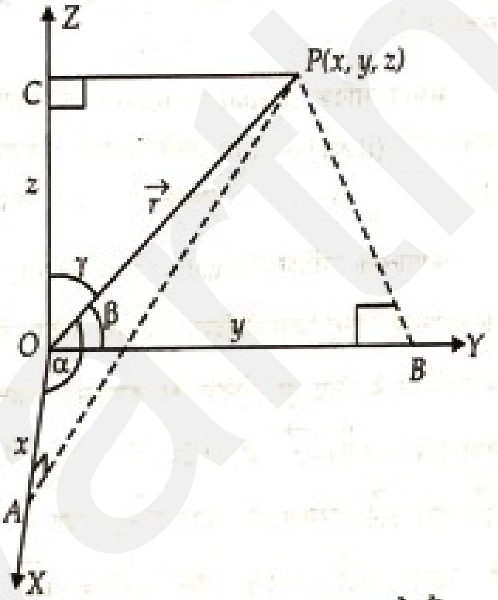
सदिश बीजगणित

[VECTOR ALGEBRA]

दिक् कोसाइन
(Direction Cosines)

यहाँ $\vec{r}$ द्वारा अक्षों के साथ बने कोण α, β एवं γ के कोसाइन (cosine) यानि $\cos\alpha, \cos\beta$ एवं $\cos\gamma$ सदिश $\vec{r}$ के दिक्-कोसाइन (direction cosines) कहलाते हैं। इन्हें क्रमशः l, m एवं n से निर्दिष्ट किया जाता है, अर्थात् $\cos\alpha = l$, $\cos\beta = m$ एवं $\cos\gamma = n$ से सूचित होते हैं।



फिर आरेख से स्पष्ट है कि $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$ तथा $|\vec{r}| = OP = r$ है।

अब समकोण $\Delta OAP, \Delta OBP, \Delta OCP$ में क्रमशः

$$\cos\alpha = \frac{x}{r},\ \cos\beta = \frac{y}{r},\ \cos\gamma = \frac{z}{r}.$$

दूसरे रूप में $l = \frac{x}{r},\ m = \frac{y}{r},\ n = \frac{z}{r}.$

$\Rightarrow \quad x = lr,\ y = mr,\ z = nr.$

$\Rightarrow$ बिन्दु P के निर्देशांक (lr, mr, nr) हैं।

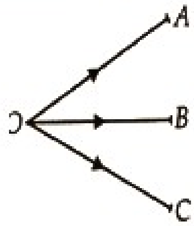
पुनः, दिक्-कोसाइन (direction cosines) l, m, n के समानुपाती (proportional) संख्याएँ lr, mr, nr सदिश $\vec{r}$ के दिक्-अनुपात (direction ratios) कहलाते हैं

सदिशों के प्रकार
(Types of Vectors)

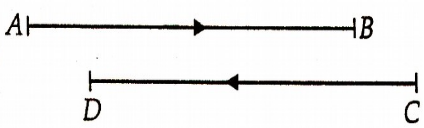
इकाई (मात्रक) सदिश (Unit Vector)— किसी दिए हुए सदिश $\vec{a}$ की दिशा में इकाई (मात्रक) सदिश को $\hat{a}$ (a कैप) से निर्दिष्ट किया जाता है। इस प्रकार इकाई (मात्रक) सदिश $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ है।

शून्य सदिश (Zero (null) Vector)— एक सदिश जिसके प्रारंभिक बिन्दु (initial point) तथा अन्तिम बिन्दु (terminal point) संपाती (concide) होते हैं, शून्य सदिश कहलाता है।

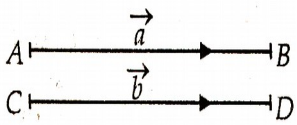
सह-प्रारंभिक (सह-आदिम) सदिश (Co-initial Vectors)—दो या अधिक सदिश जिनका एक ही प्रारंभिक (आदिम) बिन्दु है सह-प्रारम्भिक (सह-आदिम) सदिश कहलाते हैं। यहाँ $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ सह-प्रारंभिक सदिश हैं; क्योंकि इनके प्रारम्भिक बिन्दु (initial point) O एक ही है।



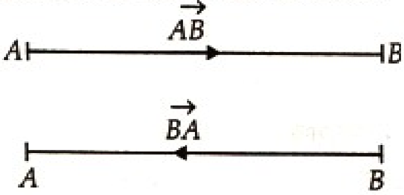
संरेख (या समान्तर) सदिश (Collinear or Parallel Vectors)—दो या अधिक सदिशों के आधार (base) एक ही सरल रेखा हो अथवा समान्तर सरल रेखाएँ हों, तो उन्हें संरेख (या समान्तर) सदिश कहलाते हैं।



समान सदिश (Equal Vectors)—दो सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ समान हैं यदि और केवल यदि (if and only if) उनके परिमाण (मापांक) एवं दिशा समान हैं। यहाँ सदिश $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, i.e., $\vec{a} = \vec{b}$ क्योंकि $AB = CD$ तथा दिशा एक ही है।



ऋणात्मक सदिश (Negative of a Vector)—एक सदिश जिसका परिमाण दिए हुए सदिश के समान है परन्तु जिसकी दिशा दिए हुए सदिश की दिशा के विपरीत है, दिए हुए सदिश का ऋणात्मक कहलाता है



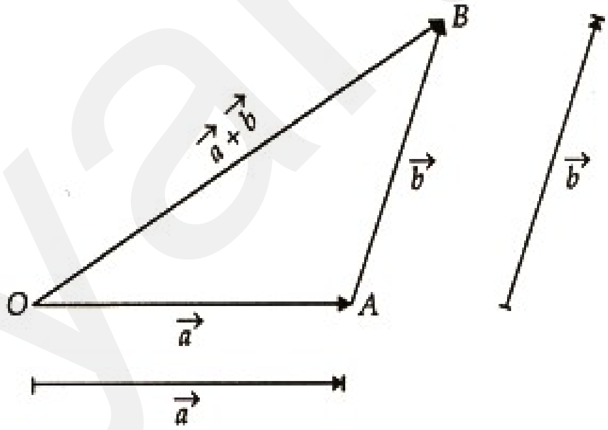
स्वतंत्र सदिश (Free Vectors)—एक सदिश परिमाण एवं दिशा को परिवर्तन किए बिना स्वयं के समान्तर स्वेच्छ बिन्दु पर प्रतिस्थापित किया जा सकता है स्वतंत्र सदिश कहलाता है।

सदिशों का योगफल (Addition of Vectors) :

माना कि दो सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ हैं। कोई बिन्दु O लिया तथा इससे परिमाण एवं दिशा में $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, इस प्रकार लिया कि सदिश $\overrightarrow{AB}$ ($\vec{b}$) का प्रारम्भिक बिन्दु सदिश $\overrightarrow{OA}$ का अन्तिम बिन्दु हो, तो सदिश $\overrightarrow{OB}$, यानि दूसरे सदिश $\vec{b}$ का अन्तिम बिन्दु की स्थिति सदिश, $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ का योग (परिणामी) सदिश कहा जाता है।

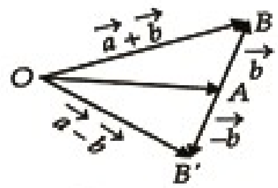
अतः $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$.

इस योग नियम को सदिश योग का त्रिभुज नियम (triangle law of vector addition) कहा जाता है।



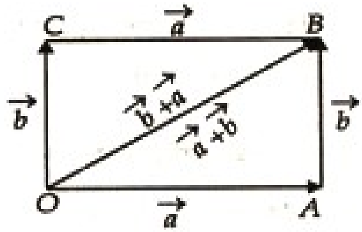
सदिशों का व्यवकलन (Subtraction of Vectors)— यदि $\vec{b}$ एक सदिश है, तो $-\vec{b}$ एक ऐसा सदशि है जिसका परिमाण सदिश $\vec{b}$ के समान है, परन्तु दिशा विपरीत है। अतः दो दिये हुए सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के व्यवकलन की क्रिया को $\vec{a}$ में $(-\vec{b})$ जोड़ने की क्रिया मान सकते हैं।

इस प्रकार हम $\vec{a} - \vec{b}$ को $\vec{a} + (-\vec{b})$ लिख सकते हैं।



सदिश योग के गुण
(Properties of Vector addition)

I. दो सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के लिए $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ [Commutative]



प्रमाण : माना कि $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ तथा $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ है।

$\therefore$ $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

यहाँ $OC =$ तथा $\parallel AB$ और $CB =$ तथा $\parallel OA$.

$\therefore$ $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} = \vec{b}$ और $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

अब, $\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB}$

अब संबंध (1) तथा (2) से, $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, i.e., सदिश योग क्रम विनिमय है।

(i) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ में यदि $\vec{b}=\vec{0}$, तो $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

यहाँ शून्य सदिश (Zero Vector) $\vec{0}$ सदिश योग के लिए योज्य सर्वसमिका (additive identity) कहलाता है।

(ii) यदि $\vec{b}=-\vec{a}$, तो $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$. यहाँ सदिश $-\vec{a}$ सदिश $\vec{a}$ का योज्य प्रतिलोम (additive inverse) कहलाता है।

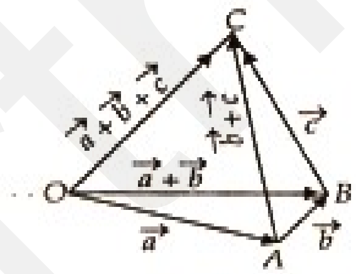
II. तीन सदिश $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के लिए $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ [Associative]

प्रमाण : माना कि $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{AB}=\vec{b}$ तथा $\vec{BC}=\vec{c}$ है।

$\therefore$ $\vec{b}+\vec{c}=\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$ तथा $\vec{a}+\vec{b}=\vec{OA}+\vec{AB}=\vec{OB}$

सदिश योग के त्रिभुज नियम से,

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{OA}+(\vec{AB}+\vec{BC})$$
$$=\vec{OA}+\vec{AC}=\vec{OC}=\vec{OB}+\vec{BC}$$
$$=(\vec{OA}+\vec{AB})+\vec{BC}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}.$$



इस प्रकार $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$, i.e., सदिश योग साहचर्य है।

एक अदिश से सदिश का गुणन (Multiplication of a Vector by a Scalar) :

सदिश राशि $\vec{a}$ तथा अदिश राशि m का गुणन $m\vec{a}$ द्वारा सूचित (निर्दिष्ट) किया जाता है, जो एक सदिश राशि है जिसका परिमाण सदिश $\vec{a}$ के परिमाण का $|m|$ गुणा है तथा दिशा वही है जो दिशा $\vec{a}$ की है यदि m धनात्मक है तथा यदि m ऋणात्मक है तो उसकी दिशा $\vec{a}$ की दिशा के विपरीत है।

खंड सूत्र (Section Formula)

माना कि मूल बिन्दु O के सापेक्ष बिन्दु A तथा B के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ है,

अर्थात् $\vec{OA}=\vec{a}$ तथा $\vec{OB}=\vec{b}$.

$\because$ $$\frac{AP}{PB}=\frac{m}{n}, \Rightarrow nAP=mPB,$$

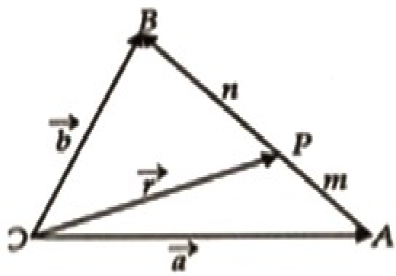
$\Rightarrow$ $$n\vec{AP}=m\vec{PB}$$

$\Rightarrow$ $$n(\vec{OP}-\vec{OA})=m(\vec{OB}-\vec{OP})$$

$\Rightarrow$ $$(m+n)\vec{OP}=m\vec{OB}+n\vec{OA}$$

$\Rightarrow$ $$\vec{OP}=\frac{m\vec{OB}+n\vec{OA}}{m+n}$$

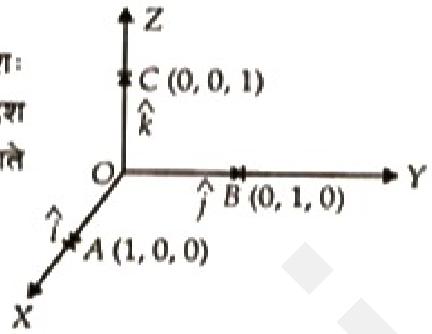
$\Rightarrow$ $$\vec{r}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$



अक्षों की दिशा में मात्रक (इकाई) सदिश (Units Vectors along the axes) :

$|\overrightarrow{OA}| = 1,\ |\overrightarrow{OB}| = 1$ तथा $|\overrightarrow{OC}| = 1.$

सदिश $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ तथा $\overrightarrow{OC}$ जिनमें से प्रत्येक का परिमाण 1 है क्रमशः x-अक्ष (OX), y-अक्ष (OY) तथा z-अक्ष (OZ) की धन दिशा के अनुदिश (along positive direction) मात्रक (इकाई) सदिश (Unit Vectors) कहलाते है और इनको क्रमशः $\hat{i}$, $\hat{j}$ तथा $\hat{k}$ द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है।



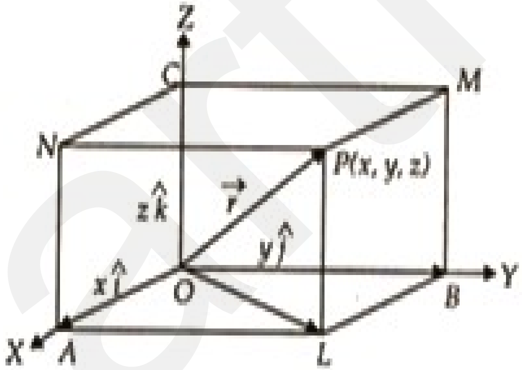
एक सदिश के घटक (Components of a Vector) :

$$\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AL} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

तथा $$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LP} = x\hat{i} - y\hat{j} + z\hat{k}$$

इस प्रकार O के सापेक्ष $P(x, y, z)$ का स्थिति सदिश $\overrightarrow{OP}$ (यानि $\vec{r}$) $= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ के रूप में प्राप्त होता है।

किसी सदिश का यह रूप घटक रूप (component form) कहलाता है।



पुनः, $OP^2 = OL^2 + LP^2 = (OA^2 + AL^2) + LP^2$

$\Rightarrow$ $$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,\ \Rightarrow\ r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

दो बिन्दुओं को मिलाने वाला सदिश (Vector joining two points) :

माना कि दो बिन्दु $A(x_1, y_1, z_1)$ तथा $B(x_2, y_2, z_2)$ है, तो A को B से मिलाने वाला सदिश $\overrightarrow{AB}$ है।

$\overrightarrow{OA} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ तथा $\overrightarrow{OB} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$ है.

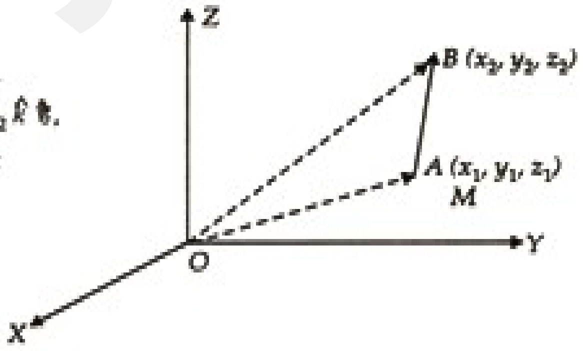
सदिश त्रिभुज नियम का प्रयोग करने पर $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$= (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



दो सदिशों का अदिश गुणनफल (Scalar (or dot) Product of two Vectors) :

दो शून्येतर सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$, जिनके बीच का कोण θ है, के अदिश गुणनफल (Scalar Product) या बिन्दु गुणनफल (Dot product) को $\vec{a} \cdot \vec{b}$ द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है और इसे अदिश राशि $(ab\cos\theta)$ से परिभाषित किया जाता है। संकेतन में लिखा जाता है,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta = ab\cos\theta.$$

यदि $\vec{a}=\vec{0}$ या $\vec{b}=0$, तो θ परिभाषित नहीं है और इस दशा में हम $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ परिभाषित करते हैं।

विशिष्ट परिणाम (*Special results*) :

(i) यदि $\theta=\pi/2$, तो $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\pi/2)=0$,

i.e., $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$

(ii) यदि $\theta=0$, तो $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos 0=|\vec{a}|\,|\vec{b}|=ab$

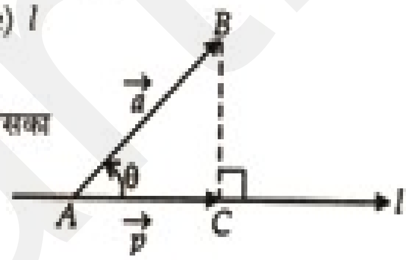
(iii) यदि $\theta=\pi$, तो $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\pi=-|\vec{a}|\,|\vec{b}|=-ab$

(iv) $\hat{i}\cdot\hat{i}=1=\hat{j}\cdot\hat{j}=\hat{k}\cdot\hat{k}$ तथा $\hat{i}\cdot\hat{j}=0=\hat{j}\cdot\hat{k}=\hat{k}\cdot\hat{i}$

.	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\hat{i}$	1	0	0
$\hat{j}$	0	1	0
$\hat{k}$	0	0	1

एक सदिश का किसी रेखा पर प्रक्षेप (Projection of a vector on a line) :

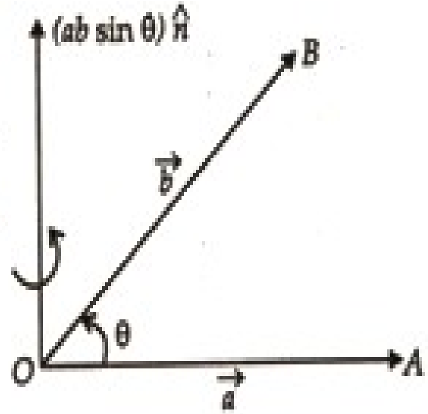
माना कि एक सदिश $\vec{a}=\vec{AB}$ एक दत्त दिष्ट रेखा (directed line) l के साथ वामावर्त दिशा (anticlockwise direction) में θ कोण बनाता है। अब $\vec{a}=\vec{AB}$ का रेखा l पर प्रक्षेप (Projection) एक सदिश, माना कि $\vec{p}$ है जिसका परिमाण (magnitude) $|\vec{a}|\cos\theta$ यानि $|\vec{AB}|\cos\theta$ है



दो सदिशों का सदिश गुणनफल (Vector (or cross) product of two vectors)

दो शून्येतर सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$, जिनके बीच का कोण θ है, के सदिश गुणनफल (vector product) या बज्र गुणनफल (cross product) को $\vec{a}\times\vec{b}$ द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है और उसे सदिश राशि से परिभाषित किया जाता है जो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के तल पर लम्ब होता है एवं जिसका मापांक $|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta$ होता है। $\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$

जहाँ $\hat{n}$ मात्रक सदिश है, जो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ पर लम्ब है



विशिष्ट परिणाम (*Special results*) :

(i) यदि $\theta=0$ या π, तो $\sin\theta=0$. i.e., $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}$

(ii) यदि $\theta=\pi/2$, तो $\sin\theta=1$, $\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\hat{n}$

(iii) परस्पर लम्बवत् मात्रक सदिश $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ के लिए,

$\hat{i}\times\hat{i}=\vec{0}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}$. $\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$, $\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$, $\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$,

$\hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k}$, $\hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}$, $\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}$.

X	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\hat{i}$	$\vec{0}$	$\hat{k}$	$-\hat{j}$
$\hat{j}$	$-\hat{k}$	$\vec{0}$	$\hat{i}$
$\hat{k}$	$\hat{j}$	$-\hat{i}$	$\vec{0}$

घटक के रूप में अदिश-गुणनफल (Scalar Product in terms of Components)

इस प्रकार, यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ तो $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

घटक के रूप में सदिश गुणनफल (Vector product in terms of components)

यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$,

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

सदिश गुणनफल के दो महत्त्वपूर्ण गुण (Two important properties of vector product):

I. दो सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ और एक अदिश m के लिए $(m\vec{a})\times\vec{b} = m(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}\times(m\vec{b})$

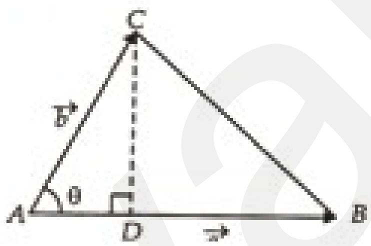
II. तीन सदिश $\vec{a}$, $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के लिए

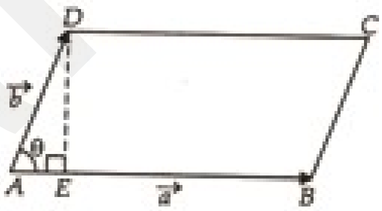
$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}. \qquad \text{(वितरण गुण)}$$

सदिश गुणनफल के ज्यामितीय निरूपण पर परिणाम (Results on geometrical interpretation of the vector product):

I. त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$

II. स॰ च॰ का (अदिश) क्षेत्रफल $= |\vec{a}\times\vec{b}|$





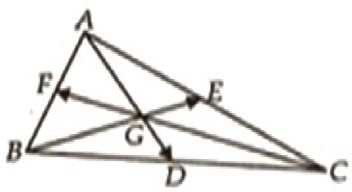
उदाहरण (Example)

उदाहरण 1– In a ΔABC, if D, E and F are the mid-points of sides BC, CA and AB respectively, show that

$$\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{0}$$

हल : ΔABC में, हम जानते हैं कि $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$. ... (1)

माना कि भुजा BC, CA तथा AB के मध्य बिन्दु क्रमशः D, E तथा F हैं।



बगल के आरेख से हम पाते है कि

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD},\quad \vec{BE} = \vec{BC} + \vec{CE} \text{ तथा } \vec{CF} = \vec{CA} + \vec{AF}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}) + (\vec{BD} + \vec{CE} + \vec{AF})$$

$$= \vec{0} + \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.$$

अतः $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{0}$.

उदाहरण 2– Find a vector whose magnitude is 3 units and which is perpendicular to $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ and $\vec{b} = 6\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$.

हल : यहाँ दत्त सदिश $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 6\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$ हैं।

$$\Rightarrow \quad \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-2+20)\hat{i} - (-6+24)\hat{j} + (15-6)\hat{k}$$

$$= 18\hat{i} - 18\hat{j} + 9\hat{k} = 9(2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = 9\sqrt{4+4+1} = 27.$$

अब, $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ पर लम्ब मात्रक सदिश

$$\hat{n} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{9(2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})}{27} = \frac{2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}}{3}$$

अतः, अपेक्षित मापांक 3 वाला सदिश $= 3\hat{n} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$.

उदाहरण 3– If $\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$, show that

(i) $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = 2(\vec{a} \times \vec{b})$

(ii) $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = 6(\vec{b} \times \vec{c})$

हल : यहाँ $\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} \times (\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}) = 0, \quad \Rightarrow \quad 2\vec{a} \times \vec{b} = 3\vec{c} \times \vec{a}$$

$$\vec{b} \times (\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}) = 0, \quad \Rightarrow \quad 3\vec{b} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

तथा $$\vec{c} \times (\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}) = 0, \quad \Rightarrow \quad \vec{c} \times \vec{a} = 2\vec{b} \times \vec{c}$$

अब, (i) $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a} \times \vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a} \times \vec{b} = 2\vec{a} \times \vec{b}$

(ii) $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = 3\vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} + 2\vec{b} \times \vec{c} = 6\vec{b} \times \vec{c}.$

उदाहरण 4– If $\vec{u} = \hat{i} + \hat{j}$, $\vec{v} = \hat{i} - \hat{j}$ and $\vec{w} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ and $\hat{n}$ is a unit vector such that $\vec{u} \cdot \hat{n} = 0$ and $\vec{v} \cdot \hat{n} = \vec{0}$, find $|\vec{w} \cdot \hat{n}|$.

हल : यहाँ $\vec{u} \cdot \hat{n} = 0$ तथा $\vec{v} \cdot \hat{n} = 0 \Rightarrow \hat{n} \perp \vec{u}$ तथा $\hat{n} \perp v$, $\Rightarrow \hat{n} \perp \vec{u}$ तथा $\vec{v}$, $\Rightarrow \vec{n} = \dfrac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$

फिर, $$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2\hat{k}, \quad \Rightarrow \quad |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-2)^2} = 2.$$

अतः $\hat{n} = -\dfrac{2\hat{k}}{2} = -\hat{k}.$

अब, $\vec{w} \cdot \hat{n} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) \cdot (-\hat{k}) = -3, \Rightarrow |\vec{w} \cdot \hat{n}| = |-3| = 3.$

अतः $\hat{n} = -\dfrac{2\hat{k}}{2} = -\hat{k}.$

अब, $\vec{w} \cdot \hat{n} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) \cdot (-\hat{k}) = -3, \Rightarrow |\vec{w} \cdot \hat{n}| = |-3| = 3.$