d{kk 11

f}in izes;

किसी धन पूर्णांक n के लिए द्विपद प्रमेय और उसका सत्यापन–

$(a+b)^n = {}^nc_0a^n + {}^nc_1a^{n-1}b + {}^nc_2a^{n-2}b^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + {}^nc_{n-1}ab^{n-1} + {}^nc_nb^n$

miifRr– इस प्रमेय की उपपत्ति गणितीय आगमन सिद्धांत द्वारा करते हैं।

माना कथन P(n) इस प्रकार है:

P(n): $(a+b)^n = {}^nc_0a^n + {}^nc_1a^{n-1}b + {}^nc_2a^{n-2}b^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + {}^nc_{n-1}ab^{n-1} + {}^nc_nb^n$

n=1 लेने पर

$P(1): (a+b)^1 = {}^1c_0a^1 + {}^1c_1a^0b$

$a+b = 1xa+1x1xb \quad [1c_0=1, {}^1c_1=1, a^0=1]$

$a+b=a+b$

:. कथन P(n),n=1 के लिए सत्य है।

माना कथन P(n),n=k के लिए भी सत्य है।

P(k): $(a+b)^k = {}^kc_0a^k + {}^kc_1a^{k-1}b + {}^kc_2a^{k-2}b^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + {}^kc_{k-1}ab^{k-1} + {}^kc_kb^k$ ----(1)

हम सिद्ध करेंगे कि कथन P(k+1) भी सत्य है अर्थात्

P(k+1): $(a+b)^{k+1} = {}^{k+1}c_0a^{k+1} + {}^{k+1}c_1a^kb + {}^{k+1}c_2a^{k-1}b^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + {}^{k+1}c_kab^k + {}^{k+1}c_{k+1}b^{k+1}$

$(a+b)^{k+1} = (a+b)\,(a+b)^k$

$= (a+b)({}^kc_0a^k + {}^kc_1a^{k-1}b + {}^kc_2a^{k-2}b^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + {}^kc_{k-1}ab^{k-1} + {}^kc_kb^k)$

[समीकरण (1) से $(a+b)^k$ का मान रखने पर]

$= a({}^kc_0a^k + {}^kc_1a^{k-1}b + {}^kc_2a^{k-2}b^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + {}^kc_{k-1}ab^{k-1} + {}^kc_kb^k)$
$+ b({}^kc_0a^k + {}^kc_1a^{k-1}b + {}^kc_2a^{k-2}b^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + {}^kc_{k-1}ab^{k-1} + {}^kc_kb^k)$

$= {}^kc_0a^{k+1} + \underline{{}^kc_1a^kb} + \underline{\underline{{}^kc_2a^{k-1}b^2}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + {}^kc_{k-1}a^2b^{k-1} + \underline{{}^kc_kab^k}$

$+ \underline{{}^kc_0a^kb} + \underline{\underline{{}^kc_1a^{k-1}b^2}} + {}^kc_2a^{k-2}b^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ \underline{{}^kc_{k-1}ab^k} + {}^kc_kb^{k+1}$

समान पदों को एक साथ लिखकर उभयनिष्ट लेने पर

$= {}^kc_0a^{k+1}+({}^kc_1+{}^kc_0)\,a^kb+({}^kc_2+{}^kc_1)\,a^{k-1}b^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+({}^kc_k+{}^kc_{k-1})\quad ab^k+{}^kc_kb^{k+1}$

$$\left\{\begin{array}{ll} {}^kc_0={}^{k+1}c_0=1, & {}^kc_k={}^{k+1}c_{k+1}=1 \\ {}^kc_k+{}^kc_{k-1}={}^{k+1}c_k, & {}^kc_1+{}^kc_0={}^{k+1}c_1 \end{array}\right\}$$

$= {}^{k+1}c_0a^{k+1}+{}^{k+1}c_1a^kb+{}^{k+1}c_2a^{k-1}b^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+{}^{k+1}c_kab^k+{}^{k+1}c_{k+1}b^{k+1}$

अतः यदि कथन $P(k)$ सत्य है तो कथन $P(k+1)$ भी सत्य है। इसलिए, गणितीय आगमन सिंद्धान्त द्वारा प्रत्येक धन पूर्णांक n के लिए कथन $P(n)$ सत्य है।

द्विपद प्रमेय को इस प्रकार भी लिख सकते है–

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

1– द्विपद प्रमेय में आने वाले गुणांक ${}^nc_r$ को द्विपद गुणांक कहते है।

2– $(a+b)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या $(n+1)$ है।

i: u– द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके $(96)^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

gy– $(96)^3=(100-4)^3=[100+(-4)]^3$

$(a+b)^n$ से तुलना करने पर

$a=100,\quad b=-4,\quad n=3$

$= {}^3c_0100^3+{}^3c_1100^2(-4)^1+{}^3c_2100^1(-4)^2+{}^3c_3(-4)^3$

(द्विपद प्रमेय से)

$= \frac{3!}{0!3!}x1000000+\frac{3!}{1!2!}x10000x(-4)+\frac{3!}{2!1!}x100x16+\frac{3!}{3!0!}x(-64)$

$= \frac{1}{1}x1000000+\frac{3x2!}{1x2!}x(-40000)+\frac{3x2!}{2!1}x1600+1x(-64)\qquad (0!=1)$

$= 1000000-120000+4800-64$

$= 1000000+4800-120000-64$

$=1004800-120064$

$=884736$

$\therefore (96)^3=884736$

f}in ize; d foLrkj e O;kid in

$(a+b)^n$ के प्रसार में (r+1) वॉ पद द्विपद प्रमेय का व्यापक पद कहलाता है। इसे T_{r+1} द्वारा लिखते हैं।

$\therefore T_{r+1} = {}^nc_r a^{n-r} b^r$

f}in ize; d izlkj e e/; in

1– यदि n सम संख्या है तो $(a+b)^n$ के प्रसार में $(\frac{n}{2}+1)$वॉ पद मध्य पद होगा।

उदाहरण– $(x+2y)^8$ के प्रसार में मध्य पद = $(\frac{8}{2}+1)$वॉ पद = 5वॉ पद है।

2– यदि n विषम संख्या है तो $(a+b)^n$ के प्रसार में $(\frac{n+1}{2})$वॉ पद और $(\frac{n+3}{2})$ वॉ पद दो मध्य पद होंगे।

उदाहरण $(x+2y)^7$ के प्रसार में दो मध्य पद $(\frac{7+1}{2})$वॉ पद औंर $(\frac{7+3}{2})$वॉ पद अर्थात् 4वॉ पद और 5वॉ पद होंगे।

i u–: $(x^2-y)^6$ के प्रसार में व्यापक पद लिखिए।

gy– $(x^2-y)^6 = [x^2+(-y)]^6$

$(a+b)^n$ से तुलना करने पर

$a=x^2$, $b=-y$, $n=6$

व्यापक पद $(T_{r+1}) = {}^nc_r a^{n-r} b^r$

a, b तथा n के मान रखने पर

$$T_{r+1} = {}^6c_r (x^2)^{6-r} (-y)^r$$
$$= {}^6c_r x^{12-2r} (-1)^r y^r$$
$$= (-1)^r \; {}^6c_r x^{12-2r} y^r$$

i: u–: $(3-\frac{x^3}{6})^8$ के प्रसार में मध्य पद ज्ञात कीजिए।

gy– $(3-\frac{x^3}{6})^8=[3+(-\frac{x^3}{6})]^8$

$(a+b)^n$ से तुलना करने पर

$a=3,\ b=-\frac{x^3}{6},\ n=8 \Longrightarrow$ सम संख्या है।

$\therefore$ मध्य पद $=(\frac{n}{2}+1)$वॉ पद $= (\frac{8}{2}+1)$वॉ पद $= 5$वॉ पद।

व्यापक पद $(T_{r+1})= {}^nc_r a^{n-r} b^r$ में a, b ,n तथा r के मान रखने पर–

$T_{4+1}= T_5= {}^8c_4\ 3^{8-4} (-\frac{x^3}{6})^4$

$= \frac{8!}{4!(8-4)!} x\ 3^4 x\ (-\frac{x^{12}}{6^4})$

$= \frac{8x7x6x5x4!}{4!x4x3x2x1} x\ 3x3x3x3\ x\ (-\frac{x^{12}}{6x6x6x6})$

$= \frac{7x5x(-x^{12})}{2x2x2}$

$= -\frac{35x^{12}}{8}$

ijh{kk dh nf'V ls egRoiw.kZ iz'u&

1– $(1-2x)^5$ का प्रसार ज्ञात कीजिए।

2– द्विपद प्रमेय का प्रयोग करते हुए बताईये कि कौन सी संख्या बड़ी है $(1.1)^{10000}$ या 1000।

3– $(x-2y)^{12}$ के प्रसार में चौथा पद ज्ञात कीजिए।

4– यदि $(x+1)^n$ के प्रसार में (r-1)वॉ, r वॉ और (r+1)वॉ पदो के गुणांकों में 1:3:5 का अनुपात हों तो n तथा r का मान ज्ञात कीजिए।

5– $(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3x})^6$ के प्रसार में x से स्वतन्त्र पद ज्ञात कीजिए।

6– यदि $(3+ax)^9$ के प्रसार में x^2 तथा x^3 के गुणांक समान हों तो a का मान ज्ञात कीजिए।

7– $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^6$ का मान ज्ञात कीजिए।

8– $(x+3)^8$ के प्रसार में x^5 का गुणांक ज्ञात कीजिए।