# सम्बन्ध एवं फलन
# [RELATIONS AND FUNCTIONS]

**परिभाषा**—दो वस्तुओं के ऐसे जोड़े को जिन्हें एक क्रम में प्रकट किया जाता है उसे क्रमित युग्म (Ordered pair) कहते हैं।

उदाहरण के लिए, यदि A तथा B कोई दो समुच्चय हों तो क्रमित युग्म $(a, b)$ से तात्पर्य यह है कि $a \in A$ तथा $b \in B$.

## क्रमित युग्मों की समानता (Equality of Two Ordered Pairs)

दो क्रमित युग्म $(a, b)$ तथा $(c, d)$ समान होंगे यदि उनके संगत घटक समान हों। अर्थात् $(a, b) = (c, d)$, यदि और केवल यदि $a = c$, $b = d$.

## समुच्चयों का कार्तीय गुणन (Cartesian Product of Sets)

**परिभाषा**—किन्हीं दो अरिक्त समुच्चयों A तथा B का कार्तीय गुणन $A \times B$ उन सभी क्रमित युग्मों का समुच्चय है, जिनके प्रथम घटक समुच्चय A का अवयव तथा द्वितीय घटक समुच्चय B के अवयव होते हैं। रोस्टर रूप में लिखने पर,

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ और } b \in B\}$$

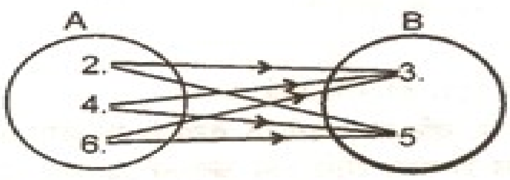
## दो समुच्चयों के कार्तीय गुणन में अवयवों की संख्या (Number of Elements in the Cartesian Product of Two Sets)

यदि A तथा B दो परिमित समुच्चय हों तो उनके कार्तीय गुणन $A \times B$ में अवयवों की संख्या समुच्चयों A तथा B में अवयवों की संख्या के गुणनफल के बराबर होती है अर्थात्

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B)$$

## कार्तीय गुणनफल का आरेखीय निरूपण (Digrammatic Representation of Cartesian Product)

समुच्चयों A तथा B के कार्तीय गुणनफल को आरेखीय निरूपण करने के लिए समुच्चयों A तथा B को वेन-आरेख (Venn-diagrams) द्वारा प्रदर्शित करते हैं। तत्पश्चात् A के प्रत्येक अवयव को B के प्रत्येक अवयव के निर्दिष्ट रेखा-खण्ड (directed line segment) द्वारा निरूपित करते हैं। जैसा कि निम्न चित्र में दिखाया गया है—




यहाँ $A \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 5\}$, तब

$$A \times B = \{(2, 3), (2, 5), (4, 3), (4, 5), (6, 3), (6, 5)\}$$

# संबंध

**परिभाषा**—किन्हीं दो अरिक्त समुच्चयों A तथा B में सम्बन्ध R, इन दो समुच्चयों के कार्तीय गुणन $A \times B$ का एक उपसमुच्चय होता है अर्थात् $R \subseteq A \times B$

यह उपसमुच्चय R, कार्तीय गुणन $A \times B$ के क्रमित युग्मों के प्रथम तथा द्वितीय घटकों के बीच सम्बन्ध स्थापित करने पर प्राप्त होता है। द्वितीय घटक प्रथम घटक का प्रतिबिम्ब कहलाता है।

## सम्बन्धों की कुल संख्या (Total Number of Relations)

माना A तथा B कोई दो अरिक्त परिमित समुच्चय है जिनमें क्रमशः $m$ तथा $n$ अवयव हैं। अतः $A \times B$ में $mn$ अवयव होंगे जो कि क्रमित युग्म है। इस प्रकार $A \times B$ के कुल उपसमुच्चयों की संख्या $2^{mn}$ होगी। चूँकि $A \times B$ का प्रत्येक उपसमुच्चय A से B में एक सम्बन्ध प्रदर्शित करता है, अतः A से B में सम्बन्धों की कुल संख्या $2^{mn}$ होगी।

## सम्बन्ध का निरूपण (Representation of a Set)

**(i) सूचीबद्ध या तालिका विधि (Roster Form)**

$$x R y \Leftrightarrow x^3 = y$$

तब 1R1, 2R8 तथा 3R27, तब सम्बन्ध R को सूचीबद्ध या तालिका विधि द्वारा निम्न प्रकार लिख सकते हैं—

$$R = \{(1, 1)\ (2, 8)\ (3, 27)\}$$

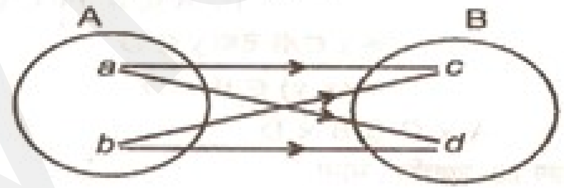
**(ii) समुच्चय निर्माण विधि (Set-Builder Form)**

इस विधि में समुच्चय A से समुच्चय B में सम्बन्ध R को निम्न प्रकार निरूपित किया जाता है—

$R = \{(x, y) : x \in A$ और $y \in B$ तथा $x, y$ उस नियम को सन्तुष्ट करते हैं जो कि $x$ तथा $y$ को सम्बन्धित करते हैं $\}$।

**(iii) तीर आरेख द्वारा (By Arrow Diagram)**

A से B में सम्बन्ध $R = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$ को तीर आरेख द्वारा निम्न प्रकार प्रदर्शित करते हैं, जहाँ $A = \{a, b\}, B = \{c, d\}$




## सम्बन्ध का प्रान्त तथा परिसर (Domain and Range of a Relation)

### सम्बन्ध का प्रान्त (Domain of Relation)

समुच्चय A से समुच्चय B में R एक सम्बन्ध है अर्थात् $R \subseteq A \times B$, तब R का प्रान्त R के क्रमित युग्मों के सभी प्रथम अवयवों (first elements of the ordered pairs) का समुच्चय सम्बन्ध R का प्रान्त या Dom (R) कहलाता है।

अतः $\text{Dom}(R) = \{x : x \in A$ और $(x, y) \in R\}$

### सम्बन्ध का परिसर (Range of a Relation)

R के क्रमित युग्मों के सभी द्वितीय अवयवों (second elements of the ordered pairs) का समुच्चय सम्बन्ध R का परिसर (Range) कहलाता है अर्थात्

$$R = \{y : y \in B \text{ तथा } (x, y) \in R\}$$

### सम्बन्ध का प्रतिलोम (Inverse of a Relation)

A तथा B कोई दो अरिक्त समुच्चय हों तथा A से B में सम्बन्ध R हो तो सम्बन्ध R का प्रतिलोम समुच्चय B से समुच्चय A में होता है। इसे $R^{-1}$ से निरूपित करते हैं।

यदि $\quad R = \{(x, y) : x \in A \text{ और } y \in B\}$

तब $\quad R^{-1} = \{(y, x) : y \in B \text{ और } x \in A\}$

अर्थात् $\quad R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$

# फलन
## (FUNCTIONS)

**परिभाषा (Definition) 1.** *यदि A तथा B कोई दो अरिक्त समुच्चय हों तब A से B का सम्बन्ध f एक फलन कहलाता है, यदि*

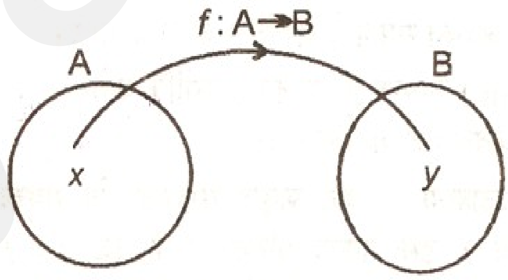
(i) A के प्रत्येक अवयव के लिए B का एक अद्वितीय अवयव हो अर्थात् प्रत्येक $a \in A$ के लिए $b \in B$ का अस्तित्व है ताकि $(a, b) \in f$

(ii) यदि $(a, b) \in f$ तथा $(a, c) \in f \Rightarrow a = c$

Let A and B be any two non-empty sets then a relation $f$ from A to B called a function, if

(i) for every element of A there exists an unique element in B, *i.e.*, $\forall a \in A$ then $\exists$ exists $b \in B$ such that $(a, b) \in f$.

(ii) if $(a, b) \in f$ and $(a, c) \in f \Rightarrow a = c$.




$f : A \to B$

$f(x) = y$

अतः A × B का एक उपसमुच्चय $f$, समुच्चय A से B में एक फलन कहलाता है यदि $f$ में किसी दो क्रमित युग्मों के प्रथम अवयव समान न हों।

यदि $f$, A से B में एक फलन है तथा $(a, b) \in f$ तो $f(a) = b$, जहाँ $b$ को $f$ के अन्तर्गत $a$ का प्रतिबिम्ब ($f$-image) तथा $a$ को $b$ का पूर्व प्रतिबिम्ब (Pre-image) कहते हैं।

A से B के फलन $f$ को प्रतीकात्मक रूप में $f : A \to B$ से निरूपित करते हैं।

### फलन का प्रान्त, सहप्रान्त तथा परिसर (Domain, Co-domain and Range of a Function)

यदि A तथा B कोई दो अरिक्त समुच्चय हों तथा $f$ समुच्चय A से समुच्चय B में एक फलन हो अर्थात् $f : A \to B$ तो समुच्चय A को फलन $f$ का प्रान्त (domain), समुच्चय B को फलन $f$ का सहप्रान्त (Co-domain) कहा जाता है।

समुच्चय B के उन अवयवों का समुच्चय जो A के अवयवों के प्रतिबिम्ब हैं, $f$ का परिसर (Range) कहलाता है। इसे $f(A)$ से निरूपित करते हैं।

**समान फलन (Equal Functions)** यदि $f$ तथा $g$ दो फलन हो तो वे दोनों समान होंगे। यदि और केवल यदि—

(i) $f$ का प्रान्त $=$ $g$ का प्रान्त

(ii) $f$ का सहप्रान्त $=$ $g$ का सहप्रान्त

तथा (iii) उसके उभयनिष्ठ प्रान्त के प्रत्येक अवयव के लिए $f(x) = g(x)$ (अर्थात् $f$ का मान $=$ $g$ का मान)

दो समान फलनों $f$ तथा $g$ को $f = g$ लिखा जाता है।

## कुछ विशेष फलन तथा उनके आलेख (Some Special Functions and their Graphs)

**तत्समक फलन (Identity Function)** यदि R, वास्तविक संख्याओं का समुच्चय हो तथा फलन $f$, R पर इस प्रकार परिभाषित हो कि प्रत्येक $x \in R, f : R \to R, y = f(x) = x$ अर्थात् प्रत्येक अवयव अपना स्वयं का प्रतिबिम्ब है, ऐसे फलन को तत्समक (Identity Function) कहते हैं।

यहाँ पर $f$ के प्रान्त तथा परिसर R हैं।

**मापांक फलन (Modulus Function)**

$f : R \to R$, फलन इस प्रकार है कि प्रत्येक $x \in R$ के लिए $f(x) = |x|$ तो फलन $f$, मापांक फलन कहलाता है। यहाँ पर अगर $x$ का मान ऋणेतर हो तो $f(x)$ का मान $x$ होता है तथा $x$ का मान अगर ऋणात्मक हो तो $f(x)$ का मान $-x$ होता है। हम इसे निम्न रूप में लिख सकते हैं—

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

**चिह्न फलन (Signum Function)**

$f : R \to R$, इस प्रकार परिभाषित है कि प्रत्येक $x \in R$ के लिए

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{यदि } x > 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \\ -1, & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$$

इस फलन का प्रान्त वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R है तथा परिसर $\{-1, 0, 1\}$ है।

**महत्तम पूर्णांक फलन (Greatest Integer Function or Floor function)** यदि $f : R \to R$, इस प्रकार परिभाषित है कि प्रत्येक $x \in R, f(x) = [x]$, जहाँ $[x]$ या तो $x$ के बराबर महत्तम पूर्णांक है, अथवा $x$ से कम पूर्णांक है तो इसे **महत्तम पूर्णांक फलन** कहते हैं।

**न्यूनतम पूर्णांक फलन (Least Integer Function)** $f : R \to R$ इस प्रकार परिभाषित है कि प्रत्येक वास्तविक संख्या $x$ के लिए $f(x) = [x]$ को न्यूनतम पूर्णांक फलन कहते हैं।

$$f(x) = [x]$$

$$\Rightarrow \quad [x] \geq x$$

अर्थात् $[x]$ या तो $x$ के बराबर अथवा उससे बड़ा पूर्णांक है।

उदाहरण के लिए, यदि $x = 3 \cdot 2$, तब

$$[x] = [3 \cdot 2] = 4$$

क्योंकि $3 \cdot 2$ के बाद संख्या रेखा पर न्यूनतम पूर्णांक 4 है।

**चरघातांकी फलन (Exponential Function)-** यदि $f: R \to R$ इस प्रकार परिभाषित है कि $f(x) = a^x$ जहाँ $a > 0$ तथा $a \neq 1$, तो $f$ को चरघातांकी फलन कहा जाता है।

**लघुगणक फलन (Logarithmic Function)**

**यदि $f: R^+ \to R$ इस प्रकार परिभाषित हो कि $f(x) = \log_a x$, जहाँ $a > 0, a \neq 1$ तथा $x > 0$ तो फलन $f$ के लघुगणक फलन कहते हैं।**

**लघुगणक फलन तथा चरघातांकी फलन एक-दूसरे व्युत्क्रम होते हैं।**

**यदि** $$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$$

**लघुगणक फलन के गुण (Properties of Logarithmic Function)–** (i) किसी भी धनात्मक आधार पर 1 का लघुगणक शून्य होता है अर्थात्

$$\log_a^1 = 0 \text{ जहाँ } a > 0, a \neq 0$$

(ii) किसी भी धनात्मक संख्या का लघुगणक उसी आधार पर 1 होता है।

$$\log_a^a = \log_b^b = \log_c^c = 1;$$

(iii) किसी भी दो धनात्मक संख्याओं के गुणनफल का लघुगणक उन संख्याओं के लघुगणकों के योग के बराबर होता है अर्थात्

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

जहाँ $a > 0, a \neq 1$, तथा $xy > 0$ $(x > 0, y > 0)$

(iv) किन्हीं दो संख्याओं के भागफल का लघुगणक उन संख्याओं के लघुगणकों के अन्तर के बराबर होता है अर्थात्

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

जहाँ $a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0, \frac{x}{y} > 0.$

(v) किसी वास्तविक संख्या को किसी घात (धनात्मक) का लघुगणक उस घात तथा उस संख्या के लघुगणक के गुणनफल के बराबर होता है, अर्थात्

$$\log_a (x^n) = n \log_a x$$

जहाँ $n > 1, a > 0, a \neq 1, x > 0, x^n > 0$

(vi) यदि दो संख्याएँ $a$ तथा $x$ इस प्रकार हों कि $a > 0, a \neq 1$ तथा $x > 0, x \neq 1$ तो

$$\log_a^x \times \log_x^a = 1$$

**टिप्पणी** : $f(x) = \log_a x$ तथा $g(x) = a^x$ एक-दूसरे के व्युत्क्रम हैं।

**व्युत्क्रम फलन या प्रतिलोम (Reciprocal Function)** फलन $f: R - \{0\} \to R$ जो इस प्रकार परिभाषित है कि $f(x) = \frac{1}{x}$, व्युत्क्रम फलन कहलाता है।

स्पष्टतः $x \in R - \{0\}$ अर्थात् व्युत्क्रम फलन का प्रान्त $R - \{0\}$ तथा परिसर R है।

## वास्तविक फलनों का बीजगणित (Algebra of Real Functions)

**(i) वास्तविक फलनों का योग (Addition of Real Functions)**—यदि $f: X \to R$ तथा $g: X \to R$ दो समान प्रान्त वाले वास्तविक फलन हों जहाँ $X \subset R$, तब इनका योग $(f + g): X \to R$ वह फलन है जो प्रत्येक $x \in X$ के लिए इस प्रकार है कि

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

**(ii) वास्तविक फलनों का अन्तर (Difference or subtraction of Real Functions)**—यदि $f: X \to R$ तथा $g: X \to R$ दो समान प्रान्त वाले वास्तविक फलन हों, जहाँ $X \subset R$, तब इनका अन्तर $(f - g): X \to R$ वह फलन है जो प्रत्येक $x \in X$ के लिए इस प्रकार है कि

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

**(iii) वास्तविक फलनों का गुणन (Product of Real Functions)**—यदि $f: X \to R$ तथा $g: X \to R$ दो समान प्रान्त वाले वास्तविक फलन हों, जहाँ $X \subset R$, तब इनका गुणन $(fg): X \to R$ वह फलन है जो प्रत्येक $x \in X$ के लिए इस प्रकार है कि

$$(fg)(x) = f(x) \,.\, g(x)$$

**(iv) वास्तविक फलनों का भागफल (Quotient of Real Functions)**—यदि $f: X \to R$ तथा $g: X \to R$ दो समान प्रान्त वाले फलन हों जहाँ $X \subset R$, तब इनका भागफल $\left(\frac{f}{g}\right): X \to R$ वह फलन है जो प्रत्येक $x \in X$ के लिए इस प्रकार है कि $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $\quad g(x) \neq 0$

**(v) एक वास्तविक फलन का एक अचर (अदिश राशि) से गुणा (Multiplication of a Real Function by a Scalar)**—यदि $f: X \to R$ एक वास्तविक फलन है तथा $\alpha$ एक अचर (या अदिश राशि) हो तथा वास्तविक संख्या हो तब गुणनफल $(\alpha f): X \to R$ एक फलन है जो इस प्रकार है कि प्रत्येक $x \in X$ के लिए

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

**(vi) व्युत्क्रम या प्रतिलोम फलन (Reciprocal Functions)**—यदि $f: X \to R$ एक वास्तविक फलन हो तब इसका प्रतिलोम फलन $\frac{1}{f}: X - \{x : f(x) = 0\} \to R$, इस प्रकार है कि

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$$

## उदाहरण(Example)

**उदाहरण–1:** यदि $f(x) = \frac{7 - x}{x - 7}$ तो फलन $f$ का प्रान्त तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

**हल** : $f(x) = \frac{7 - x}{x - 7}$ में $x$ के सभी मान वास्तविक होंगे यदि $x \neq 7$ क्योंकि $x = 7$ के लिए फलन $f$ परिभाषित नहीं होगा। $\left(f(7) = \frac{7 - 7}{7 - 7} = \frac{0}{0}\right)$

$\therefore$ $f$ का प्रान्त $= R - \{7\}$

पुनः माना $\quad y = \dfrac{7-x}{x-7}$

$y = f(x)$

$\therefore \quad y = \dfrac{7-x}{x-7} \quad \left[\because f(x) = \dfrac{7-x}{x-7}\right]$

$\Rightarrow \quad y = \dfrac{-(x-7)}{(x-7)} = -1$

$\Rightarrow \quad y = -1$

$\therefore \forall x \in R - \{7\}$ के लिए $y = -1$

$\therefore$ $f$ का परिसर $= \{-1\}$

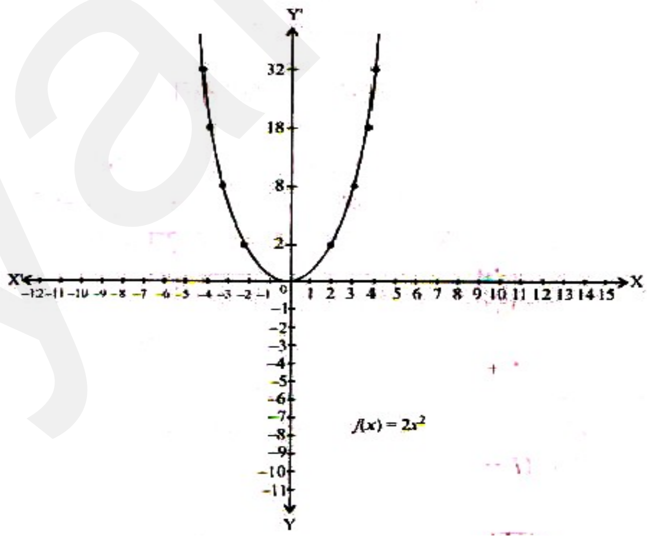
**उदाहरण–2:** $y = f(x) = 2x^2, x \in R$ तथा $f : R \to R$ एक बहुपदीय फलन है। इसका प्रयोग करके नीचे दी हुई तालिका को पूरा कीजिए तथा इसका प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए और आलेख भी खींचिए।

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | — | — | — | — | — | — | — | — | — |

**हल :** पूरी की हुई तालिका नीचे दी गई है—

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 32 | 18 | 8 | 2 | 0 | 2 | 8 | 18 | 32 |

फलन $f$ का प्रान्त R है, अर्थात् $\{x : x \in R\}$ और $f$ का परिसर $\{x : x \geq 0, x \in R\}$ संख्याओं $-4, -3, -2, 0, 1, 2, 3, 4$ तथा $32, 18, 8, 2, 0, 2, 8, 18, 32 \ldots$ को क्रमशः X-अक्ष तथा Y-अक्ष अंकित कर और सम्बन्धित बिन्दुओं को मिलाने पर हमें एक वक्र प्राप्त होता है, जिसका आलेख निम्न चित्र में दिखाया गया है—




**उदाहरण–3:** वास्तविक फलन $f(x) = -|x|$ का प्रान्त तथा परिसर ज्ञात कीजिए–

**हल :** (i) दिया हुआ फलन $f(x) = -|x|$ एक वास्तविक फलन है इसलिए $x \in R$, यहाँ R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। इस प्रकार इसका प्रान्त वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R है। वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R को $R(-\infty, \infty)$ द्वारा भी प्रदर्शित करते हैं। अतः $(-\infty, \infty)$ दिए फलन का प्रान्त है।

अब $x$ का प्रतिबिम्ब (प्रतिचित्रण) $x$ के सभी मानों के लिए ऋणात्मक है क्योंकि $f(x) = -|x|$ अतः दिए फलन का परिसर 0 तथा ऋणात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय होगा। इसे $(-\infty, 0]$ से प्रदर्शित किया जाता है। अतः परिसर $= (-\infty, 0]$ एवं प्रान्त $(-\infty, \infty)$।