सम्मिश्र संख्याएँ और द्विघातीय समीकरण

पिछली कक्षाओं में हम वास्तविक संख्या एवं उनके प्रकार के बारे में पढ़ चुके हैं। ऐसी संख्याएँ जो वास्तविक नहीं है वे अवास्तविक अर्थात काल्पनिक कहलाती हैं। वास्तविक एवं काल्पनिक संख्याओं का संयोजन सम्मिश्र संख्या कहलाता है। सम्मिश्र संख्याओं के विषय में विस्तार में जानने से पूर्व निम्न संख्या आरेख (Number Chart) का अध्ययन लाभकारी होगा।

संख्या / सम्मिश्र संख्या

- वास्तविक सं०
  - परिमेय सं०
    - पूर्णांक
      - ऋण पूर्णांक
      - शून्य पूर्णांक
      - धन पूर्णांक (प्राकृत सं०)
    - दशमलव सं० / भिन्न
      - सांत
      - असांत
        - आवर्ती
        - अनावर्ती
  - अपरिमेय सं०
    - दशमलव सं० / भिन्न
    - अनावर्ती
- काल्पनिक सं०

पूर्व ज्ञान के आधार पर हमें यह भी पता है कि प्रत्येक वास्तविक संख्या का वर्ग धनात्मक वास्तविक संख्या होती है, अर्थात प्रत्येक x वास्तविक संख्या के लिए

$$x^2 > 0$$

अब कल्पना करें कि एक संख्या x का वर्ग ऋणात्मक है।

माना $(x^2+1) = 0$

$$x^2 = -1 \quad \text{(जो कि 0 से छोटी है)}$$

$$x = \pm\sqrt{-1}$$

$$x = \pm i$$

अर्थात् $i = \sqrt{-1}$ जो कि एक काल्पनिक सं० है।

दोनों ओर वर्ग करने पर - $\boxed{i^2 = -1}$

$$i^3 = i^2 \times i$$

$$i^3 = -i$$

इसी प्रकार - $i^4 = i^2 \times i^2$

$$= (-1)(-1)$$

$$i^4 = 1$$

i^n के मानों की पुनरावृत्ति निम्नवत् होती रहती है

$i = i$	$i^5 = i$	$i^9 = i$	$i^{13} = i$	
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$	$i^{10} = -1$	$i^{14} = -1$	- - - - - - - -
$i^3 = -i$	$i^7 = -i$	$i^{11} = -i$	$i^{15} = -i$	
$i^4 = 1$	$i^8 = 1$	$i^{12} = 1$	$i^{16} = 1$	

इस प्रकार पूर्णांक n के लिए $i^{4n} = 1$

$$i^{4n+1} = i$$

$$i^{4n+2} = -1$$

$$i^{4n+3} = -i$$

वास्तविक एवं काल्पनिक संख्याओं के संयोग से प्राप्त सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$ के रूप में निरूपित की जाती है

$z = a + ib$ में a, इसका वास्तविक भाग और b काल्पनिक भाग कहलाता है।

इस प्रकार जैसा कि संख्या चार्ट से भी स्पष्ट है प्रत्येक संख्या एक सम्मिश्र संख्या है। इसीलिए सम्मिश्र संख्या; संख्या चार्ट के शीर्ष पर स्थित है।

सम्मिश्र संख्या, $z = a + ib$ में यदि इसका वास्तविक भाग $a = 0$ हो तो

$z = ib$, एक शुद्ध काल्पनिक संख्या है।

इसी प्रकार यदि काल्पनिक भाग $b = 0$ हो तो

$z = a$, एक शुद्ध वास्तविक संख्या है।

सम्बंधित उदाहरण हल सहित

1→ i^{96} का मान ज्ञात कीजिए।

2→ $z = 5 + 2i$ में वास्तविक भाग एवं काल्पनिक भाग क्या है?

उत्तर 1→ $i^{96} = i^{24 \times 4}$

$= i^{4n}$

$= 1$

उत्तर 2→ $z = 5 + 2i$ में $Re(z) = 5$

$Im(z) = 2$

सम्मिश्र संख्याओं का बीजगणित

गणितीय संक्रियाओं जोड़, घटाना, गुणा एवं भाग के प्रति सम्मिश्र संख्याएँ जिन प्रगुणों का पालन करती हैं वे निम्नवत हैं—

सम्मिश्र संख्याओं का योग—

(i) संवरक गुण— दो सम्मिश्र संख्याओं का

होता है। z_1 एवं z_2 सम्मिश्र संख्याओं के लिए z_1+z_2 भी एक सम्मिश्र संख्या है। अतः सम्मिश्र सं० योग के प्रति संवृत्त है।

(ii) क्रम विनिमय नियम - सम्मिश्र संख्या z_1 एवं z_2 के लिए

$$z_1+z_2 = z_2+z_1$$

(iii) साहचर्य नियम - किन्हीं तीन सम्मिश्र संख्याओं z_1, z_2 एवं z_3 के लिए

$$(z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3)$$

(iv) योगात्मक तत्समक - सम्मिश्र संख्या $0+i0$ योगात्मक तत्समक इस प्रकार है कि सम्मिश्र सं० z के लिए

$$z+(0+i0) = z$$

(v) योगात्मक प्रतिलोम - सम्मिश्र संख्या $z=a+ib$ के लिए $-z=-(a+ib)$, z का योगात्मक प्रतिलोम है

$$z+(-z) = 0$$

सम्मिश्र संख्याओं का अंतर - सम्मिश्र संख्या z_1 का z_2 से अंतर z_1 का $(-z_2)$ से योग के रूप में परिभाषित किया जाता है.

$$z_1-z_2 = z_1+(-z_2)$$

सम्मिश्र संख्याओं का गुणन -

(i) संवरक गुण - सम्मिश्र संख्याएँ z_1 एवं z_2 का गुणनफल $z_1 z_2$ भी एक सम्मिश्र संख्या है। अतः सम्मिश्र संख्याएँ गुणन की संक्रिया के लिए

(ii) क्रम विनिमय नियम – सम्मिश्र संख्याओं z_1 एवं z_2 के लिए $z_1 z_2 = z_2 z_1$

(iii) साहचर्य नियम – सम्मिश्र संख्याओं z_1, z_2 एवं z_3 के लिए

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

(iv) गुणात्मक तत्समक - सम्मिश्र संख्याओं हेतु सम्मिश्र संख्या $(1 + i0)$ (गुणात्मक तत्समक) का अस्तित्व है कि

$$z(1 + i0) = z$$

(v) गुणात्मक प्रतिलोम - सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{1}{z}$ होता है। इसे z^{-1} द्वारा निरूपित करते हैं।

$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ प्राप्त होता है।

$z \cdot z^{-1} = 1$ (गुणात्मक तत्समक)

(vi) बंटन नियम (वितरण नियम) – सम्मिश्र संख्या z_1, z_2, z_3 के लिए

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

सम्मिश्र संख्याओं का भागफल – सम्मिश्र संख्याओं z_1 एवं z_2 के लिए $\frac{z_1}{z_2}$, z_1 का z_2 के प्रतिलोम से गुणन के बराबर होता है।

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$$

सम्मिश्र संख्या का मापांक एवं संयुग्मी
(Modulas & Conjugate of a Complex Number)

सम्मिश्र संख्या $z = a+ib$ का मापांक (modulus) धनात्मक वास्तविक संख्या $\sqrt{a^2+b^2}$ है

$$|z| = +\sqrt{a^2+b^2}$$

इसी प्रकार $z = a+ib$ का संयुग्मी (Conjugate) $\bar{z}$ द्वारा निरूपित किया जाता है

$$\bar{z} = a-ib$$

$z = a+ib$ एवं $\bar{z} = a-ib$ एक दूसरे के संयुग्मी कहलाते हैं।

जटिल सम्मिश्र संख्याओं को $a+ib$ के रूप में व्यक्त करने हेतु अथवा किसी सम्मिश्र संख्या के हर का परिमेयीकरण करने हेतु सम्मिश्र संख्या के हर को उसके संयुग्मी से गुणा किया जाता है।

उदाहरण: $4-3i$ का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

$(4-3i)$ का गुणात्मक प्रतिलोम $= \dfrac{1}{4-3i}$

हर के संयुग्मी $(4+3i)$ से हर एवं अंश में गुणा करने पर - प्रतिलोम $= \dfrac{(4+3i)}{(4+3i)(4-3i)}$

$$= \frac{4+3i}{16-9i^2}$$

$$= \frac{4+3i}{16-9(-1)}$$

उदाहरण ② - $\left(\frac{1+3i}{1+2i}\right)$ को $a+ib$ के रूप में लिखिए।

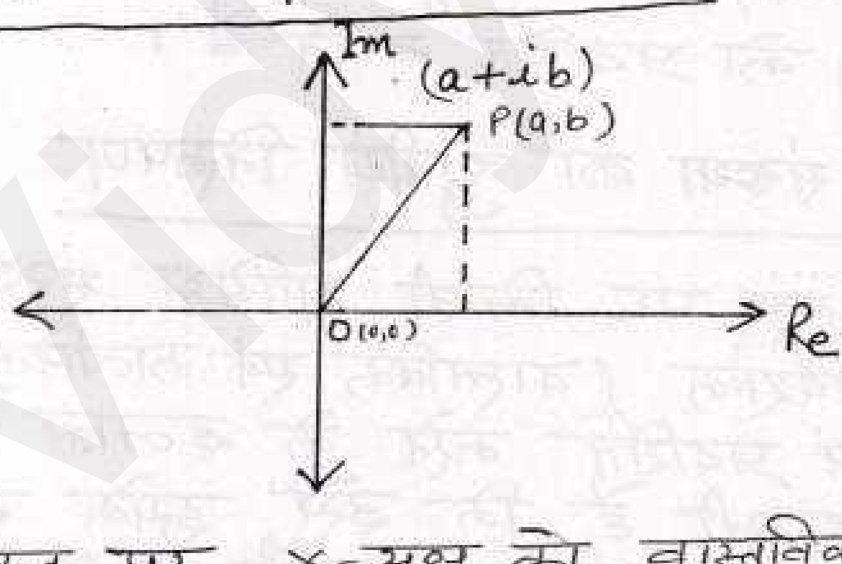
$\left(\frac{1+3i}{1+2i}\right)$ के हर एवं अंश में $(1-2i)$ से गुणा करने पर -

$$\frac{(1+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1+3i-2i-6i^2}{1-4i^2}$$

$$= \frac{1+i+6}{1+4}$$

$$= \frac{7}{5}+\frac{1}{5}i$$

सम्मिश्र संख्या का ग्राफीय निरुपण

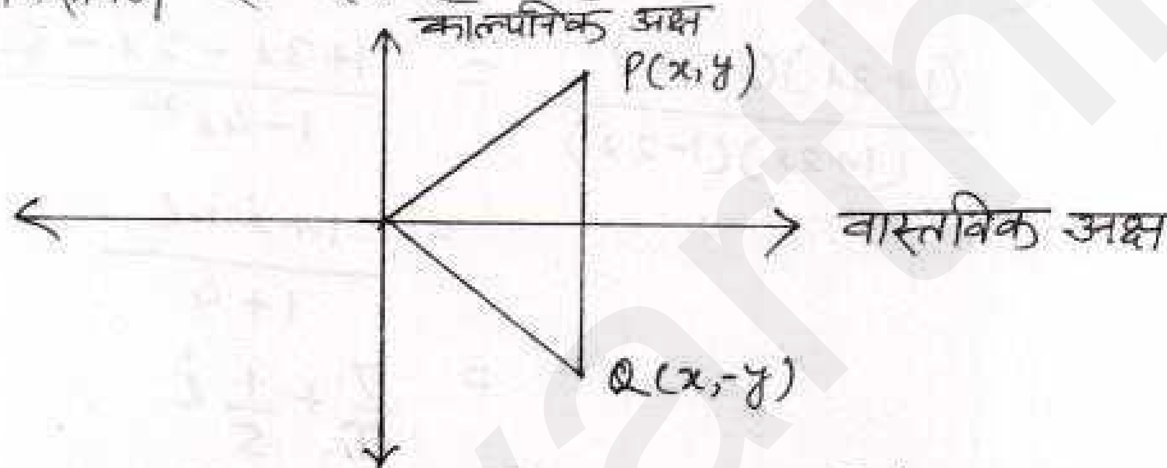


कार्तीय तल पर x-अक्ष को वास्तविक अक्ष और y-अक्ष को काल्पनिक अक्ष लेते हुए सम्मिश्र संख्या $a+ib$ को क्रमित युग्म (a,b) के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है, जहाँ a वास्तविक भाग और b काल्पनिक भाग है। गणितज्ञ जीन रॉबर्ट आर्गण्ड के नाम पर इस तल को आर्गण्ड तल कहा जाता है।

सम्मिश्र संख्या $z = a+ib$ का आलेख बिंदु $P(a,b)$ की

अतः मापांक $|z| = OP$

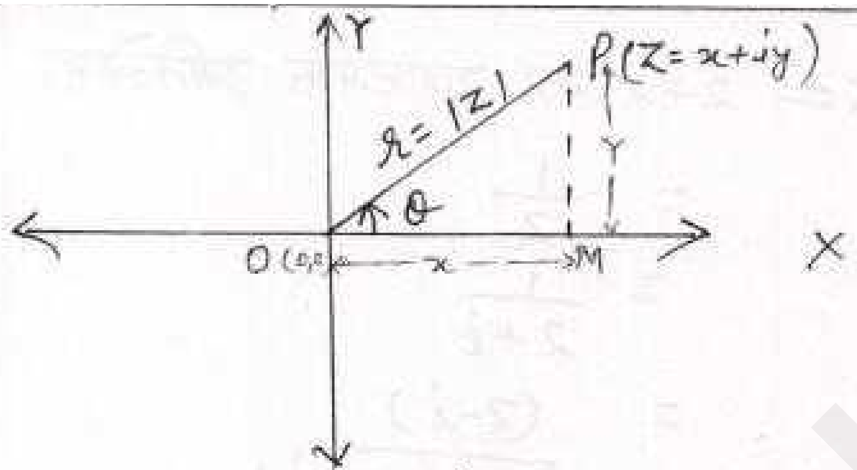
सम्मिश्र संख्या $z = x + iy$ का संयुग्मी $\bar{z} = x - iy$ आर्गण्ड तल में वास्तविक अक्ष के सापेक्ष बिंदु (x, y) का दर्पण प्रतिबिम्ब होता है; जो कि निम्न ग्राफीय निरूपण से स्पष्ट है



बिन्दु $P(x, y)$, $z = x + iy$ को तथा बिंदु $Q(x, -y)$ $\bar{z} = x - iy$ को प्रदर्शित करते हैं।

सम्मिश्र संख्या का ध्रुवीय निरूपण

आर्गण्ड तल पर किसी सम्मिश्र संख्या को x एवं y निर्देशांक (वास्तविक एवं काल्पनिक निर्देशांक) के रूप में प्रदर्शित करने के इलावा एक वैकल्पिक तरीका यह भी है कि इसे इसके मापांक r (बिंदु $P(x, y)$ की मूल बिंदु से दूरी) और इसके कोणांक θ (रेखाखण्ड OP का वास्तविक अक्ष की धनात्मक दिशा से बना वामावर्त कोण) के पदों में व्यक्त किया जाए। अतः सम्मिश्र संख्या का इसके मापांक एवं कोणांक के पदों में निरूपण सम्मिश्र संख्या का ध्रुवीय निरूपण कहलाता है।



उपरोक्त चित्र में मापांक $|z| = r$ तथा कोणांक θ है

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

समकोण त्रिभुज $\triangle PMO$ में $\frac{x}{r} = \cos\theta$

$$x = r\cos\theta$$

$$\frac{y}{r} = \sin\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$\therefore x+iy = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

$$x+iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

यही $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $z = x+iy$ का ध्रुवीय निरूपण कहलाता है,

सम्बंधित उदाहरण हल सहित

1- $z = 2+i$ का योगात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए,

2- $z = 5-i$ का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए,

3- सम्मिश्र संख्या $z = -\sqrt{3} + i$ का मापांक एवं कोणांक ज्ञात कीजिए,

4- $1-i$ को ध्रुवीय रूप में परिवर्तित कीजिए,

उत्तर-1 (i) $z = 2+i$, का गुणात्मक प्रतिलोम

$$= \frac{1}{z}$$

$$= \frac{1}{2+i}$$

$$= \frac{(2-i)}{(2+i)(2-i)}$$

$$= \frac{2-i}{4-i^2}$$

$$= \frac{1}{5}(2-i) \quad \text{Ans}$$

उत्तर 1(ii) – $z = 2+i$, का योगात्मक प्रतिलोम

$$-z = -2-i \quad \text{Ans}$$

उत्तर 2 → $z = 5-i$, का गुणात्मक प्रतिलोम

$$= \frac{1}{z}$$

$$= \frac{1}{5-i}$$

$$= \frac{(5+i)}{(5-i)(5+i)}$$

$$= \frac{1}{26}(5+i) \quad \text{Ans}$$

उत्तर 3 – $z = -\sqrt{3} + i$ का मापांक

$$= \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (1)^2}$$

$$= \sqrt{3+1}$$

कोणांक हेतु- $z = -\sqrt{3} + i$ में

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \text{ से}$$

$$\cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \text{ से}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\tan\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$ $\theta = \text{II}$ चतुर्थांस में है।

$$\tan\theta = -\tan\frac{\pi}{6}$$

$$\tan\theta = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\tan\theta = \tan\frac{5\pi}{6}$$

$$\theta = \frac{5\pi}{6}$$

$\therefore$ कोणांक $= \frac{5\pi}{6}$

<u>उत्तर 4</u> - $z = 1 - i$

$\therefore$ मापांक $r = \sqrt{1^2 + (-1)^2}$

$$r = \sqrt{2}$$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, θ, IV चतुर्थांस में है।

$$\tan\theta = -1$$

$$\tan\theta = -\tan\pi/4$$

$$\tan\theta = -\tan(-\pi/4)$$

$$\theta = -\pi$$

$\because$ $x+iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ से—

$$1-i = \sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$\left[\because \cos(-\theta) = \cos\theta,\ \sin(-\theta) = -\sin\theta\right.$

Ans

उत्तर 5 → $-3 = -3 + 0i$

$\therefore$ $r = \sqrt{(-3)^2 + 0^2}$

$= 3$

$\cos\theta = \frac{-3}{3} = -1$

$\sin\theta = \frac{0}{3} = 0$

$\tan\theta = 0$

$\theta = \pi$

$\therefore$ $-3 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ से

$-3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$ Ans.

द्विघातीय समीकरण एवं सम्मिश्र संख्याएँ

पूर्व कक्षाओं में हमने सीखा है कि द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ (श्रीधराचार्य सूत्र)

से प्राप्त होते हैं। साथ ही ... हम

जानते है कि –

(1) द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक होंगे यदि विविक्तकर (D) $b^2 - 4ac > 0$

(2) द्विघात समी० के मूल बराबर होते हैं

यदि $b^2 - 4ac = 0$

(3) द्विघात समी० के मूल काल्पनिक होते हैं

यदि $b^2 - 4ac < 0$

तीसरी स्थिति वाले द्विघात समीकरणों से प्राप्त हल काल्पनिक प्राप्त होते हैं। उदाहरण निम्नवत् हैं –

<u>उदाहरण</u>- 1- $x^2 + 5 = 0$ का हल ज्ञात कीजिए

2- $x^2 + 3x + 5 = 0$ का हल ज्ञात कीजिए,

<u>उत्तर 1</u> –

$$x^2 + 5 = 0$$
$$x^2 = -5$$
$$x = \pm\sqrt{-5}$$
$$x = \pm\sqrt{(-1)\times 5}$$
$$x = \pm\sqrt{5}\sqrt{-1}$$
$$x = \pm\sqrt{5}\, i \qquad \because i = \sqrt{-1}$$

<u>उत्तर 2</u> – $x^2 + 3x + 5 = 0$ की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर $a = 1, b = 3, c = 5$

$$b^2 - 4ac = 9 - 20$$
$$= -11 < 0$$

$\therefore$ मूल काल्पनिक होंगे

श्रीधराचार्य सूत्र से

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{11}\, i}{2}$$ **Ans**.

सम्मिश्र संख्या के मापांक, संयुग्मी से सम्बंधित कुछ महत्वपूर्ण निष्कर्ष

i- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

ii- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $|z_2| \neq 0$

iii- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

iv- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

v- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2 \neq 0$

दो सम्मिश्र संख्याएँ z_1 और z_2 लेकर उपरोक्त निष्कर्षों की व्युत्पत्ति आसानी से की जा सकती है। उदाहरण के लिए निष्कर्ष i की व्युत्पत्ति निम्नवत् है —

व्युत्पत्ति (i) — माना $z_1 = x_1 + iy_1$

$z_2 = x_2 + iy_2$

$$|z_1 z_2| = |(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)|$$

$$|z_1 z_2| = \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2}$$

$$= \sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 \cancel{- 2x_1x_2y_1y_2} + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 \cancel{+ 2x_1x_2y_1y_2}}$$

$$= \sqrt{x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 + y_1^2y_2^2}$$

$$= \sqrt{x_1^2(x_2^2+y_2^2) + y_1^2(x_2^2+y_2^2)}$$

$$|z_1 z_2| = \sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} \quad \text{--- (i)}$$

$$|z_1||z_2| = \sqrt{(x_1^2+y_1^2)} \cdot \sqrt{(x_2^2+y_2^2)}$$

$$|z_1||z_2| = \sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} \quad \text{--- (ii)}$$

समी (i) एवं (ii) से $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$. Proved

इसी प्रकार सभी निष्कर्ष सुगमता से व्युत्पन्न किए जा सकते हैं।

अभ्यास प्रश्न

1- $a+ib$ के रूप में व्यक्त कीजिए → A. $i^9 + i^{21}$

B. $6i\left(-\frac{5}{6}i\right)$

2- $\sqrt{5} + 3i$ का मापांक ज्ञात कीजिए

3- ध्रुवीय रूप में बदलिए → $\sqrt{3} + i$

4- $x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$ को हल कीजिए

5- $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -2 + i$ तो मान ज्ञात कीजिए

संक्षिप्त लेख (नोट्स) प्रस्तुतकर्ता की कलम से —

प्रस्तुत अध्ययन सामग्री जिलाधिकारी, पिथौरागढ़ महोदय एवं माध्यमिक शिक्षा विभाग पिथौरागढ़ के उच्चाधिकारियों के आदेश के अनुपालन में उन विद्यार्थियों को केंद्र में रखकर तैयार की गई है, जो शिक्षक की अनुपस्थिति एवं अन्य संसाधनों की अनुपलब्धता के बावजूद गणित जैसे तार्किक विषय को स्वयं के बल पर सीखने एवं सफलता प्राप्त करने का जज्बा अपने दिल में संजोये हैं। अतः इन बच्चों को केन्द्र में रखकर प्रयास किया गया है कि तथ्यों को पूर्व ज्ञान से जोड़ते हुए सरल एवं सुगम रूप में प्रस्तुत किया जाय। पाठ से सम्बंधित सभी मूलभूत तथ्य सरल साधित उदाहरण के साथ प्रस्तुत किए गए हैं ताकि विद्यार्थी मूलभूत अवधारणाओं (Basic concepts) को बेहतर ढंग से समझ कर सरल से कठिन की ओर स्वयं जा सके। आशा एवं पूर्ण विश्वास है कि विद्यार्थी इससे लाभान्वित हो सकेंगे। अध्ययन सामग्री में मौजूद कमियों हेतु क्षमाप्रार्थी हूँ।

यह पावन सुअवसर प्रदान करने हेतु निम्न महोदयान का हृदय से आभार।

1- श्री सी० रविशंकर, जिलाधिकारी पिथौरागढ़
2- श्री अशोक कुमार पंत, प्रधानाचार्य, एस० डी० एस० रा० इ० का० पिथौरागढ़
3- श्री मनमोहन कर्नाटक, प्रधानाचार्य, रा० इ० का० गुरना
4- श्री कौस्तुभ चन्द्र जोशी, प्रधानाचार्य, रा० इ० का० पत्थरखानी
5- श्री भरत सिंह ज्याला, प्रवक्ता, के० एन० यू० रा० इ० का० पिथौरागढ़