सम्बन्ध एंव फलन

(Relation and Function)

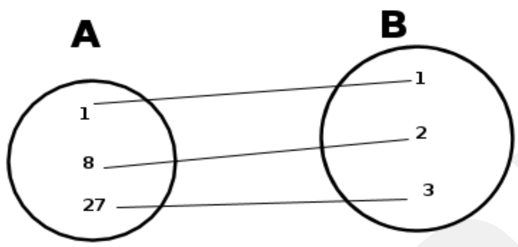
सम्बन्ध(Relation)

समुच्चय A से समुच्चय B में कोई सम्बन्ध $R = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$, A X B का उपसमुच्चय होता है। अर्थात् $R \subseteq (A \times B)$. जैसे– $A=\{1,8,27\}$, $B = \{1,2,3\}$

$$\Rightarrow AXB = \{(1,1), (1,2), (1,3), (8,1), (8,2), (8,3), (27,1), (27,2), (27,3)\}$$

यदि क्रमित युग्म $(x, y) \in R$ में $x = y^3$ अर्थात् (प्रथम अवयव) = (द्वितीय अवयव)^3

तो $R = \{(1,1), (8,2), (27,3)\}$, अतः स्पष्ट है कि $R \subseteq (A \times B)$.



सम्बन्ध का डोमेन(Domain of a Relation): यदि $R \subseteq (A \times B)$ तो R के क्रमित युग्मों के सभी प्रथम अवयवों का समुच्चय डोमेन या Dom(R) कहलाता हैं। अर्थात् $Dom(R) = \{x: x \in A \text{ and } (x, y) \in R\}$.

सम्बन्ध का परिसर(Range of a Relation): यदि $R \subseteq (A \times B)$ तो R के क्रमित युग्मों के सभी द्वितीय अवयवों का समुच्चय परिसर या Range(R) कहलाता हैं। अर्थात् $Dom(R) = \{y: y \in B \text{ and } (x, y) \in R\}$.

प्रतिलोम फलन (Inverse Relation): यदि समुच्चय A से समुच्चय B में कोई सम्बन्ध R है, तो R का प्रतिलोम सम्बन्ध वह सम्बन्ध है जो R के प्रत्येक क्रमित युग्म के अवयवों परस्पर बदल देने से प्राप्त होता है। इसे R^{-1} से निरुपित करते है। अतः $R^{-1} = R = \{(y, x) : y \in B, x \in A\}$.

सम्बन्धों के प्रकार (Types of Relations)

रिक्त सम्बन्ध (Relation): यदि समुच्चय A के लिये $\phi \subset A \times A$ जहाँ $\phi: A \to A$ सम्बन्ध है, इस सम्बन्ध को रिक्त सम्बन्ध कहते है।

सार्वत्रिक या समष्टीय सम्बन्ध (Universal Relation): यदि समुच्चय A का प्रत्येक अवयव A के सभी अवयवों से सम्बन्ध R के द्वारा सम्बन्धित है, तो R सम्बन्ध को सार्वत्रिक सम्बन्ध कहते है। अर्थात् $R = A \times A \subseteq A \times A$ अतः समुच्चय A में सम्बन्ध R सार्वत्रिक सम्बन्ध है यदि $R = A \times A$.

तत्समक सम्बन्ध (Identity Relation): यदि समुच्चय A में सम्बन्ध R इस प्रकार हो कि प्रत्येक $x,y \in A$ के लिये, $x R y$ यदि $x = y$ अर्थात् $(x, y) \in R \Rightarrow x = y$ तो R सम्बन्ध को तत्समक सम्बन्ध कहते है। समुच्चय A में इस सम्बन्ध को I_A से निरुपित करते है।

द्विआधारी सम्बन्ध (Binary Relation): समुच्चय A के सम्बन्ध R को युग्मों के रुप में निरुपित करते है। युग्मों के रुप में प्राप्त सम्बन्ध R को द्विआधारी सम्बन्ध कहते है।

द्विआधारी सम्बन्ध के प्रकार (Types of Binary Relations)

1–स्वतुल्य सम्बन्ध (Reflexive Relation): किसी समुच्चय A में सम्बन्ध R स्वतुल्य सम्बन्ध कहलाता है, यदि और केवल यदि $(x, y) \in R\ \forall x \in A$, i.e, $x R x, \forall x \in A$. जैसे– $x R y$ यदि $x \parallel y$ स्वतुल्य सम्बन्ध है।

2–सममित सम्बन्ध (Symmetric Relation): किसी समुच्चय A में सम्बन्ध R सममित सम्बन्ध कहलाता है, यदि A के किन्ही दो अवयवो x और y के लिये $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$; i.e, $xRy \Rightarrow yRx$; $\forall x, y \in A$

3–संक्रमक सम्बन्ध (Transitive Relation): किसी समुच्चय A में सम्बन्ध R संक्रमक सम्बन्ध कहलाता है, यदि और केवल यदि $(x, y) \in R$ तथा $(y, z) \in R \Rightarrow (z, x) \in R$; $\forall x, y, z \in A$.

i.e, xRy and $yRz \Rightarrow zRx$; $\forall x, y, z \in A$

4–तुल्यता सम्बन्ध (Equivalence Relation): किसी समुच्चय A में सम्बन्ध R तुल्यता सम्बन्ध कहलाता है, यदि और केवल यदि R स्वतुल्य, सममित तथा संक्रमक तीनों हों।

तुल्यता वर्ग (Equivalence Class): माना किसी अरिक्त समुच्चय A में सम्बन्ध R तुल्यता सम्बन्ध है। A का कोई a अवयव है। A का ऐसा उपसमुच्चय जिसके सभी अवयव x, a के साथ R सम्बन्ध बनाता है अर्थात् $(x, a) \in R$, अवयव a का तुल्यता वर्ग कहलाता है। इसे [a] से निरुपित करते है।

तुल्यता वर्ग के गुण (Properties of Equivalence Class):

(i) $a \in [a]$

(ii) यदि $b \in [a]$, तो $[b] = [a]$

(iii) $[a] = [b]$ यदि और केवल यदि $(a, b) \in R$

(iv) या तो $[a] = [b]$ या $[a] \cap [b] = \phi$

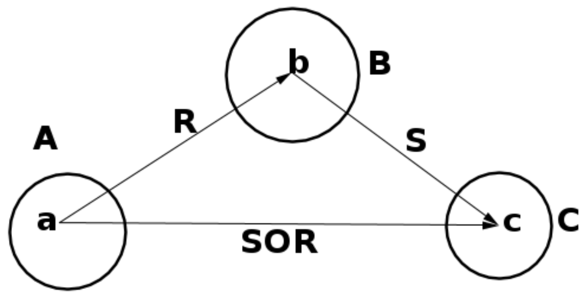
समुच्चय का बिभाजन (Partition of a Set): किसी अरिक्त समुच्चय A के बिभाजन का अर्थ है कि A के एसे उपसमुच्चय प्राप्त करना, जो कि असंयुक्त तथा अरिक्त हों। अर्थात् A का बिभाजन A के असंयुक्त तथा अरिक्त समुच्चयों $\{A_i\}$ का संग्रह इस प्रकार है कि –

(i) प्रत्येक $a \in A$ किसी A_i विद्यमान है।

(ii) $A_i \neq A_j$ तो $A_i \cap A_j = \phi$

दो सम्बन्धों का संयोजन (Composition of Two Relatios): यदि किन्ही अरिक्त समुच्चय A से B में सम्बन्ध R और समुच्चय B से C में सम्बन्ध S है। दोनों सम्बन्धों का संयोजन SoR, A से C में एक सम्बन्ध है कि

SoR = {(a, c) : $b \in B$ एक ऐसा अवयव है कि aRb तथा bSc; जहाँ $a \in A$ तथा $c \in C$}.



उदाहरण (Example):

उदाहरण 1– यदि पूर्णांको के समुच्चय Z में सम्बन्ध R = {(x, y): x – y = एक सम पूर्णांक है} से परिभाषित है तो सिद्व किजिये कि एक तुल्यता सम्बन्ध हैं।

हलः (i) x – x = 0, एक सम पूर्णांक हैं। $\forall x \in Z$: अतः R स्वतुल्य है।

(ii) $(x, y) \in R \Rightarrow x - y$ = एक सम पूर्णांक है।

$\Rightarrow -(x - y)$ = एक सम पूर्णांक है।

$\Rightarrow (y - x)$ = एक सम पूर्णांक है।

$\Rightarrow y - x$ = एक सम पूर्णांक है।

$\Rightarrow (y, x) \in R; \ \forall x, y \in Z$

अतः R सममित है।

(iii) $(x, y) \in R, (y, z) \in R, \Rightarrow x - y$ = सम पूर्णांक, $y - z$ = सम पूर्णांक

$\Rightarrow x - y + y - z$ = सम पूर्णांक

$\Rightarrow (x - z)$ = सम पूर्णांक

$\Rightarrow (x - z)$ = सम पूर्णांक

$\Rightarrow (x, z) \in R; \ \forall x, y, z \in Z$

अतः R संक्रमक है। अतः समुच्चय Z में सम्बन्ध R = {(x, y): x – y = एक सम पूर्णांक है}, एक तुल्यता सम्बन्ध है।

उदाहरण 2– यदि R = {(4, 5), (1, 4), (4, 6), (7, 6), (3, 7)} हो, तो–

(i) RoR (ii) $R^{-1}oR$ (ii) $R^{-1}oR^{-1}$

हलः (i) $(1, 4) \in R, \ (4, 5) \in R \Rightarrow (1, 5) \Rightarrow RoR,$

$(1, 4) \in R, \ (4, 6) \in R \Rightarrow (1, 6) \Rightarrow RoR,$

$(3, 7) \in R, \ (7, 6) \in R \Rightarrow (3, 6) \Rightarrow RoR$

अतः RoR = { (1, 5), (1, 6), (3, 6) }

(ii) $R^{-1} = \{(5, 4), (4, 1), (6, 4), (6, 7), (7, 3)\}$

अब $(4, 5) \in R, \ (5, 4) \in R^{-1} \Rightarrow (4, 4) \in R^{-1}oR,$

$(1, 4) \in R, \ (4, 1) \in R^{-1} \Rightarrow (1, 1) \in R^{-1}oR,$

$(4, 6) \in R, \ (6, 4) \in R^{-1} \Rightarrow (4, 4) \in R^{-1}oR,$

$(7, 6) \in R$, $(6, 4) \in R^{-1} \Rightarrow (7, 4) \in R^{-1}oR$,

$(7, 6) \in R$, $(6, 7) \in R^{-1} \Rightarrow (7, 7) \in R^{-1}oR$,

$(3, 7) \in R$, $(7, 3) \in R^{-1} \Rightarrow (3, 3) \in R^{-1}oR$,

तथा $(4, 6) \in R$, $(6, 7) \in R^{-1} \Rightarrow (4, 7) \in R^{-1}oR$

अतः $R^{-1}oR = \{(1, 1), (3, 3), (4, 4), (4, 7), (7, 4), (7, 7)\}$

(iii) $R^{-1} = \{(5, 4), (4, 1), (6, 4), (6, 7), (7, 3)\}$

अब $(5, 4) \in R^{-1}$, $(4, 1) \in R^{-1} \Rightarrow (5, 1) \in R^{-1}oR^{-1}$,

$(6, 4) \in R^{-1}$, $(4, 1) \in R^{-1} \Rightarrow (6, 1) \in R^{-1}oR^{-1}$,

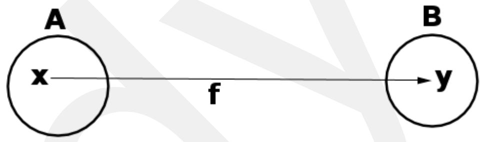
तथा $(6, 7) \in R^{-1}$, $(7, 3) \in R^{-1} \Rightarrow (6, 3) \in R^{-1}oR^{-1}$

अतः $R^{-1}oR^{-1} = \{(5, 1), (6, 1), (6, 3)\}$.

फलन (Functions)

वह नियम जिसके द्वारा एक अरिक्त समुच्चय के प्रत्येक अवयव का दूसरे अरिक्त समुच्चय के अद्वितीय अवयव से सम्बन्ध स्थापित किया जा सके, फलन या प्रतिचित्रण कहते है।

किन्ही अरिक्त समुच्चय A से B में फलन f को प्रतीकात्मक रुप में $f: A \to B$ लिखते है। $x \in A$, $y \in B$ समुच्चय में फलन f के अर्न्तगत $y = f(x)$ से प्रदर्शित किया जाता है। जहॉ y को x का प्रतिबिम्ब तथा x को y का पूर्व–प्रतिबिम्ब कहते है।

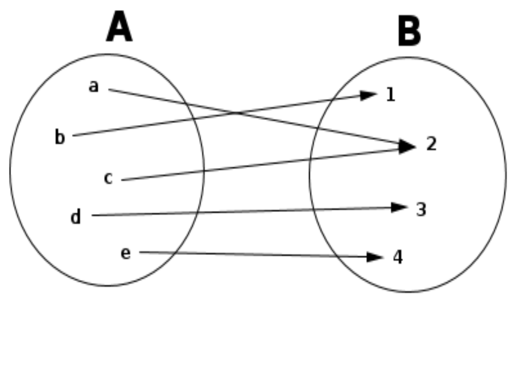


डोमेन, सहडोमेन तथा परिसर (Domain, Co-domain and Range): फलन $f: A \to B$ के समुच्चय A, f का डोमेन तथा समुच्चय B, f का सहडोमेन कहलाता है। समुच्चय B के उन अवयवों का समुच्चय जो A के अवयवों का प्रतिबिम्ब है, f का परिसर f[A] कहलाता है।

फलनों का प्रकार (Types of Functions)

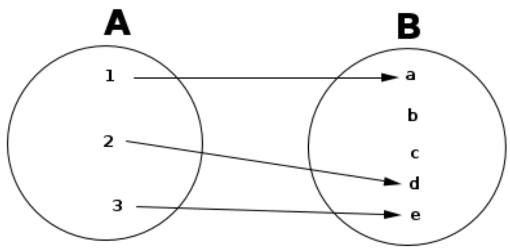
(i) आच्छादक फलन (Onto Mapping): यदि फलन f के सहडोमेन का प्रत्येक अवयव डोमेन के किसी न किसी अवयव का प्रतिबिम्ब हों, तो ऐसे फलन को आच्छादक फलन कहते है।

प्रतीकात्मक रुप में $f: A \to B$ आच्छादक होगा यदि $f(A) = B$.



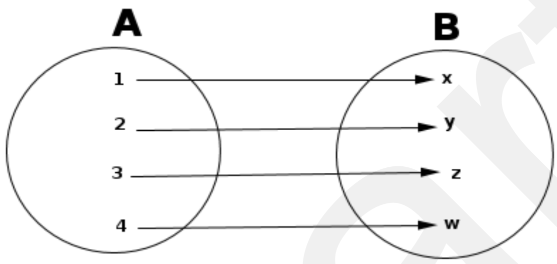
(ii)अन्तःक्षेपी फलन (Into Mapping): यदि फलन f के सहडोमेन में एक या एक से अधिक अवयव ऐसे है जो डोमेन के किसी भी अवयव के प्रतिबिम्ब नही है, तो ऐसे फलन को अन्तःक्षेपी फलन कहते है।

प्रतीकात्मक रुप में $f: A \to B$ अन्तःक्षेपी होगा यदि $f(A) \subset B$.



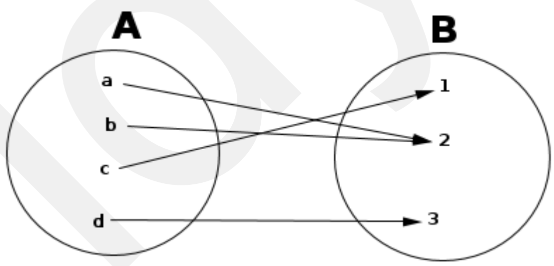
(iii) एकैकी फलन (One-One Mapping): यदि फलन में डोमेन के भिन्न–भिन्न अवयवों के प्रतिबिम्ब सदैव भिन्न–भिन्न है, तो ऐसे फलन को एकैकी फलन कहते है।

प्रतीकात्मक रुप में $f: A \to B$ एकैकी होगा यदि $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.



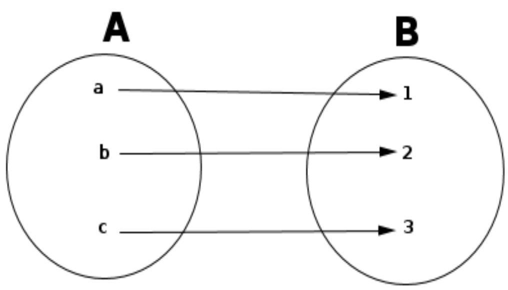
(iv) बहु–एक फलन (Many-One Mapping): यदि फलन f में डोमेन के दो या दो से अधिक अवयवों के प्रतिबिम्ब एक ही अवयव हों, तो ऐसे फलन को बहु–एक फलन कहते है।

प्रतीकात्मक रुप में, $f: A \to B$, बहु–एक है, **तो** $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$.



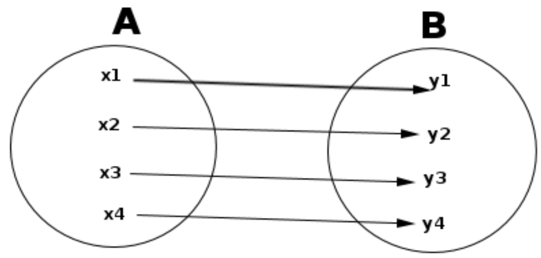
(v) एकैकी अन्तःक्षेपी फलन (One-One Into Mapping): यदि फलन f अन्तःक्षेपी भी है और एकैकी भी हो, उसे एकैकी अन्तःक्षेपी फलन कहते है।

प्रतीकात्मक रुप में, $f: A \to B$, एकैकी अन्तःक्षेपी फलन होगा, यदि $f(A) \subset B$ तथा $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.



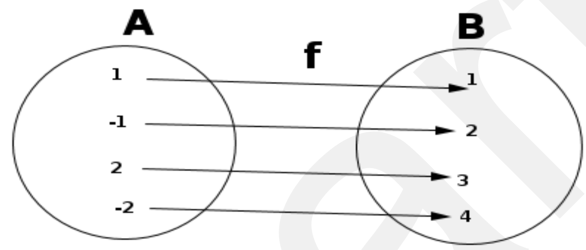
(vi) एकैकी आच्छादक फलन (One-One Onto Mapping): यदि फलन f एकैकी भी है और आच्छादक भी हो, उसे एकैकी आच्छादक फलन कहते है।

प्रतीकात्मक रुप में, $f: A \to B$, एकैकी आच्छादक फलन होगा, यदि $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ तथा $f(A) = B$.



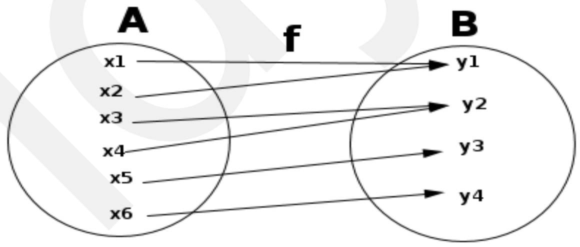
(vii) बहु–एक अन्तःक्षेपी फलन (Many-One Into Mapping): यदि फलन f बहु–एक भी है और अन्तःक्षेपी भी हो, उसे बहु–एक अन्तःक्षेपी फलन कहते है।

प्रतीकात्मक रुप में, $f: A \to B$, बहु–एक अन्तःक्षेपी फलन होगा, यदि $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$ तथा $f(A) \subset B$.

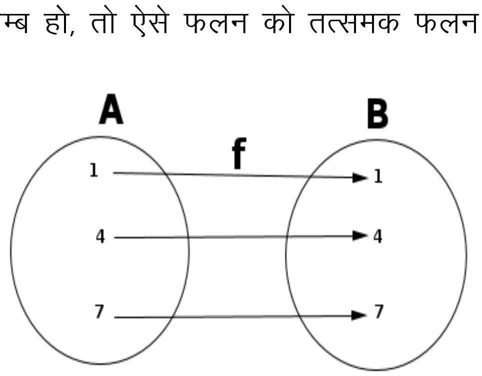


(viii) बहु–एक आच्छादक फलन (Many-One Onto Mapping): यदि फलन f बहु–एक भी है और आच्छादक भी हो, उसे बहु–एक आच्छादक फलन कहते है।

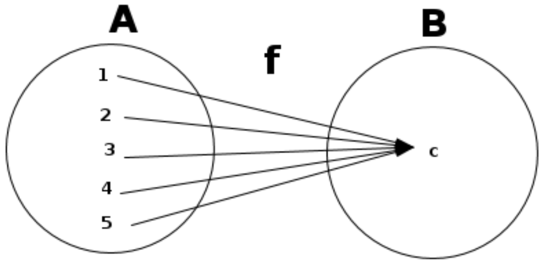
प्रतीकात्मक रुप में, $f: A \to B$, बहु–एक आच्छादक फलन होगा, यदि $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$ तथा $f(A) = B$.



(ix) तत्समक फलन (Identity Function): यदि फलन $f: R \to R$ इस प्रकार से है कि $f(x) = x$, $x \in R$ अर्थात का प्रत्येक अवयव स्वंय का प्रतिबिम्ब हो, तो ऐसे फलन को तत्समक फलन कहते है।



(x) अचर फलन (Constant Function): यदि फलन $f: R \rightarrow R$ इस प्रकार से है कि डोमेन समस्त अवयवों का सहडोमेन में एक ही प्रतिबिम्ब हो, तो ऐसे फलन को अचर फलन कहते है।



(xi) मापांक फलन (modulus Function): यदि फलन f इस प्रकार से है कि

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{यदि } x \geq 0 \\ -x, & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$$

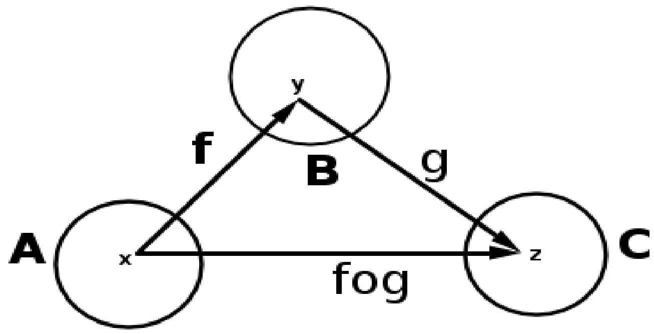
तब फलन f को मापांक फलन कहते है।

(x) महत्तम पूर्णांक फलन (Greatest Integer Function): यदि किसी वास्तविक संख्या x के लिए कोई फलन f इस प्रकार से है कि $f(x) = [x]$, तो ऐसे फलन को महत्तम पूर्णांक फलन कहते है। जहॉ [x] एक पूर्णांक है जो कि या तो x के बराबर है या x से कम अर्थात् $\{[x] \leq x\}$.

(xi) न्यूनतम पूर्णांक फलन (Smallest Integer Function): यदि किसी वास्तविक संख्या x के लिए कोई फलन f इस प्रकार से है कि $f(x) = \lceil x \rceil$, तो ऐसे फलन को न्यूनतम पूर्णांक फलन कहते है। जहॉ $\lceil x \rceil$ एक पूर्णांक है जो कि या तो x से बड़ा है या x के बराबर अर्थात् $\{[x] \geq x\}$.

फलनों का संयोजन (Composition of Function)

माना कि A, B तथा C तीन समुच्चय है। दो फलन f तथा g इस प्रकार से परिभाषित है कि $f: A \rightarrow B$ जहॉ $f(x) = y$, $x \in A$, $y \in B$ तथा $g: B \rightarrow C$ जहॉ $g(y) = z$, $y \in B$, $z \in C$. अब यदि फलन $h: A \rightarrow C$ इस प्रकार से कि $h(x) = z = g(y) = g\{f(x)\}$, $x \in A$ तो फलन f को h तथा g का संयोजन फलन कहते है। जिसे gof से निरुपित किया जाता है।



प्रतिलोमित फलन (Invertible Function)

यदि एक फलन $f: A \to B$ तथा दूसरा फलन $g: B \to A$ भी सम्भव है जिससे $gof = I_A$ तथा $fog = I_B$ फलन f प्रतिलोमित फलन कहलाता है। g को f^{-1} से निरुपित किया जाता है।

अर्थात फलन f प्रतिलोमित फलन है तो वह आवश्यक रुप से एकैकी आच्छादक फलन होगा। तथा विलोमतः भी सत्य होगा।

द्विआधारी संक्रिया (Binary Operations)

यदि कोई अरिक्त समुच्चय है तो फलन $f : A \times A \to A$ समुच्चय A पर द्विआधारी संक्रिया कहलाता है।

उदाहरण(Example)

उदाहरण–1: यदि फलन f तथा वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R पर इस प्रकार परिभाषित है कि $f(x) = x+3$, $\forall\ x \in R$, तो सिद्व कीजिए कि फलन f एकैकी आच्छादक फलन है।

हल–1: यदि $x_1, x_2 \in R$ तब $f(x_1) = x_1 + 3$,

$$f(x_2) = x_2 + 3$$

माना $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 3 = x_2 + 3 \Rightarrow x_1 = x_2$

अतः फलन f एकैकी है।

माना सहडोमेन का कोई अवयव y है। यदि $f(x) = y$, तब $y = x+3$

$\Rightarrow x = y - 3 \in R$ (डोमेन)

अतः $f(y - 3) = (y - 3) + 3 = y$

अर्थात् $\forall\ y \in R,\ y - 3 \in R$

अतः $f(R) = R$ फलन f आच्छादक है।

अर्थात् फलन f एकैकी आच्छादक फलन है।

उदाहरण–2: सिद्व कीजिए कि फलन $f(x) = [x]$ दारा प्रदत्त महत्तम पूर्णांक फलन $f : R \to R$ न तो एकैकी न आच्छादक है।

हल–2: दिया है $f : R \to R$ तथा $f(x) = [x]$,

तब $f(1.4) = 1$ तथा $f(1.7) = 1$

परन्तु $1.4 \neq 1.7 \Rightarrow f(1.4) = f(1.7) = 1$

अतः फलन f एकैकी नही है।

सहडोमेन का वह अवयव जो कि पूर्णाक नही है, डोमेन के किसी भी अवयव का प्रतिबिम्ब नही है।

अर्थात् $f(R) \subset R$ (सहडोमेन), अतः $f(R) = R$ फलन f आच्छादक नही है।

अर्थात् फलन f न तो एकैकी न आच्छादक है।

उदाहरण–3: समुच्चय f{ 1, 2, 3, 4, 5} पर द्विआधारी संक्रिया $*$ नीचे की संक्रिया सारणी में परिभाषित किया गया है।

*	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1
3	1	1	3	1	1
4	1	2	1	4	1
5	1	1	1	1	5

(i) $(2 * 3) * 4$ तथा $2 * (3 * 4)$ ज्ञात करें।

(ii) क्या $*$ क्रम विनिमेय है ?

(iii) $(2 * 3) * (4 * 5)$ ज्ञात करें।

हल–3: (i) $(2 * 3) * 4 = 1 * 4 = 1$

तथा $2 * (3 * 4) = 2 * 1 = 1$

(ii) $2 * 3 = 1 = 3 * 4,$

$2 * 4 = 2 = 4 * 2,$

$2 * 5 = 1 = 5 * 2,$

$3 * 4 = 1 = 4 * 3,$ ---------------------- इसी प्रकार अन्य।

(iii) $(2 * 3) * (4 * 5) = 1 * 1 = 1$

प्रश्नावली

1– सिद्व कीजिए कि समुच्चय {1, 2, 3} में R = {(1, 2), (2, 1) द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध R सममित है किन्तु न तो स्वतुल्य है और न संक्रमक है।

2– यदि R = {a, b, c}, सिद्व कीजिए कि A पर परिभाषित सम्बन्ध R तत्समक नही है, जहॉ R = {(a, a), (c, c).

3– माना A = {1,2,3}, B= {4,5,6,7} तथा माना f = {(1, 4), (2, 5),(3, 6)} , A से B में एक फलन है। बताइए कि f एकैकी है अथवा नही ?

4– सिद्व कीजिए कि f(x) = |x| द्वारा प्रदत्त मापांक फलन $f : R \rightarrow R$, न तो एकैकी न आच्छादक है।

5– यदि द्विआधारी संक्रिया $*$ पूर्णांको के समुच्चय Z पर इस प्रकार परिभाषित है कि

$a * b = a + b + 2, \ \forall\ a, b \in Z,$

तो द्विआधारी संक्रिया की क्रम– विनिमेयता तथा साहचर्यता की जॉच कीजिये।

उत्तरमाला: **3–** हॉ **5–** क्रम– विनिमेयता तथा साहचर्यता

आभार: **विद्यालयी शिक्षा परिषद, उत्तराखण्ड द्वारा निर्धारित पाठ्य– पुस्तकें एंव सहायक पाठ्य पुस्तकें।**