके पास कई तरह की सूचनाऐं आती हैं। जैसे: किसी टेस्ट मैच में बल्लेबाजों द्वारा बनाए गए रन, किसी क्षेत्र विशेष में साक्षर लोगों की संख्या, आपकी कक्षा में गणित की मासिक परीक्षा में छात्रों के अंकों का विवरण आदि। इस प्रकार की सूचनाऐं संख्यात्मक रुप में आँकड़े कहलाती हैं जो एक निश्चित उद्देश्य के लिए एकत्र की जाती हैं।

* आँकड़ों का उपयोग हम विभिन्न तरीकों से करते हैं।
जैसे:
1. सारणी बनाकर (आलेख द्वारा)
2. चित्रालेख द्वारा
3. दण्डालेख द्वारा
4. आयत चित्र द्वारा
5. बहुभुज द्वारा
6. पाई वृत्त द्वारा।

इन विधियों द्वारा आँकड़ों को दर्शाना आँकड़ों का प्रबन्धन कहलाता है।

* इस प्रकार अर्थपूर्ण व उपयोगी सूचनाऐं एकत्र करना और उनका प्रबन्धन करना गणित की एक शाखा के अन्तर्गत आता है जिसे सांख्यिकी कहते हैं।

* केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप - विचार कीजिए कि क्या दिये गये सभी आँकड़ों का अध्ययन जरुरी है या केवल कुछ प्रतिनिधि लेकर इनके महत्वपूर्ण अभिलक्षणों का पता लगाया जा सकता है, इसका उत्तर है: हाँ, ऐसा केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापों से किया जा सकता है, जिन्हें माध्य, माध्यक और बहुलक कहा जाता है,

केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप हमें यह बताते हैं कि आँकड़े किस स्थान पर केन्द्रित हैं।

* प्रकीर्णन की माप - किसी भी सूचना में आँकड़े परिवर्तनशील हो सकते हैं, आँकड़ों में परिवर्तनशीलता के लिए एक एकल संख्या ली जाती है जिसे प्रकीर्णन की माप कहते हैं।

प्रकीर्णन की माप के लिए निम्न मापों को समझना जरुरी है।

② 1. परिसर - परिसर किन्हीं भी आकडों की सूचना में अधिकतम व न्यूनतम माप का अन्तर है,
अत: एक श्रेखला का परिसर = अधिकतम मान - न्यूनतम मान

2. विचलन - किसी प्रेक्षण $x$ का स्थिर मान $a$ से अन्तर $(x-a)$, प्रेक्षण $x$ का $a$ से विचलन कहलाता है।
अत: एक श्रेखला का विचलन = दिया गया प्रेक्षण - स्थिर प्रेक्षण

3. माध्य विचलन - किसी स्थिर संख्या '$a$' से विचलनों के निरपेक्ष (धनात्मक) मानों का माध्य ही माध्य विचलन कहलाता है,

$$\text{माध्य विचलन} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}| \text{ , जहाँ } \bar{x} = \text{माध्य}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - M| \text{ , जहाँ } M = \text{माध्यिका}$$

* अवर्गीकृत और वर्गीकृत आँकडो के लिए माध्य विचलन ज्ञात करना।

*अवर्गीकृत →

Ex1. निम्न आँकडो के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए,

6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12

हल: 1. आँकडो का माध्य ज्ञात करो,

$$\bar{x} = \frac{6+7+10+12+13+4+8+12}{8} = 9$$

2. अत: आँकडो का स्थिर मान $a = 9$
स्थिर मान $a = 9$ से आँकडो का अन्तर ज्ञात करो,
$= 6-9,\ 7-9,\ 10-9,\ 12-9,\ 13-9,\ 4-9,\ 8-9,\ 12-9$
$= -3, -2, 1, 3, 4, -5, -1, 3$ ⇒ यह दी गयी श्रेखला का विचलन है। इनके निरपेक्ष (धनात्मक) मान लीजिए,

3. अत: माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|$

$$= \frac{3+2+1+3+4+5+1+3}{8}$$

$$= 2.75$$

उदा2- निम्न आँकडो के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए,

3, 9, 5, 3, 12, 10, 18, 4, 7, 19, 21

हल:- 1. आँकडो की माध्यिका ज्ञात कीजिए,
आरोही क्रम में लिखने पर
3, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 18, 19, 21, $n = 11$
अत: माध्यिका $= \left(\frac{11+1}{2}\right)$वाँ प्रेक्षण = 6वाँ प्रेक्षण = 9

अतः आँकड़ों का स्थिर मान $a = 9$.

2. स्थिर मान $a = 9$ से दिये गये प्रेक्षणों का अन्तर ज्ञात कीजिए,

$= 3-9,\ 3-9,\ 4-9,\ 5-9,\ 7-9,\ 9-9,\ 10-9,\ 12-9,\ 18-9,\ 19-9,\ 21-9,$

$= -6, -6, -5, -4, -2, 0, 1, 3, 9, 10, 12$ ⇒ यह श्रृंखला / आँकड़ों का विचलन है,

अतः इनके निरपेक्ष मान : 6, 6, 5, 4, 2, 0, 1, 3, 9, 10, 12

3. अतः माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|$

$$= \frac{6+6+5+4+2+0+1+3+9+10+12}{11}$$

$$= 5.27$$

* वर्गीकृत -

उदा.3- निम्न सारणी के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए,

| $x_i$ | 2 | 5 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 2 | 8 | 10 | 7 | 8 | 5 |

हल-

| $x_i$ | $f_i$ | $f_i x_i$ | $\|x_i - \bar{x}\|$ | $f \times \|x_i - \bar{x}\|$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 4 | 5.5 | 11 |
| 5 | 8 | 40 | 2.5 | 20 |
| 6 | 10 | 60 | 1.5 | 15 |
| 8 | 7 | 56 | 0.5 | 3.5 |
| 10 | 8 | 80 | 2.5 | 20 |
| 12 | 5 | 60 | 4.5 | 22.5 |
| | $\sum f_i = 40$ | $\sum f_i x_i = 300$ | | 92 |

माध्य $= \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{300}{40} = 7.5$

अतः स्थिर मान $a = 7.5$ जिसके लिए सारणी में $|x_i - \bar{x}|$ ज्ञात किया गया है,

अतः माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन $= \frac{1}{N}\sum f_i |x_i - \bar{x}|$

$$= \frac{1}{40} \times 92$$

$$= 2.3$$

उदा.4- निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए,

| $x_i$ | 3 | 6 | 9 | 12 | 13 | 15 | 21 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 3 | 4 | 5 | 2 | 4 | 5 | 4 | 3 |

हल :-

| $x_i$ | $f_i$ | c.f. | $\lvert x_i - \bar{x} \rvert$ | $f_i \times \lvert x_i - \bar{x} \rvert$ |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 3 | 10 | 30 |
| 6 | 4 | 7 | 7 | 28 |
| 9 | 5 | 12 | 4 | 20 |
| 12 | 2 | 14 | 1 | 2 |
| 13 | 4 | 18 | 0 | 0 |
| 15 | 5 | 23 | 2 | 10 |
| 21 | 4 | 27 | 8 | 32 |
| 22 | 3 | 30 | 9 | 27 |
| | $\Sigma f_i = 30$ | | | 149 |

$\Sigma f_i = 30$ (सम)

अत: माध्यिका = $\dfrac{\frac{30}{2} \text{ वाँ प्रेक्षण} + \left(\frac{30}{2}+1\right) \text{ वाँ प्रेक्षण}}{2}$

$\bar{x} = \dfrac{15 \text{ वाँ प्रेक्षण} + 16 \text{ वाँ प्रेक्षण}}{2} = \dfrac{13+13}{2} = 13$

अत: माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन $= \dfrac{1}{N} f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$

$= \dfrac{1}{30} \times 149 = 4.97$

उदा.5. निम्न सारणी के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

| वर्ग अन्तराल | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 | 50-60 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| बारम्बारता | 12 | 18 | 27 | 20 | 17 | 6 |

हल :-

| वर्ग अंतराल | $x_i$ | $f_i$ | $f_i x_i$ | $\lvert x - x_i \rvert$ | $f_i . \lvert x_i - \bar{x} \rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0-10 | 5 | 12 | | | |
| 10-20 | 15 | 18 | | | |
| 20-30 | 25 | 27 | | | |
| 30-40 | 35 | 20 | | | |
| 40-50 | 45 | 17 | | | |
| 50-60 | 55 | 6 | | | |

इस प्रश्न को उदा. 3 की तरह हल कीजिए। इस प्रश्न में हमने वर्ग अन्तराल की सहायता से $x_i$ ज्ञात किये हैं।

* प्रसरण - किन्हीं दिये गये आँकडों में माध्य से विचलनों के वर्गों का माध्य, प्रसरण कहलाता है, इसे $\sigma^2$ से प्रदर्शित किया जाता है।

अत: $\sigma^2 = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ अथवा f देने पर $\sigma^2 = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i - \bar{x})^2$

उदा.6 : निम्न आँकडों के लिए प्रसरण ज्ञात कीजिए।

| $x_i$ | 4 | 8 | 11 | 17 | 20 | 24 | 32 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 3 | 5 | 9 | 5 | 4 | 3 | 1 |

हल:

| $x_i$ | $f_i$ | $f_i x_i$ | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - x)^2$ | $f(x_i - \bar{x})^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 12 | −10 | 100 | 300 |
| 8 | 5 | 40 | −6 | 36 | 180 |
| 11 | 9 | 99 | −3 | 9 | 81 |
| 17 | 5 | 85 | −3 | 9 | 45 |
| 20 | 4 | 80 | 6 | 36 | 144 |
| 24 | 3 | 72 | 10 | 100 | 300 |
| 32 | 1 | 32 | 18 | 324 | 324 |
| | 30 | | | | 1374 |

अतः प्रसरण $\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{7} f_i |x_i - \bar{x}|^2$

$= \frac{1}{30} \times 1374 = 45.8$

* मानक विचलन - प्रसरण का धनात्मक वर्गमूल मानक विचलन कहलाता है,

अतः मानक विचलन $= \sqrt{\sigma^2}$

उदा.7.: उदा.(7) उपरोक्त उदाहरण में मानक विचलन ज्ञात कीजिए,

हल:- उदा.(7) में हमने प्रसरण का मान ज्ञात किया जो 45.8 है,

अतः मानक विचलन $= \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{45.8} = 6.77$

* विचरण गुणांक - किसी इकाई (मात्रक) से स्वतंत्र विचरण की माप को विचरण गुणांक कहते हैं।

विचरण गुणांक $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$, जहाँ $\bar{x} \neq 0$

दो श्रृंखलाओं में विचरण की तुलना के लिए हम प्रत्येक श्रृंखला का विचरण गुणांक ज्ञात करते हैं, दोनों में से बड़े विचरण गुणांक वाली श्रृंखला को अधिक विचरण या बिखराव वाली श्रृंखला कहते हैं,

उदा. 8): कक्षा 11 के एक सेक्शन में छात्रों की ऊँचाई तथा भार के लिए निम्न परिकलन दिये गये हैं।

| | ऊँचाई | भार |
|---|---|---|
| माध्य | 162.6 सेमी | 52.36 किग्रा |
| प्रसरण | 127.69 सेमी$^2$ | 23.1361 किग्रा$^2$ |

क्या हम कह सकते हैं कि भारों में ऊँचाई की तुलना में अधिक विचरण है ?

हल:- ऊँचाइयों में प्रसरण = 127.69 सेमी.$^2$

अतः ऊँचाइयों का मानक विचलन = $\sqrt{127.69}$ = 11.3 सेमी

भारों में प्रसरण = 23.1361 किग्रा$^2$

अतः भारों का मानक विचलन = $\sqrt{23.1361}$ = 4.81 किग्रा.

ऊँचाइयों का विचरण गुणांक = $\frac{\text{मानक विचलन}}{\text{माध्य}} \times 100$

$= \frac{11.3}{162.6} \times 100 = 6.95$

भारों का विचरण गुणांक = $\frac{4.81}{52.36} \times 100 = 9.18$

चूँकि भारों का विचरण गुणांक, ऊँचाईयों के विचरण गुणांक से बड़ा है, अतः हम कह सकते हैं कि भारों में ऊँचाइयों की अपेक्षा अधिक विचरण है,

***

## प्रश्नावली

प्रश्न1)- निम्न आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए,

| $x_i$ | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 7 | 4 | 6 | 3 | 5 |

प्रश्न2)- निम्न आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए,

| $x_i$ | 5 | 7 | 9 | 10 | 12 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | 8 | 6 | 2 | 2 | 2 | 6 |

प्रश्न3)- निम्न सारणी के लिए माध्य, प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात कीजिए,

| वर्ग | 30-40 | 40-50 | 50-60 | 60-70 | 70-80 | 8-90 | 90-100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f | 3 | 7 | 12 | 15 | 8 | 3 | 2 |

प्रश्न4)- दो वेतनों का विचरण गुणांक 60 और 70 है, उनके मानक विचलन क्रमशः 21 और 16 हैं, उनके माध्य क्या हैं?

***