अनुक्रम तथा श्रेणी (Sequence and Series)

vuØe– संख्याओं का वह समुच्चय जिसके अवयवों को किसी नियम के अन्तर्गत एक निश्चित क्रम में रखा गया हो,एक अनुक्रम (Sequence)कहलाता है।

उदाहरण–संख्याऐं 1,3,5,7........एक अनुक्रम बनाती है।

अनुक्रम का nवॉ पद $a_n=2n-1$, जहॉ n एक प्राकृत संख्या है।इसे अनुक्रम का व्यापक पद भी कहते है।

अनुक्रम के पदों को $a_1,a_2,a_3......a_n$..से निरूपित करते है।

प्रत्येक पद के साथ लगी संख्या जिसे पदांक कहते है,उसका स्थान बताती है।

अनुक्रम के प्रकार–अनुक्रम दो प्रकार के होते है।

1–परिमित अनुक्रम

2–अपरिमित अनुक्रम

परिमित अनुक्रम–वे अनुक्रम जिनमें पदों की संख्या सीमित होती है उसे परिमित अनुक्रम कहते है।

उदाहरण– जैसे संख्या 5,10,15,20,25

अपरिमित अनुक्रम–वे अनुक्रम जिनमें पदों की संख्या सीमित नही होती है, अपरिमित अनुक्रम कहलाते है।

उदाहरण–जैसे 2,4,6,8,.......

Fibonacci अनुक्रम–

यदि $a_1=a_2=1$

$a_3=a_1+a_2$

$a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$, $n>2$

इस अनुक्रम को Fibonacci अनुक्रम कहते है।

J.kh¼Series)–यदि $a_1,a_2,a_3......a_n$अनुक्रम है, तो व्यंजक $a_1+a_2+a_3+.....+a_n$संबंधित अनुक्रम से बनी श्रेणी कहलाती है।

श्रेणी परिमित अथवा अपरिमित होगी,यदि अनुक्रम क्रमशःपरिमित अथवा अपरिमित है।

श्रेणी $a_1+a_2+a_3+.....+a_n$ को संक्षेप रूप में $\sum_{k=1}^{n} a_k$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=a_1+a_2+a_3+.....+a_n$$

उदाहरण–यदि $a_n=n(n+2)$,तो अनुक्रम के प्रथम तीन पद लिखिए।

n=1,2,3 रखने पर

$a_1=1(1+2)=1.3=3$

$a_2=2(2+2)=2.4=8$

$a_3=3(3+2)=3.5=15$

lekUrj J.kh¼Arithematic Progression½ एक अनुक्रम $a_1,a_2,a_3......a_n$ को समांतर श्रेणी कहते है यदि

$$a_{n+1}=a_n+d\ ,\quad n\in N$$

a_1को प्रथम पद तथा अचर पद d को समांतर श्रेणी का सार्वअंतर कहते है।

समांतर श्रेणी जिसका प्रथम पद a ,सार्वअंतर d है अर्थात्

a,a+d,a+2d……..

समांतर श्रेणी का nवॉ पद (व्यापक पद)

$$a_n=a+(n-1)d$$

lekrj J.kh dh fo'k'krk,&

1-यदि समांतर श्रेणी के प्रत्येक पद में एक अचर जोड़ा जाए,तो इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम भी समांतर श्रेणी होता है।

2-यदि किसी समांतर श्रेणी के प्रत्येक पद में से एक अचर घटाया जाए तो ,इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम भी समांतर श्रेणी होता है।

3-यदि किसी समांतर श्रेणी के प्रत्येक पद में एक अचर से गुणा किया जाए तो ,इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम भी समांतर श्रेणी होता है।

4-यदि किसी समांतर श्रेणी के प्रत्येक पद को एक अशून्य अचर से भाग किया जाय तो इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम भी एक समांतर श्रेणी होगा।

lekrj J.kh dk fy, lwdr&

a=प्रथम पद

l=अंतिम पद

d= सार्वअंतर

n= पदों की संख्या

S_n= समांतर श्रेणी के n पदों का योगफल

यदि a,a+d,a+2d,…..+,a+(n-1)d एक समांतर श्रेणी है तो

$$l=a+(n-1)d$$

$$S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)]d$$

$$S_n=\frac{n(a+l)}{2}$$

iz'u–उस समांतर श्रेणी के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए जिसका k वॉ पद 5k+1 है।

lekrj ek/;¼ Arithematic Mean)–यदि दो प्रदत्त संख्याएं a तथा b के बीच एक संख्या A इस प्रकार है ताकि a, A, b समांतर श्रेणी में हो ,तो संख्या A को a और b का समांतर माध्य कहते है।

a, A, b समांतर श्रेणी में है।

$$A- a= b- A$$

$$2A= a + b$$

$$A=\frac{(a+b)}{2}$$

किन्ही दो संख्याओं a तथा b के बीच कितनी भी संख्याओं को रखकर समांतर श्रेणी A.P. में परिणित किया जा सकता है।

माना $A_1, A_2, A_3……..A_n$,a तथा b के मध्य संख्याऐं इस प्रकार है कि a, $A_1, A_2, A_3……..A_n$,b समांतर श्रेणी में है।

अतः b ,समांतर श्रेणी का (n + 2)वॉ पद होगा।

माना d=सार्वअंतर

अतः $b=a+(n+2-1)d$

$$b=a+(n+1)d$$

$$b-a=(n+1)d$$

$$d=\frac{(b-a)}{n+1}$$

a तथा b के मध्य n संख्याऐं निम्नवत् होंगी–

$A_1 = a+d = a+\frac{(b-a)}{n+1}$

$A_2 = a+2d = a+\frac{2(b-a)}{n+1}$

$A_3 = a+3d = a+\frac{3(b-a)}{n+1}$

…. …. ……

…. …. ……

$\mathbf{A_n} = a+nd = a+\frac{n(b-a)}{n+1}$

i'u& 5 और 26 के बीच 5 संख्याऐं डालिए ताकि प्राप्त अनुक्रम समांतर श्रेणी बन जाए।

i u& 3 तथा 19 के मध्य समांतर माध्य पद ज्ञात कीजिए।

x.kksRrj Js.kh¼ Geometric Progression G.P.½

किसी अनुक्रम को गुणोत्तर श्रेणी कहते है ,यदि कोई पद पिछले पद से एक अचर अनुपात मे बढ़ता है। इस अचर गुणांक को सार्वअनुपात कहते है।

अनुक्रम $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n$ को गुणोत्तर श्रेणी कहा जाता है यदि प्रत्येक पद अशून्य हो तथा

$a_{k+1}/a_k = r$ (अचर), $r \geq 1$ के लिए।

यदि $a_1 = a$ तो गुणोत्तर श्रेणी $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots\ldots$

जहॉ a प्रथम पद , r गुणोत्तर श्रेणी का सार्व अनुपात कहते है।

x.kksRrj Js.kh dk 0;kid in¼ General term of a G.P.½

यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद a, सार्व अनुपात r है तो

दूसरा पद $a_2 = ar = ar^{2-1}$

तीसरा पद $a_3 = ar^2 = ar^{3-1}$

चतुर्थ पद $a_4 = ar^3 = ar^{4-1}$

….. ………. ………

….. ………. ………

गुणोत्तर श्रेणी का **n** वॉ पद $a_n = ar^{n-1}$

i u& गुणोत्तर श्रेणी 5/2, 5/4, 5/8…….का 20 वॉ तथा **n**वॉ पद ज्ञात कीजिए।

i u& **x** के किस मान के लिए संख्याऐं -2/7, x, -7/2 गुणोत्तर श्रेणी में है।

xq.kkRrj Js.kh ds n inksa dk ;ksxQy¼**Sum to n terms of a G.P.**½

माना गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद a तथा सार्व अनुपात r है।
गुणोत्तर श्रेणी के **n** पदों का योगफल

$S_n = a+ar+ar^2+ar^3+\ldots\ldots +ar^{n-1}$ ----(1)

fLFkfr&1 यदि r = 1 तो

$S_n = a+a+a+a+\ldots\ldots +a$ (**n** पदों तक)

$S_n = \mathbf{n.a}$

fLFkfr&2 यदि यदि $r \neq 1$ तो समीकरण (1)को rसे गुणा करने पर

$r.S_n = ar+ar^2+ar^3+ar^4+\ldots\ldots +ar^n$ -------(2)

समीकरण (1)–(2)

$S_n - r.S_n = a - ar^n$

$S_n(1-r) = a(1-r^n)$

$S_n = a(1-r^n)/(1-r)$

$S_n = a(r^n-1)/r-1$

xq.kkRrj ek/;¼**Geometric Mean G.M.**½

दो धनात्मक संख्याओं a तथा b का गुणोत्तर माध्य= $\sqrt{ab}$
यदि दो धनात्मक संख्याओं a तथा b दी गई हो तो उनके बीच इच्छित संख्याऐं रखी जा सकती है ताकि प्राप्त अनुक्रम एक गुणोत्तर श्रेणी बन जाएॅ।
माना a तथा b के बीच **n** संख्याऐं $G_1, G_2, G_3, \ldots.. G_n$ इस प्रकार है कि $a, G_1, G_2, G_3, \ldots.. G_n, b$ गुणोत्तर श्रेणी है।
अतः b गुणोत्तर श्रेणी का (n + 2)वॉ पद होगाा।

$b = ar^{n+1}$

या

$r^{n+1} = b/a$

$r = (b/a)^{1/n+1}$

अतः

$G_1 = ar = a(b/a)^{1/n+1}$

$G_2 = ar^2 = a(b/a)^{2/n+1}$

$G_3 = ar^3 = a(b/a)^{3/n+1}$

.. …. …..

.. …. …..

$G_n = a\,r^n = a(b/a)^{n/n+1}$

iz u&,sसी दो संख्याऐं ज्ञात कीजिए जिनको 3 तथा 81 के बीच रखने पर प्राप्त अनुक्रम एक गुणोत्तर श्रेणी बन जाय।

lekrj rFkk x.kkRrj ek/; d chp lc/k¼Relationship between A.M.and G.M.)

माना Aतथा Gदी गई दो धनात्मक वास्तविक संख्याओं a तथा b के बीच क्रमशः समांतर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य है।तो

$A=(a+b)/2$

$G=\sqrt{ab}$

$A-G=(a+b)/2-\sqrt{ab}$

$A-G=\dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$

$A-G=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2/2\geq 0$

$A\geq G$

A.M ≥G.M.

fo k'k vuØek d ink dk ;kxQy¼ **Sum to n terms of special series**½&

1–प्रथम **n** प्राकृत संख्याओं का योग–

$$S_n=1+2+3+\ldots\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

2–प्रथम **n** प्राकृत संख्याओं के वर्गो का योग–

$$S_n=1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3–प्रथम **n** प्राकृत संख्याओं के घनों का योग–

$$S_n=1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots+n^3=\frac{n(n+1)^2}{4}$$

i u–श्रेणी के **n** पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

$1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+\ldots\ldots$

हल–माना श्रेणी के **n** पदों का योग S_n है तो –

$S_n=1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+\ldots\ldots+$ n पदों तक

दी गई श्रेणी का **n** वॉ पद

=(1,2,3,4,….का **n** वॉ पद)×(2,3,4,5….का **n** वॉ पद)

$=(1+(n-1)1)(2+(n-1)1)$

श्रेणी का **n** वॉ पद $=n(n+1)$

$S_n=\sum_{n=1}^{n} n(n+1)$

$S_n=\sum n^2+\sum n$

$S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$

$S_n=\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3}+1\right)$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+4}{3}\right)$$

$$S_n = \frac{2n(n+1)}{2}\left(\frac{n+2}{3}\right)$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

%%i ukoyh%%

1–यदि $a_n = (-1)^{n-1} 5^{n+1}$ तो प्रथम पॉच पद ज्ञात कीजिए।

2–दो समांतर श्रेणियों के **n** पदों का अनुपात 5n+4:9n+6 हो ,तो उनके 18 वें पदों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

3–उस गुणोत्तर श्रेणी का 12 वॉ पद ज्ञात कीजिए जिसका 8वॉ पद 192 तथा सार्व अनुपात 2 है।

4–श्रेणी के **n** पदों का योग ज्ञात कीजिए–

$$1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\ldots\ldots\ldots$$