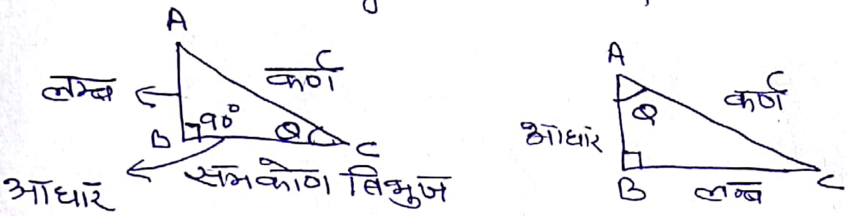
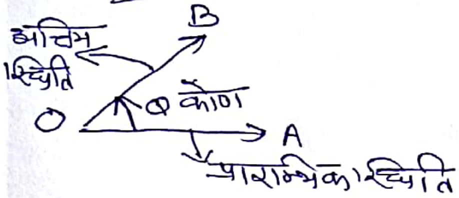
त्रिकोणमितीय फलन
Trigonometric functions



जिस कोण के लिए त्रिकोणमितीय अनुपातों का मान ज्ञात करना होता है उसके सामने की भुजा लम्ब होती है, समकोण के सामने की भुजा कर्ण तथा तीसरी भुजा आधार होती है।

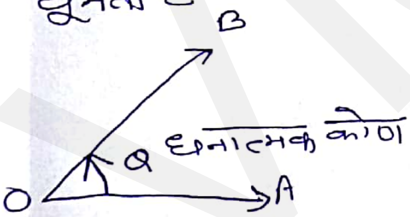
कोण (Angle):- जब कोई किरण अपने प्रारम्भिक स्थिर बिन्दु के परितः घूमती है तो उसकी प्रारम्भिक और अन्तिम अवस्थाओं के बीच के घुमाव को कोण कहते हैं।

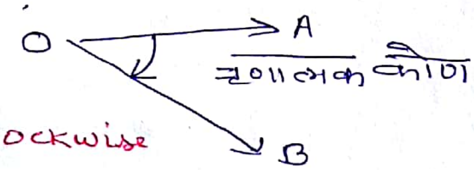


कोण का प्रदर्शन

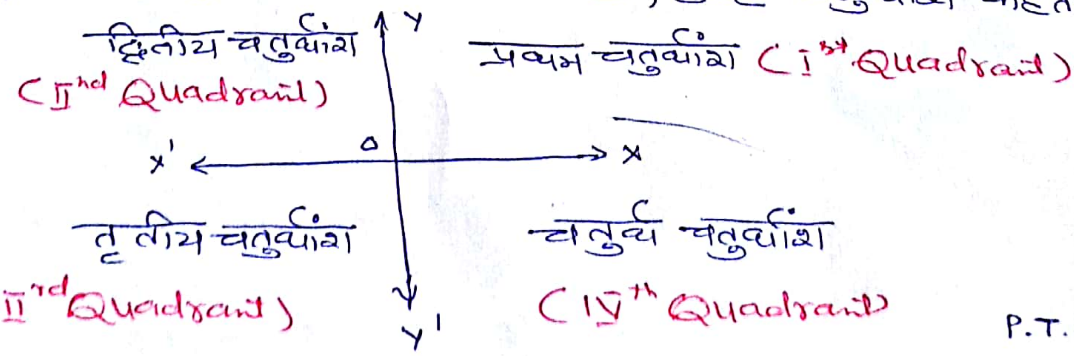
$\angle BOA \equiv \angle AOB$

कोण
- धनात्मक कोण
  → जब प्रारम्भिक भुजा घड़ी की सुई की दिशा के विपरीत (Anti-clockwise) घूमती है
- ऋणात्मक कोण
  → जब प्रारम्भिक भुजा घड़ी की सुई की दिशा में (clockwise) घूमती है।





चतुर्थांश (Quadrant):- दो परस्पर लम्बवत रेखाएँ किसी तल को चार भागों में बांटती हैं, उन्हें चतुर्थांश कहते हैं।

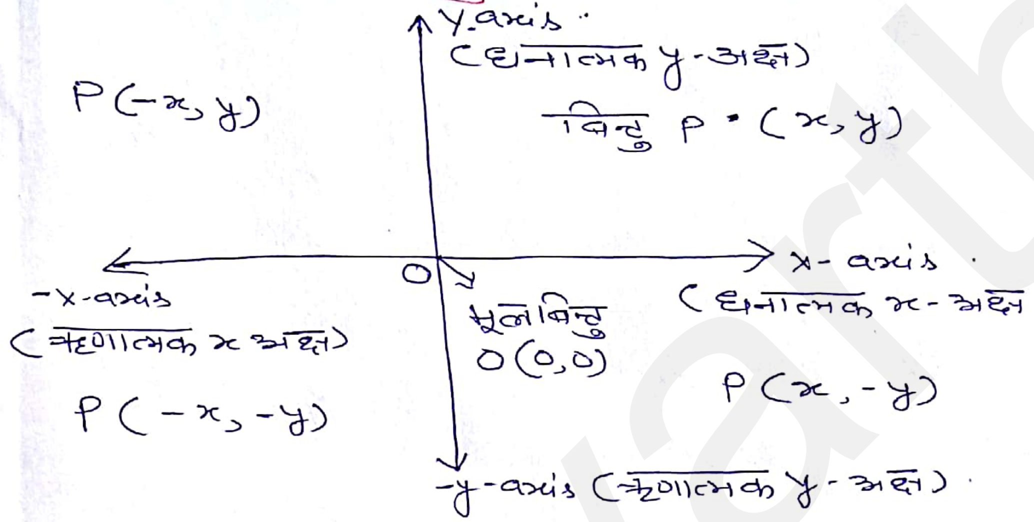


P.T.O

eVidyarthi

(i) प्रथम चतुर्थांश YOX
(ii) द्वितीय चतुर्थांश YOX'
(iii) तृतीय चतुर्थांश X'OY'
(iv) चतुर्थ चतुर्थांश Y'OX

किसी चतुर्थांश में बिन्दु की स्थिति :-



1- प्रथम चतुर्थांश में स्थित किसी बिन्दु के लिए x-निर्देशांक व y-निर्देशांक सदैव धनात्मक होते हैं।

2- द्वितीय चतुर्थांश में स्थित बिन्दु के लिए x-निर्देशांक ऋणात्मक व y-निर्देशांक धनात्मक होता है।

3- तृतीय चतुर्थांश में स्थित बिन्दु के लिए x-निर्देशांक व y-निर्देशांक दोनों ऋणात्मक होते हैं।

4- चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित बिन्दु के लिए x-निर्देशांक धनात्मक और y-निर्देशांक ऋणात्मक होते हैं।

5- मूल बिन्दु के लिए x व y दोनों शून्य होते हैं।

6- X-अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु के लिए y निर्देशांक शून्य होता है।

7- Y-अक्ष पर स्थित बिन्दु के लिए x-निर्देशांक शून्य होता है।

evidyarthi

कोण के मापन की पद्धतियाँ एवं उनमें सम्बन्ध :-

(1) षाष्टिक पद्धति :- इस पद्धति में एक समकोण को 90 बराबर भागों में बांटा जाता है जिसे डिग्री कहते हैं। 1 डिग्री को 60 बराबर भागों में बांटा जाता है प्रत्येक भाग 1 मिनट कहलाता है। 1 मिनट को 60 बराबर भागों में बांटा जाता है प्रत्येक भाग 1 सेकण्ड कहलाता है।

→ एक डिग्री = 1°

1 समकोण = 90°

1° = 60 मिनट या $60'$

$1'$ = 60 सेकण्ड या $60''$

अर्थात समकोण का विभाजन डिग्री में, डिग्री का विभाजन मिनट में, मिनट का विभाजन सेकण्ड में होता है।

(2) शतांशक या फ्रेन्च पद्धति :- इस पद्धति में समकोण को 100 बराबर भागों में बांटा जाता है जिन्हें ग्रेड कहते हैं।

1 समकोण = 100 grade (100^g)

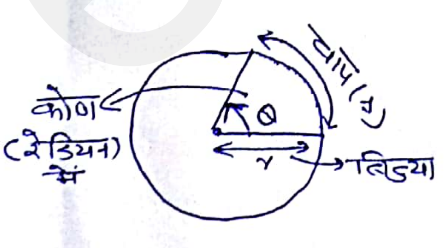
1^g = 100 फ्रेंच मिनट ($100'$)

$1'$ = 100 फ्रेंच सेकण्ड ($100''$)

3- वृत्तीय पद्धति (Circular system) - इस पद्धति में कोण मापन की इकाई रेडियन (Radian) है। 1 रेडियन को 1^c लिखते हैं।

Imp

प्रमेय :- किसी चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर निर्मित कोण का वृत्तीय माप (रेडियन) $\frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$ के बराबर होता है।



$$\text{कोण} = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$$

$$\theta = \frac{s}{r}$$

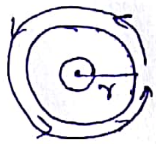
θ सदैव रेडियन में होगा

P.T.O

नोट - (1) अब अगर चाप तथा त्रिज्या की Value (मान) दे रखा हो तो हम रेडियन में कोण का मान निकाल सकते हैं।

2- किसी वृत्त की त्रिज्या जब एक पूर्ण परिक्रमा करती है, तब वह वृत्त के केन्द्र पर 2π रेडियन कोण अन्तरित करती है।

$$\theta = \frac{s}{r}$$



$s = 2\pi r$ (वृत्त की परिधि)

$$\theta = \frac{2\pi r}{r}$$

$$\boxed{\theta = 2\pi \text{ (रेडियन)}} \equiv \text{डिग्री में } \theta = 360^\circ$$

अतः $360^\circ = 2\pi$ रेडियन

$\therefore$ $\boxed{\pi \text{ रेडियन} = 180^\circ}$

डिग्री (D) तथा रेडियन (R) में सम्बन्ध :-

$$\frac{D}{90^\circ} = \frac{2R}{\pi}$$

जहाँ D = कोण का मान डिग्री में

R = कोण का मान रेडियन में

$$D = \frac{2 \times 90^\circ R}{\pi}$$

$$D = \frac{180^\circ R}{\pi} = R \times \frac{180^\circ}{\pi}$$

यानि रेडियन को डिग्री में बदलने के लिए रेडियन माप को $\frac{180^\circ}{\pi}$ से गुणा करते हैं।

प्रश्न 1 → 30° को रेडियन में बदलिए।

Sol- हम जानते हैं $R = D \times \frac{\pi}{180^\circ}$

$$R \text{ (रेडियन)} = \frac{30 \times \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6} \text{ रेडियन} \quad \underline{\text{Ans}}$$

प्रश्न-2- $50^\circ 20'$ को रेडियन माप में बदलिए।

Solⁿ- $\because R = D \times \frac{\pi}{180^\circ}$

सबसे पहले दिए गये माप को पूर्ण डिग्री में बदले

$\Rightarrow 50^\circ 20'$ $\quad\because$ $\begin{cases} 60' = 1^\circ \\ \therefore 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ \\ 20' = \left(\frac{1}{60} \times 20\right)^\circ = \left(\frac{1}{3}\right)^\circ \end{cases}$

$\Rightarrow \left(50 \frac{1}{3}\right)^\circ$

$\Rightarrow \left(\frac{151}{3}\right)^\circ$

evidyarthi

पुनः $R = D \times \frac{\pi}{180}$

$R = \frac{151}{3} \times \frac{\pi}{180}$ $\left[\because D = \frac{151^\circ}{3}\right]$

$= \frac{151\pi}{540}$ रेडियन

Ans

प्रश्न 3 $-47^\circ 30'$ को रेडियन माप में बदलिए,

Solⁿ → सबसे पहले दिए गये माप को पूर्ण डिग्री में बदलिए.

$\Rightarrow -47^\circ 30'$

$\Rightarrow -\left(47\frac{1}{2}\right)^\circ = -\left(\frac{95}{2}\right)^\circ$

$\left\{ \because 60' = 1^\circ,\ 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ,\ 30' = \left(\frac{1}{60} \times 30\right)^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^\circ \right.$

$\because R = D \times \frac{\pi}{180}$

$R = -\left(\frac{95}{2} \times \frac{\pi}{180}\right)$

$R = -\left(\frac{19\pi}{72}\right)$ रेडियन

Ans

प्रश्न 4. 12 रेडियन को डिग्री माप में बदलिए.

Solⁿ – $\because D = R \times \frac{180}{\pi}$

$\Rightarrow D = 12 \times \frac{180}{22/7} = \frac{12 \times 180 \times 7}{22} = \frac{7560}{11}$ डिग्री

$\Rightarrow D = 687\frac{3}{11}$ डिग्री $= 687^\circ + \frac{180}{11}$ मिनट $[\because 3^\circ = 180']$

$\Rightarrow D = 687^\circ + 16\frac{4}{11}$ मिनट

$= 687^\circ + 16' + \frac{240}{11}$ सेकण्ड [∵ 4 मिनट = 240 सेकेण्ड]

$= 687^\circ 16' 22''$ (लगभग)

Ans

प्रश्न 5 – वृत्त का एक चाप जिसकी लम्बाई 24 Cm है वृत्त के केन्द्र पर 60° का कोण बनाता है वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करो?

Solⁿ ∵ θ (रेडियन में) $= \frac{s}{r}$

दिया है चाप की लं० = 24 Cm

कोण $\theta = 60^\circ = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$ रेडियन

अतः $\frac{\pi}{3} = \frac{24}{r} \Rightarrow r = \frac{3 \times 24}{\frac{22}{7}} = \frac{3 \times 24 \times 7}{22}$ Cm

हल करने पर त्रिज्या $r = 22.90$ Cm

Ans

PTO

त्रिकोणमितीय अनुपात भाग - 2

किसी समकोण त्रिभुज की दो भुजाओं का अनुपात किसी कोण के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात कहलाता है।
त्रिकोणमितीय अनुपात 6 होते हैं।

$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$

$\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$, $\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$, $\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}$, $\sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$, $\cot\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$

त्रिकोणमितीय अनुपातों का आपस में सम्बन्ध -

1. $\sin\theta \cdot \operatorname{cosec}\theta = 1$
2. $\cos\theta \cdot \sec\theta = 1$
3. $\tan\theta \cdot \cot\theta = 1$
4. $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
5. $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

मूलभूत त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ :-

1. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
2. $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
3. $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

विभिन्न चतुर्थांशों में त्रिकोणमितीय अनुपातों के चिह्न :

Y ($\pi/2$), X (0°), X' (π), Y' ($\frac{3\pi}{2}$), O

(I) $(0^\circ - 90^\circ)$
- $\sin\theta$ (+)
- $\cos\theta$ (+)
- $\tan\theta$ (+)
- $\cot\theta$ (+)
- $\sec\theta$ (+)
- $\operatorname{cosec}\theta$ (+)

(II) $(90^\circ - 180^\circ)$
- $\sin\theta$ (+)
- $\cos\theta$ (−)
- $\tan\theta$ (−)
- $\cot\theta$ (−)
- $\sec\theta$ (−)
- $\operatorname{cosec}\theta$ (+)

(III) $(180^\circ - 270^\circ)$
- $\sin\theta$ (−)
- $\cos\theta$ (−)
- $\tan\theta$ (+)
- $\cot\theta$ (+)
- $\sec\theta$ (−)
- $\operatorname{cosec}\theta$ (−)

(IV) $(270^\circ$ से $360^\circ)$
- $\sin\theta$ (−)
- $\cos\theta$ (+)
- $\tan\theta$ (−)
- $\cot\theta$ (−)
- $\sec\theta$ (+)
- $\operatorname{cosec}\theta$ (−)

eVidyarthi

Example - यदि $\cos x = -\frac{4}{5}$ हो तो और x तृतीय चतुर्थांश में स्थित है। तो अन्य पाँच त्रिकोणमितीय फलनों के मानों को ज्ञात कीजिए।

Sol^n:- $\because \cos x = -\frac{4}{5}$

$\therefore \sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-4/5} = -\frac{5}{4}$

पुनः $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\Rightarrow \sin^2 x + (-4/5)^2 = 1$

$\Rightarrow \sin^2 x + \frac{16}{25} = 1$

$\Rightarrow \sin^2 x = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$

$\Rightarrow \sin x = \pm\sqrt{9/25} = \pm 3/5$

$\because x$ तृतीय चतुर्थांश में स्थित है। तृतीय चतुर्थांश में $\sin x$ ऋणात्मक होगा।

अतः $\sin x = -3/5$

$\therefore \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{-3/5} = -\frac{5}{3}$.

अब $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-3/5}{-4/5} = \frac{3}{4}$

$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{3/4} = 4/3$.

Ans - $\sin x = -3/5$, $\cos x = -4/5$, $\tan x = \frac{3}{4}$, $\cot x = 4/3$, $\operatorname{cosec} x = -5/3$

$\sec x = -5/4$

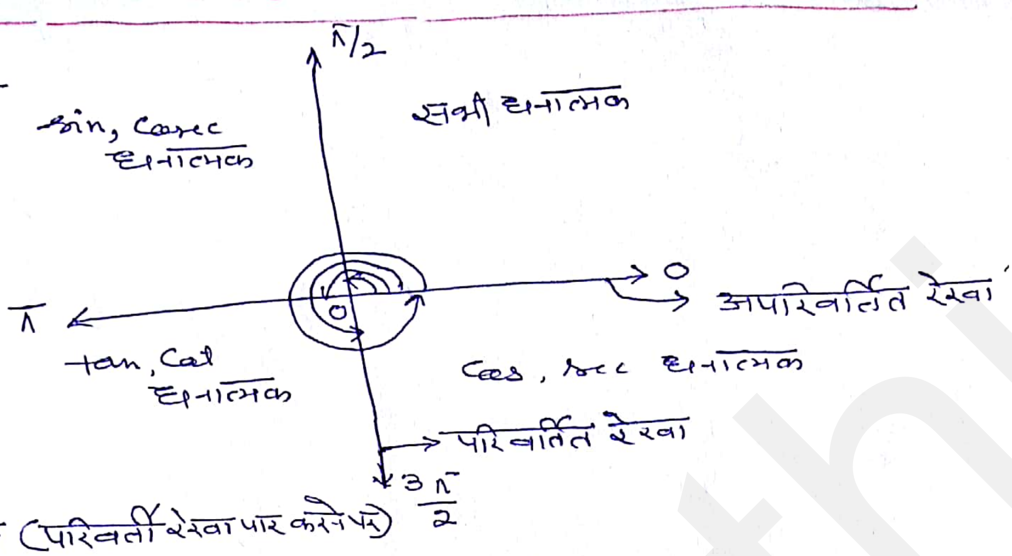
त्रिकोणमितीय फलनों का प्रान्त व परिसर :-

त्रिकोणमितीय फलन	प्रान्त	परिसर
$\sin x$	सभी वास्तविक संख्याएं R	$[-1, 1]$
$\cos x$	सभी वास्तविक संख्याएं R	$[-1, 1]$
$\tan x$	$\{x : x \in R$ और $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in Z\}$	सभी वास्तविक संख्याएं R
$\cot x$	$\{x : x \in R$ और $x \neq n\pi, n \in Z\}$	सभी वास्तविक संख्याएं R
$\sec x$	$\{x : x \in R$ और $x \neq (2n+1)\pi/2, n \in Z\}$	$\{y : y \in R, y \leq -1$ या $y \geq 1\}$
$\operatorname{cosec} x$	$\{x : x \in R$ और $x \neq n\pi, n \in Z\}$	$\{y : y \in R, y \geq 1$ या $y \leq -1\}$

P.T.O.

दो कोणों के योग और अन्तर का त्रिकोणमितीय फलन -

TRICK:-



परिवर्तन (परिवर्ती रेखा पार करने पर)
↓

- $\sin\theta \rightarrow \cos\theta$
- $\cos\theta \rightarrow \sin\theta$
- $\tan\theta \rightarrow \cot\theta$
- $\cot\theta \rightarrow \tan\theta$
- $\sec\theta \rightarrow \operatorname{cosec}\theta$
- $\operatorname{cosec}\theta \rightarrow \sec\theta$

नियम →
(1) चिन्ह देखो
(2) परिवर्तन देखो।

Example-(1) $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\cot x$ [परिवर्तन होगा तथा चिन्ह (■)]

(2) $\tan\frac{19\pi}{3} = \tan\left(6\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \tan\pi/3 = \sqrt{3}$.

(3) $\sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right) = -\sin\frac{11\pi}{3}$ [$\because \sin(-x) = -\sin x$]

$= -\sin(4\pi - \pi/3)$

$= -\sin(-\pi/3)$

$= (-)(-)\sin\pi/3$

$= \sin\pi/3 = \sqrt{3}/2$. Ans

दो कोणों के योग और अन्तर से सम्बन्धित सर्वसमिकाएँ :-

(1) $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

(2) $\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$

(3) $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

(4) $\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$

P.T.O

eVidyarthi

(5) $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

(6) $\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

(7) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$

(8) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= 2\cos^2 x - 1$

$= 1 - 2\sin^2 x$

$= \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$.

(9) $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

(10) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

(11) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

(12) $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$

(13)

(i) $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$

(ii) $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2}$.

(iii) $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$

(iv) $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2}$.

(14)

(i) $2\sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$

(ii) $2\cos x \sin y = \sin(x+y) - \sin(x-y)$

(iii) $2\cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$

(iv) $2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$ [※]

P.T.O.

eVidyarthi

Example (1) मान ज्ञात कीजिए $\sin 75^\circ$ का

Solⁿ-

$$\sin 75 = \sin(45+30)$$

$[\because \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y]$

$$\therefore \sin(45+30) = \sin 45 \cos 30 + \cos 45 \cdot \sin 30$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

Ans

(2) सिद्ध कीजिए - $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) \cos(2\pi+x)\left[\cot\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\cot(2\pi+x)\right]=1$

Solⁿ- L.H.S - $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) \cdot \cos(2\pi+x)\left[\cot\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\cot(2\pi+x)\right]$

$$\Rightarrow \sin x \cdot \cos x\,[\tan x + \cot x]$$

[∵ $\frac{3\pi}{2}$ में परिवर्ती रेखा का परिवर्तन, 2π में अपरिवर्ती रेखा का परिवर्तन]

$$\Rightarrow \sin x \cdot \cos x\left[\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right] \qquad \because \begin{cases} \tan x = \sin x/\cos x \\ \cot x = \cos x/\sin x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin x \cdot \cos x\left[\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x}\right]$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Proved

(3) सिद्ध कीजिए $\cos\left(\frac{3\pi}{4}+x\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right) = -\sqrt{2}\sin x$.

Solⁿ- L.H.S. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}+x\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)$

$\left[\because \cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2} \cdot \cos\frac{C-D}{2}\right]$

यहाँ $C = \frac{3\pi}{4}+x$, $D = \frac{3\pi}{4}-x$

$$\therefore \Rightarrow 2\cos\left\{\frac{\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)+\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)}{2}\right\} \cdot \cos\left\{\frac{\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)-\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)}{2}\right\}$$

$$\Rightarrow 2\cos\left\{\frac{\frac{3\pi}{4}+x+\frac{3\pi}{4}-x}{2}\right\} \cdot \cos\left\{\frac{\frac{3\pi}{4}+x-\frac{3\pi}{4}+x}{2}\right\}$$

$$\Rightarrow 2\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2}}{2}\right) \cdot \cos\frac{2x}{2}$$

$$\Rightarrow 2\cos\frac{3\pi}{4} \cdot \cos x$$

$$\Rightarrow 2\cos(\pi - \pi/4) \cdot \cos x$$

$$\Rightarrow -2\cos\pi/4 \cdot \cos x = -2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = -\sqrt{2}\cos x \quad \text{Proved}$$

P.T.O

evidyarthi

(4) सिद्ध कीजिए। $\cos^2 2x - \cos^2 6x = \sin 4x \sin 8x$

Soln.- L.H.S.— $\cos^2 2x - \cos^2 6x$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[2\cos^2 2x - 2\cos^2 6x\right]$ 2 से अंश व हर को गुणा करने पर।

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[(1+\cos 4x) - (1+\cos 12x)\right]$ $\left\{ \because \cos 2x = 2\cos^2 x - 1,\ 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x \right.$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[1 + \cos 4x - 1 - \cos 12x\right]$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\cos 4x - \cos 12x\right]$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[2\sin\left(\frac{4x+12x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{12x-4x}{2}\right)\right]$ $\because \left[\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cdot\sin\frac{D-C}{2}\right]$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[2\sin 8x \cdot \sin 4x\right]$

$= \sin 4x \cdot \sin 8x$ R.H.S.

Proved

(5) सिद्ध कीजिए $\cos 6x = 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1$.

Soln. L.H.S $\cos 6x = \cos 3(2x)$

$[\because \cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A]$

यहाँ $A \equiv 2x$

$\therefore \cos 3(2x) = 4\cos^3 2x - 3\cos 2x$

$\Rightarrow \cos 2x\left[4\cos^2 2x - 3\right]$

$= \cos 2x\left[4(2\cos^2 x - 1)^2 - 3\right]$

$= \cos 2x\left[4(4\cos^4 x + 1 - 4\cos^2 x) - 3\right]$

$= \cos 2x\left[16\cos^4 x + 4 - 16\cos^2 x - 3\right]$

$\Rightarrow (2\cos^2 x - 1)(16\cos^4 x - 16\cos^2 x + 1)$

$= 32\cos^6 x - 32\cos^4 x + 2\cos^2 x - 16\cos^4 x + 16\cos^2 x - 1$

$\Rightarrow 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1$ = R.H.S

Proved

eVidyarthi

त्रिकोणमितीय समीकरण

एक चर राशि में त्रिकोणमितीय फलनों वाले समीकरण को त्रिकोणमितीय समीकरण कहते हैं

मुख्य हल – त्रिकोणमितीय समीकरणों के ऐसे हल जहाँ $0 \leq x < 2\pi$ होता है मुख्य हल कहलाते हैं।

व्यापक हल – n से युक्त व्यंजक जो समीकरण के सभी हल व्यक्त करता है व्यापक हल कहलाता है। जहा n पूर्णांक है।

प्रमेय 1- $\sin x = 0$ का व्यापक हल $x = n\pi$ जहाँ $n \in Z$

2- $\cos x = 0$ तो $x = (2n+1)\pi/2$, जहाँ $n \in Z$

3- $\tan x = 0$ तो $x = n\pi$ जहां $n \in Z$

4- $\cot x = 0$ तो $x = (2n+1)\pi/2$ जहाँ $n \in Z$

नोट- [$\sec x = 0$ तथा $\operatorname{cosec} x = 0$ का कोई हल नहीं होता है। क्योंकि $\sec x \geq 1$ या $\sec x \leq -1$ यही $\operatorname{cosec} x$ के लिए]

5- $\sin x = \sin y$ तो $x = n\pi + (-1)^n y$ जहा $n \in Z$

6. $\cos x = \cos y$ तो $x = 2n\pi \pm y$ जहा $n \in Z$

7- $\tan x = \tan y$ तो $x = n\pi + y$ जहाँ $n \in Z$

8- $\operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} y$ तो $x = n\pi + (-1)^n y$ जहा $n \in Z$

9- $\sec x = \sec y$ तो $x = 2n\pi \pm y$ जहाँ $n \in Z$

10- $\cot x = \cot y$ तो $x = n\pi + y$ जहाँ $n \in Z$

Example. 1 - $\cot x = -\sqrt{3}$ का मुख्य तथा व्यापक हल ज्ञात कीजिए

Soln- $\cot x$ ऋणात्मक है अतः x दूसरे व चतुर्थ चतुर्थांश में होगा

अतः $\cot x = -\sqrt{3}$

$\Rightarrow \cot x = -\cot \pi/6$

$\Rightarrow \cot x = \cot(\pi - \pi/6)$

$\Rightarrow \cot x = \cot 5\pi/6$

$\Rightarrow \boxed{x = 5\pi/6}$

$\cot x = -\sqrt{3}$

$\Rightarrow \cot x = -\cot \pi/6$

$\Rightarrow \cot x = \cot(2\pi - \pi/6)$

$\Rightarrow \cot x = \cot \frac{11\pi}{6}$.

$\Rightarrow \boxed{x = \frac{11\pi}{6}}$.

व्यापक हल $x = n\pi + \frac{5\pi}{6}$ जहाँ $n \in Z$.

P.T.O

eVidyarthi

Ex-2. $\text{Cosec}\, x = -2$ का मुख्य तथा व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

Solⁿ- ∵ Cosec x का चिन्ह ऋणात्मक है। अतः x तृतीय व चतुर्थ चतुर्थांश में होगा।

$\because \text{Cosec}\, x = -2 = -\text{Cosec}\, \pi/6$

$\Rightarrow \text{Cosec}\, x = \text{Cosec}(\pi + \pi/6)$ या $\text{Cosec}(2\pi - \pi/6)$

$\Rightarrow \text{Cosec}\, x = \text{Cosec}\, 7\pi/6$ या $\text{Cosec}\, \frac{11\pi}{6}$

अतः $x = 7\pi/6$ तथा $\frac{11\pi}{6}$ मुख्य हल

$\because \text{Cosec}\, x = \text{Cosec}\, 7\pi/6$

अतः $x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}$ व्यापक हल

Ex. 3. $\text{Cos}\, 3x + \text{Cos}\, x - \text{Cos}\, 2x = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

Solⁿ.

या $2\,\text{Cos}\frac{3x+x}{2} \cdot \text{Cos}\frac{3x-x}{2} - \text{Cos}\, 2x = 0$ $\left[\because \text{Cos}\, C + \text{Cos}\, D = 2\,\text{Cos}\frac{C+D}{2} \cdot \text{Cos}\frac{C-D}{2}\right]$

या $2\,\text{Cos}\, 2x \cdot \text{Cos}\, x - \text{Cos}\, 2x = 0$

या $\text{Cos}\, 2x\,(2\,\text{Cos}\, x - 1) = 0$

अब या तो $\text{Cos}\, 2x = 0$ या $2\,\text{Cos}\, x - 1 = 0$

$\Rightarrow 2x = (2n+1)\pi/2$ या $\text{Cos}\, x = \frac{1}{2} = \text{Cos}\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow x = (2n+1)\pi/4$ $\Rightarrow x = 2n\pi \pm \pi/3$.

अतः दिए गये समीकरण का व्यापक हल

$x = (2n+1)\pi/4$ अथवा $x = 2n\pi \pm \pi/3$ जहाँ $n \in Z$ है।

Ex. 4- $\text{Sin}\, 2x + \text{Cos}\, x = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

Solⁿ- $2\,\text{Sin}\, x\,\text{Cos}\, x + \text{Cos}\, x = 0$ $[\because \text{Sin}\, 2x = 2\,\text{Sin}\, x\,\text{Cos}\, x]$

$\text{Cos}\, x\,(2\,\text{Sin}\, x + 1) = 0$

अब या तो $\text{Cos}\, x = 0$ या $2\,\text{Sin}\, x + 1 = 0$

$\text{Sin}\, x = -1/2$

P.T.O.

$\cos x = 0$ या $\sin x = -\frac{1}{2} = -\sin\frac{\pi}{6}$

$= \sin(\pi + \pi/6)$

$$x = (2n+1)\pi/2$$

$\sin x = \sin\frac{7\pi}{6}$

$\Rightarrow$ $$x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}, \quad n \in Z$$

अतः व्यापक हल $x = (2n+1)\pi/2$ अथवा $x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}$, $n \in Z$

Ex. 5- $\sec^2 2x = 1 - \tan 2x$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

Soln- $1 + \tan^2 2x = 1 - \tan 2x$ $[\because 1 + \tan^2 x = \sec^2 x]$

या $\tan^2 2x + \tan 2x = 0$

या $\tan 2x(\tan 2x + 1) = 0$

अब या तो $\tan 2x = 0$ या $\tan 2x + 1 = 0$

$\Rightarrow 2x = n\pi$

$$x = \frac{n\pi}{2}$$

या

$\tan 2x = -1$

$\tan 2x = -\tan(\pi/4)$

$\tan 2x = \tan(\pi - \pi/4)$

$\Rightarrow \tan 2x = \tan\frac{3\pi}{4}$

$\Rightarrow 2x = n\pi + \frac{3\pi}{4}$

$\Rightarrow$ $$x = \frac{n\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} \text{ जहाँ } n \in Z$$

अतः व्यापक हल

$x = \frac{n\pi}{2}$ या $x = \frac{n\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$ जहाँ $n \in Z$

evidyarthi