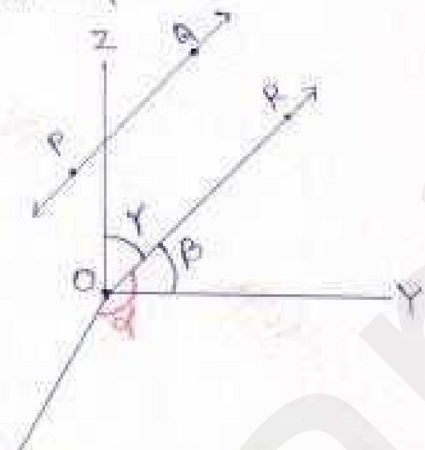
त्रि-विमीय ज्यामिति

रेखा के दिक्-कोसाइन - माना एक रेखा PQ अंतरिक्ष में है। PQ के समान्तर एक रेखा मूल बिन्दु O से होते हुए OR खींची गई है।

यदि OR अक्ष OX, OY तथा OZ के साथ α, β, γ कोण बनाती है, तो $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ को रेखा PQ के दिक्-कोसाइन कहते हैं। इनको क्रमश: l, m, n से प्रदर्शित करते हैं।



* यदि PQ की दिशा OR की दिशा के विपरीत हो तो PQ के दिक्-कोसाइन $\cos(\pi-\alpha), \cos(\pi-\beta)$ तथा $\cos(\pi-\gamma)$ OR $-\cos\alpha, -\cos\beta, -\cos\gamma$ होंगे।

रेखा के दिक्-अनुपात - वे संख्यायें जो दिक्-कोसाइन के समानुपाती है दिक्-अनुपात कहलाती है। माना a, b तथा c दिक्-कोसाइन l, m तथा n के समानुपाती है तो a, b, c रेखा के दिक् अनुपात कहलायेंगे।

$$a \propto l \Rightarrow a = lr$$
$$b \propto m \Rightarrow b = mr$$
$$c \propto n \Rightarrow c = nr$$

$$a^2+b^2+c^2 = r^2(l^2+m^2+n^2) \quad [\because l^2+m^2+n^2=1]$$
$$a^2+b^2+c^2 = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$
$$\therefore l = a/r,\ m = b/r,\ n = c/r$$

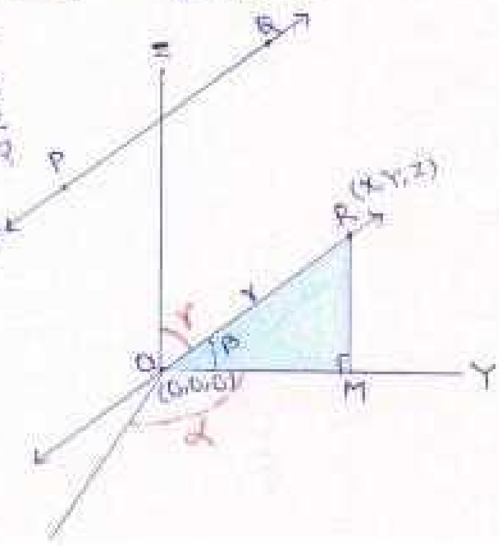
अत: $l = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; $m = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; $n = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

रेखा के दिक्-कोसाइन में सम्बन्ध -

माना PQ के दिक् कोसाइन l, m, n हैं। PQ के समान्तर OR रेखा खींची गई है जो OX, OY, OZ के साथ α, β, γ कोण बनाती है। जबकि R इस पर कोई बिन्दु है जिसके निर्देशांक (x, y, z) है।

R से OY पर एक लम्ब RM खींचा गया

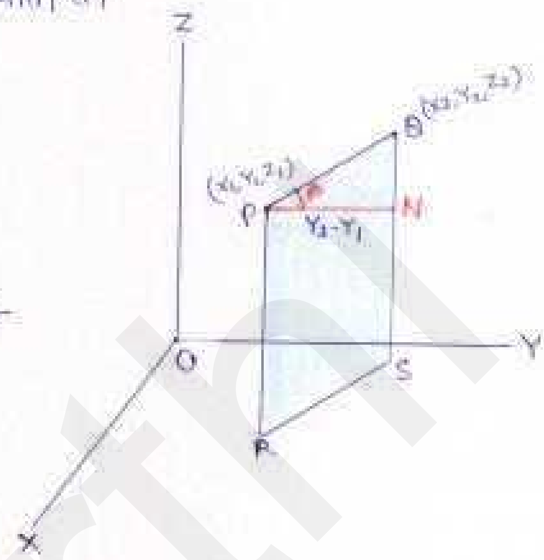
$$\cos\beta = \frac{OM}{OR} \Rightarrow m = \frac{y}{r} \Rightarrow y = mr$$
$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow l = \frac{x}{r} \Rightarrow x = lr$$
$$\cos\gamma = \frac{z}{r} \Rightarrow n = \frac{z}{r} \Rightarrow z = nr$$



$$OR^2 = x^2+y^2+z^2$$
$$r^2 = m^2r^2 + l^2r^2 + n^2r^2$$
$$r^2 = r^2(l^2+m^2+n^2)$$

दो बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखा के दिक् कोसाइन -

दो दिये गये बिन्दु $P(x_1,y_1,z_1)$ और $Q(x_2,y_2,z_2)$ के दिक् कोसाइन l, m, n है और यह X, Y और Z -अक्ष के साथ α, β, γ कोण बनाती है।



समकोण $\triangle PNQ$ में

$$\cos\beta = \frac{PN}{PQ} = \frac{y_2-y_1}{PQ}$$

इसी $\cos\alpha = \frac{x_2-x_1}{PQ}$

$$\cos\gamma = \frac{z_2-z_1}{PQ}$$

अतः बिन्दुओं $P(x_1,y_1,z_1)$ तथा $Q(x_2,y_2,z_2)$ को जोड़ने वाली रेखाखण्ड PQ के दिक् कोसाइन

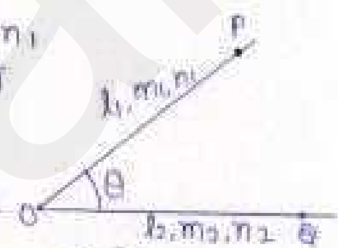
$$\frac{x_2-x_1}{PQ}, \frac{y_2-y_1}{PQ}, \frac{z_2-z_1}{PQ}$$

तथा $x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1$ रेखा PQ के दिक् अनुपात है।

जहाँ $PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ बिन्दु P तथा Q के बीच की दूरी है।

दो रेखाओं के मध्य कोण -

(i) माना रेखाएं OP और OQ के दिक् कोसाइन क्रमशः l_1, m_1, n_1 l_2, m_2, n_2 है, यदि इन रेखाओं के बीच का कोण θ हो तो



$$\cos\theta = l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2$$

$$\sin\theta = \sqrt{(m_1n_2-m_2n_1)^2+(n_1l_2-n_2l_1)^2+(l_1m_2-l_2m_1)^2}$$

(ii) यदि a_1, b_1, c_1 और a_2, b_2, c_2 इन रेखाओं के दिक् अनुपात हो तो

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\ \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\ \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

(iii) **दो परस्पर लम्बवत रेखाएं** - यदि दो रेखायें परस्पर लम्बवत् है यानि $\theta = \pi/2 \Rightarrow \cos\pi/2 = 0$

$$\Rightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2 = 0$$

या $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 = 0$

(iv) **दो परस्पर समान्तर रेखाएं** - यदि रेखायें परस्पर समान्तर हो तो $\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0$

यदि $\sin\theta = 0$ तो $m_1n_2-m_2n_1 = 0$ या $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$

और $n_1l_2-n_2l_1 = 0$ या $\frac{n_1}{n_2} = \frac{l_1}{l_2}$

अतः $\boxed{\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}}$

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$

(v) रेखाये $r = a_1+\lambda b_1$ तथा $r = a_2+\lambda b_2$ के बीच का कोण θ हो तो

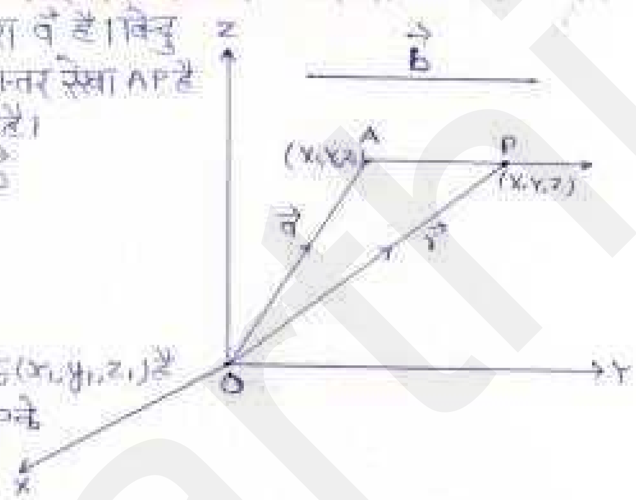
$$\cos\theta = \left|\frac{b_1 \cdot b_2}{|b_1|\,|b_2|}\right|$$

अन्तरिक्ष में रेखा का समीकरण

इस अनुच्छेद में हम एक रेखा की अन्तरिक्ष में, सदिश तथा कार्तीय समीकरणों का अध्ययन करेंगे।

एक रेखा अद्वितीयत: निर्धारित होती है, यदि
(i) दिए गये बिन्दु से दी गई दिशा से होकर जाती है, या
(ii) दो दिये गये बिन्दुओं से होकर जाती है।

दिये गये बिन्दु A से जाने वाली तथा दिये गये सदिश $\vec{b}$ के समान्तर रेखा का समीकरण -



सदिश समीकरण- माना बिन्दु A का स्थित सदिश $\vec{a}$ है। बिन्दु A से जाने वाली तथा दिये गये सदिश $\vec{b}$ के समान्तर रेखा AP है P एक स्वेच्छ बिन्दु है जिसका स्थिति सदिश $\vec{r}$ है।

$\vec{AP}$ सदिश $\vec{b}$ के समान्तर है अर्थात $\vec{AP} = \lambda\vec{b}$

$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA}$

$\lambda\vec{b} = \vec{r} - \vec{a}$

$\underline{\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}}$

कार्तीय समीकरण - दिये गये बिन्दु A के निर्देशांक (x_1, y_1, z_1) है और रेखा के दिक् अनुपात a, b, c है। माना बिन्दु P के निर्देशांक (x, y, z) है।

तब $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$

$\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$

सदिश समीकरण में मान रखने पर

$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k} + \lambda a\hat{i} + \lambda b\hat{j} + \lambda c\hat{k}$

$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = (x_1 + \lambda a)\hat{i} + (y_1 + \lambda b)\hat{j} + (z_1 + \lambda c)\hat{k}$

$x = x_1 + \lambda a, \quad y = y_1 + \lambda b, \quad z = z_1 + \lambda c$

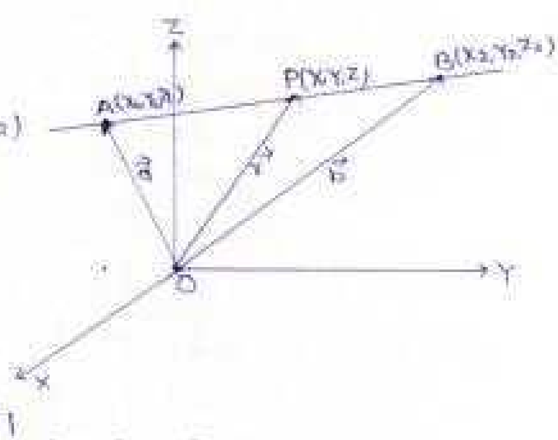
$\lambda = \frac{x - x_1}{a}, \quad \lambda = \frac{y - y_1}{b}, \quad \lambda = \frac{z - z_1}{c}$

$$\boxed{\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}}$$

यदि रेखा बिन्दु $A(x_1, y_1, z_1)$ से जाती है और l, m, n इसके दिक् कोसाइन है, तो रेखा का समीकरण

$$\boxed{\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{c}}$$

दो दिये गये बिन्दुओं से जाने वाली रेखा का समीकरण -



माना रेखा पर स्थित दो बिन्दुओं $A(x_1, y_1, z_1)$ और $B(x_2, y_2, z_2)$ के स्थित सदिश क्रमश: $\vec{a}$ और $\vec{b}$ है।

माना बिन्दु P(x, y, z) का स्थिति सदिश $\vec{r}$ है।

$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA} = \vec{r} - \vec{a}$

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a}$

तीनो बिन्दु संरेख है।

$\vec{AP} = \lambda(\vec{AB})$

$\vec{r} - \vec{a} = \lambda(\vec{b} - \vec{a})$

$\underline{\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})}$ रेखा का सदिश समीकरण है।

कार्तीय रूप- $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}; \quad \vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}, \quad \vec{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$

सदिश समीकरण में मान रखने पर

$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k} + \lambda[(x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}]$

$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1); \quad y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1); \quad z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1)$

$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}; \quad \lambda = \frac{y - y_1}{\quad}; \quad \lambda = \frac{z - z_1}{\quad}$

दो रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी -

समतलीय रेखाएँ - वे रेखाये जो एक तल में होती हैं, समतलीय रेखाएँ कहलाती हैं। समतलीय रेखाएँ या तो समान्तर होती हैं या प्रतिच्छेद करती हैं।

असमतलीय रेखाएँ - अन्तरिक्ष में वे रेखाएँ जो एक तल में नहीं होती हैं, असमतलीय रेखाये कहलाती हैं।

असमतलीय रेखाये न तो समान्तर होती हैं और न ही प्रतिच्छेद करती हैं।

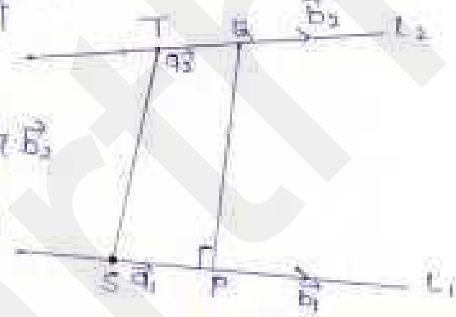
दो विषमतलीय रेखाओं के बीच की दूरी - दो असमतलीय रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी वह रेखाखण्ड होती है जो इन रेखाओं द्वारा उभयनिष्ठ लम्ब पर बना अन्तःखण्ड होता है।

माना $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \lambda \vec{b}_2$ दो विषमतलीय रेखाये हैं।

माना रेखा L_1 पर बिन्दु S जिसका स्थिति सदिश $\vec{a}_1$ है और L_2 पर बिन्दु T जिसका स्थिति सदिश $\vec{a}_2$ है तब न्यूनतम दूरी सदिश का परिमाण, ST का न्यूनतम दूरी की दिशा में प्रक्षेप की माप के समान होगा।

यदि बीच की दूरी $\vec{PQ}$ है तो यह दोनों $\vec{b}_1$ और $\vec{b}_2$ पर लम्ब होगा। $\vec{PQ}$ की दिशा में इकाई सदिश $\hat{n} = \dfrac{\vec{b}_1 \times \vec{b}_2}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}$

तब $|\vec{PQ}| = d$ जहाँ d न्यूनतम दूरी सदिश का परिमाण है।



माना $\vec{ST}$ और $\vec{PQ}$ के बीच कोण θ है तब

$$PQ = ST \cos\theta$$

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{PQ}\cdot\vec{ST}}{|\vec{PQ}|\,|\vec{ST}|}\right| = \left|\frac{d\hat{n}\cdot(\vec{a}_2-\vec{a}_1)}{d\cdot ST}\right|$$

$$= \left|\frac{(\vec{b}_1\times\vec{b}_2)\cdot(\vec{a}_2-\vec{a}_1)}{|\vec{b}_1\times\vec{b}_2|\, ST}\right|$$

अभीष्ट न्यूनतम दूरी, $d = PQ = ST|\cos\theta|$

$$d = \left|\frac{(\vec{b}_1\times\vec{b}_2)\cdot(\vec{a}_2-\vec{a}_1)}{|\vec{b}_1\times\vec{b}_2|}\right|$$

कार्तीय रूप - रेखा L_1 का कार्तीय समी॰ $\dfrac{x-x_1}{a_1} = \dfrac{y-y_1}{b_1} = \dfrac{z-z_1}{c_1}$ तथा रेखा L_2 का कार्तीय समीकरण $\dfrac{x-x_2}{a_2} = \dfrac{y-y_2}{b_2} = \dfrac{z-z_2}{c_2}$ है तो

न्यूनतम दूरी (S.D) -

$$d = \frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}}$$

यदि रेखाये प्रतिच्छेदन करती हैं तो

$$(\vec{a}_2-\vec{a}_1)\cdot(\vec{b}_1\times\vec{b}_2) = 0$$

या

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

समान्तर रेखाओं के बीच की दूरी -

माना दो समान्तर रेखाये $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \lambda\vec{b}_2$

इनके बीच की दूरी $d = \left|\dfrac{\vec{b}\times(\vec{a}_2-\vec{a}_1)}{|\vec{b}|}\right|$ [दोनों रेखाये समान्तर हैं तो $\vec{b}_1 = \vec{b}_2 = \vec{b}$]

उदाहरण - उस रेखा का सदिश तथा कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $A(2,-1,1)$ से जाती है और बिन्दुओं $B(-1,4,1)$ तथा $C(1,2,2)$ को मिलाने वाली रेखा के समान्तर है।

हल - बिन्दु $A(2,-1,1)$ का स्थिति सदिश $\vec{a} = 2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

बिन्दु $B(-1,4,1)$ का स्थिति सदिश $= -\hat{i}+4\hat{j}+\hat{k}$

बिन्दु $C(1,2,2)$ का स्थिति सदिश $= \hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$

$$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB}$$
$$= \hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}+\hat{i}-4\hat{j}-\hat{k}$$
$$= 2\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$$

अतः रेखा का सदिश समीकरण

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{BC}$$
$$\vec{r} = 2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}+\lambda(2\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$$

कार्तीय समीकरण

माना $\vec{r} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$

$$x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k} = (2+2\lambda)\hat{i}+(-1-2\lambda)\hat{j}+(1+\lambda)\hat{k}$$

$$x = 2+2\lambda, \quad y = -1-2\lambda, \quad z = 1+\lambda$$

$$\lambda = \frac{x-2}{2}, \quad \lambda = \frac{y+1}{-2}, \quad \lambda = \frac{z-1}{1}$$

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{1}$$

उदाहरण - दिखाइए कि बिन्दु $A(-2,3,5)$, $B(1,2,3)$, $C(7,0,-1)$ संरेख हैं।

हल - रेखा AB का समीकरण

$$\frac{x+2}{1+2} = \frac{y-3}{2-3} = \frac{z-5}{3-5}$$

$$\Rightarrow \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{-2} \quad \text{---} \ (1)$$

तीनो बिन्दु संरेख होंगे यदि C बिन्दु समी॰(1) को सन्तुष्ट करेगा

$$\Rightarrow \frac{7+2}{3} = \frac{0-3}{-1} = \frac{-1-5}{-2}$$

$$\frac{9}{3} = \frac{-3}{-1} = \frac{-6}{-2}$$

$3 = 3 = 3$ जो सत्य है।

अतः बिन्दु A, B तथा C संरेख हैं।

उदाहरण - रेखाओं $\vec{r} = 4\hat{i}-\hat{j}+\lambda(\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k})$ तथा $\vec{r} = \hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}+\mu(2\hat{i}+4\hat{j}-4\hat{k})$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

हल - $\vec{b_1} = \hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$

$\vec{b_2} = 2\hat{i}+4\hat{j}-4\hat{k}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{b_1}\cdot\vec{b_2}}{|\vec{b_1}||\vec{b_2}|}$$

$$= \frac{(\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k})\cdot(2\hat{i}+4\hat{j}-4\hat{k})}{|\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}|\,|2\hat{i}+4\hat{j}-4\hat{k}|}$$

$$= \frac{2+8+8}{\sqrt{1+4+4}\,\sqrt{4+16+16}}$$

$$= \frac{18}{\sqrt{9}\sqrt{36}} = \frac{18}{3\times6} = 1$$

$\cos\theta = 1$

समतल

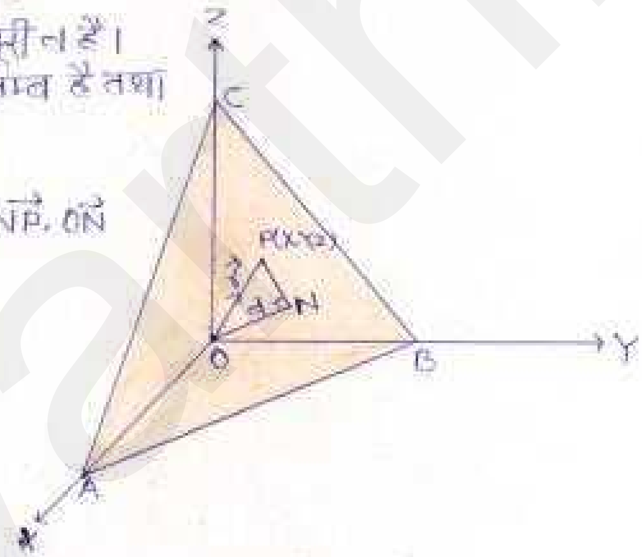
यदि दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा किसी पृष्ठ पर पूर्णरूपेण स्थित हो, तो पृष्ठ को समतल कहते हैं।

समतल पर अभिलम्ब – कोई रेखा जो समतल पर स्थित सभी रेखाओं पर लम्ब हो, समतल पर अभिलम्ब कहलाती है। 'समतल पर सभी अभिलम्ब एक दूसरे के समान्तर होते हैं।'

किसी समतल को कई प्रकार से निर्धारित किया जा सकता है।

* तीन असंरेख बिन्दुओं से होकर एक और केवल एक समतल खींचा जा सकता है।
* दी हुई दो संगामी रेखाएँ एक विशिष्ट समतल को निर्धारित करती हैं।
* मूलबिन्दु से दी हुई दूरी पर एवं दी हुई दिशा के लम्बवत एक और केवल एक समतल खींचा जा सकता है।
* एक समतल पर एक बिन्दु और उसका अभिलम्ब अद्वितीय समतल का निर्धारण करते हैं।

अभिलम्ब के रूप में समतल का समीकरण -



माना समतल ABC की मूलबिन्दु से दूरी d है।
मूलबिन्दु O से समतल ABC पर ON अभिलम्ब है तथा ON के अनुदिश मात्रक सदिश $\hat{n}$ है।

$$\vec{ON} = d\hat{n}$$

माना समतल पर कोई बिन्दु P है इसलिए NP, ON पर लम्ब होगा।

अतः $\vec{NP}\cdot\vec{ON} = 0$ ------ (1)

$\vec{NP} = \vec{r} - d\hat{n}$ $\quad [\because \vec{ON}+\vec{NP} = \vec{OP}]$

समी॰ (1) से

$$(\vec{r}-d\hat{n})\cdot d\hat{n} = 0$$
$$(\vec{r}-d\hat{n})\cdot \hat{n} = 0, \quad d\neq 0$$
$$\vec{r}\cdot\hat{n} - d\,\hat{n}\cdot\hat{n} = 0$$
$$\vec{r}\cdot\hat{n} - d = 0$$
$$\boxed{\vec{r}\cdot\hat{n} = d}$$

यह समतल का सदिश समीकरण है।

समतल का कार्तीय रूप -

माना समतल पर कोई बिन्दु $P(x,y,z)$ है, तब

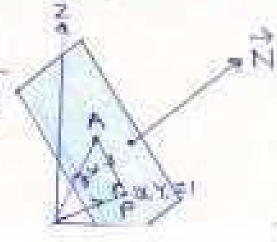
$$\vec{OP} = \vec{r} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$$

माना $\hat{n}$ के दिक्‌कोसाइन l, m, n हैं, तब

$$\hat{n} = l\hat{i}+m\hat{j}+n\hat{k}$$
$$\vec{r}\cdot\hat{n} = d$$
$$(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\cdot(l\hat{i}+m\hat{j}+n\hat{k}) = d$$
$$\boxed{lx+my+nz = d}$$

नोट → यदि मूलबिन्दु से समतल की दूरी d हो और समतल के अभिलम्ब के दिक्‌कोसाइन l, m, n हों तब लम्ब का पाद (ld, md, nd) होता है।

एक दिये सदिश के लम्बवत तथा दिये हुए बिन्दु से होकर जाने वाले समतल का समीकरण-



माना समतल बिन्दु A, जिसका स्थित सदिश $\vec{a}$ है, से होकर जाता है तथा सदिश $\vec{N}$ पर लम्बवत है।

माना समतल पर स्थित कोई बिन्दु $P(x,y,z)$ है जिसका स्थिति सदिश $\vec{r}$ है। तब बिन्दु P समतल पर स्थित होगा यदि और केवल यदि $\vec{AP}$, $\vec{N}$ पर लम्ब है।

$\vec{AP}\cdot\vec{N} = 0 \qquad \vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA}$

समतल का कार्तीय रूप –

माना दिया हुआ बिन्दु $A(x_1, y_1, z_1)$ और समतल पर कोई बिन्दु $P(x, y, z)$ है तथा $\vec{N}$ के दिक्-अनुपात A, B, C है, तब

$$\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$
$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$
$$\vec{N} = A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}$$

तब $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{N} = 0$

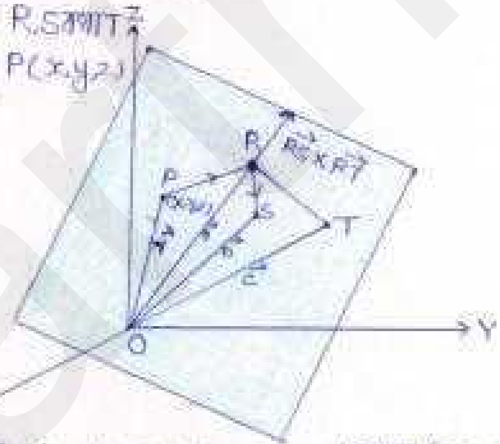
$$[(x-x_1)\hat{i} + (y-y_1)\hat{j} + (z-z_1)\hat{k}] \cdot (A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}) = 0$$

$$\boxed{A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0}$$

तीन असंरेखीय बिन्दुओ से होकर जाने वाले समतल का समीकरण –

माना समतल पर स्थित तीन असंरेख बिन्दुओ R, S तथा T के स्थिति सदिश क्रमश: $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ है, और बिन्दु $P(x, y, z)$ का स्थिति सदिश $\vec{r}$ है।

R से जाने वाले तथा सदिश $\vec{RS} \times \vec{RT}$ पर लम्ब समतल का समीकरण



$$\vec{RP} \cdot (\vec{RS} \times \vec{RT}) = 0$$
$$(\vec{OP} - \vec{OR}) \cdot [(\vec{OS} - \vec{OR}) \times (\vec{OT} - \vec{OR})] = 0$$
$$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot [(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})] = 0$$

समतल का कार्तीय रूप –

माना बिन्दु R, S और T के निर्देशांक क्रमश: $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ तथा (x_3, y_3, z_3) है, समतल पर स्थित बिन्दु P के निर्देशांक (x, y, z) व स्थिति सदिश $\vec{r}$ है

$$\vec{RP} = (x-x_1)\hat{i} + (y-y_1)\hat{j} + (z-z_1)\hat{k}$$
$$\vec{RS} = (x_2-x_1)\hat{i} + (y_2-y_1)\hat{j} + (z_2-z_1)\hat{k}$$
$$\vec{RT} = (x_3-x_1)\hat{i} + (y_3-y_1)\hat{j} + (z_3-z_1)\hat{k}$$

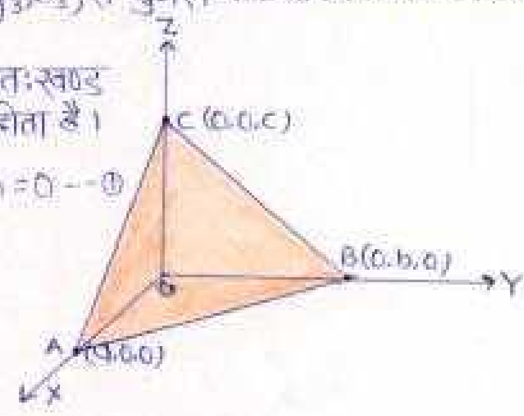
इन मानो को सदिश समी॰ $\vec{RP} \cdot (\vec{RS} \times \vec{RT}) = 0$ मे रखने पर

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

जो तीन बिन्दुओ $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ और (x_3, y_3, z_3) से गुजरने वाले समतल का कार्तीय समीकरण

समतल के समीकरण का अन्त:खण्ड रूप –

यदि कोई समतल निर्देशाक्षो से क्रमश: a, b और c अन्त:खण्ड काटता है तो उस समतल का समीकरण $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ होता है। इसे अन्त:खण्ड रूप कहते है।



माना समतल का व्यापक समीकरण $Ax + By + Cz + D = 0$ ---(1)

समतल बिन्दु A, B तथा C से होकर जाता है अत:

$$A \cdot a + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow A = -D/a$$

इसी प्रकार $A \cdot 0 + B \cdot b + C \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow B = -D/b$

$$A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot c + D = 0 \Rightarrow C = -D/c$$

A, B, C के मान समी॰ (1) मे रखने पर

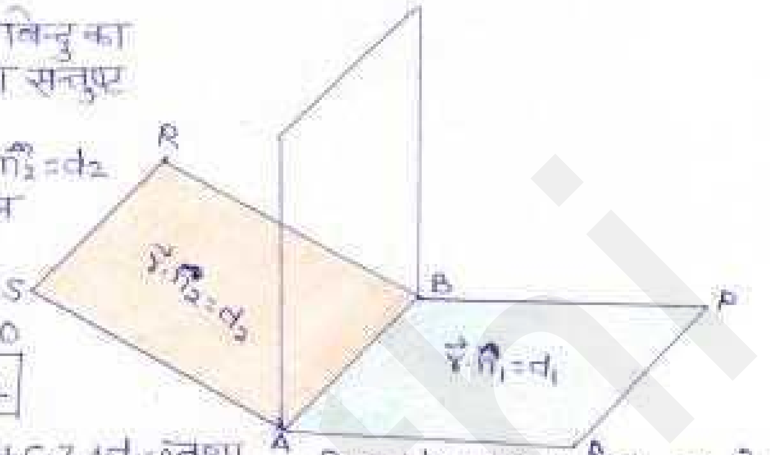
$$-\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}z + D = 0$$

$$-D\left[\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right] = -D$$

दो दिए हुए समतलों के प्रतिच्छेदन से होकर जाने वाला समतल -

माना दो समतल PQ और RS एक दूसरे को एक सरल रेखा AB पर काटते हैं जिसके समीकरण $\vec{r}\cdot\hat{n}_1 = d_1$ और $\vec{r}\cdot\hat{n}_2 = d_2$ है।

प्रतिच्छेदी रेखा AB पर स्थित किसी बिन्दु का स्थिति सदिश इन दोनो समीकरणों को सन्तुष्ट करेगा।



अतः समतलों $\vec{r}\cdot\hat{n}_1 = d_1$ और $\vec{r}\cdot\hat{n}_2 = d_2$ के प्रतिच्छेदी रेखा से जाने वाले समतल का समीकरण

$$(\vec{r}\cdot\hat{n}_1 - d_1) + \lambda(\vec{r}\cdot\hat{n}_2 - d_2) = 0$$

या $$\boxed{\vec{r}\cdot(\hat{n}_1 + \lambda\hat{n}_2) = d_1 + \lambda d_2}$$

कार्तीय रूप में - समतल $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ के प्रतिच्छेदन रेखा से गुजरने वाले समतल का समीकरण

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

$$\Rightarrow (a_1 + \lambda a_2)x + (b_1 + \lambda b_2)y + (c_1 + \lambda c_2)z + d_1 + \lambda d_2 = 0$$

जबकि λ का मान दी हुई शर्त के अनुसार ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण - उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतलों $x+2y+3z-4=0$ तथा $2x+y-z+5=0$ के प्रतिच्छेदी रेखा से जाता है तथा समतल $5x+3y+6z+1=0$ पर लम्ब है।

हल - समतलों $x+2y+3z-4=0$ तथा $2x+y-z+5=0$ के प्रतिच्छेदी रेखा से होकर जाने वाला समतल

$$(x+2y+3z-4) + \lambda(2x+y-z+5) = 0 \quad \text{---- (1)}$$

या $$(1+2\lambda)x + (2+\lambda)y + (3-\lambda)z - 4 + 5\lambda = 0$$

समतल (1) समतल $5x+3y+6z+1=0$ पर लम्ब है।

$$5\cdot(1+2\lambda) + 3(2+\lambda) + 6(3-\lambda) = 0 \qquad [a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0]$$

$$5 + 10\lambda + 6 + 3\lambda + 18 - 6\lambda = 0$$

$$7\lambda = -29$$

$$\lambda = -\frac{29}{7}$$

λ का मान समी० (1) में रखने पर

$$(x+2y+3z-4) - \frac{29}{7}(2x+y-z+5) = 0$$

$$7x + 14y + 21z - 28 - 58x - 29y + 29z - 145 = 0$$

$$-51x - 15y + 50z - 173 = 0$$

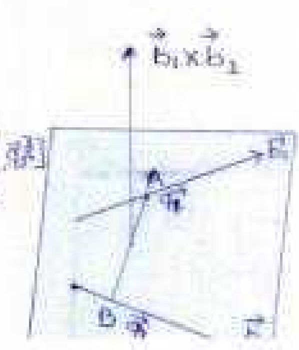
$$51x + 15y - 50z + 173 = 0$$

दो सरल रेखाओं के सहतलीय होने का प्रतिबन्ध -

माना दो रेखाये $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$ और $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\vec{b}_2$

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$ [A तथा B के स्थिति सदिश $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$]

रेखाये सहतलीय होगी यदि और केवल यदि $\vec{AB}$, $\vec{b}_1$ और $\vec{b}_2$ सहतलीय होंगे।



$$\vec{AB}\cdot(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = 0$$

$$(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)\cdot(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = 0$$

कार्तीय रुप - माना बिन्दुओं A और B के निर्देशांक क्रमशः (x_1, y_1, z_1) और (x_2, y_2, z_2) है तथा $\vec{b}_1$ और $\vec{b}_2$ के दिक् अनुपात क्रमशः a_1, b_1, c_1 तथा a_2, b_2, c_2 है। तब

$$\vec{AB} = (x_2-x_1)\hat{i} + (y_2-y_1)\hat{j} + (z_2-z_1)\hat{k}$$

$$\vec{b}_1 = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k}$$

$$\vec{b}_2 = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}$$

रेखायें सहतलीय होंगे

$$\vec{AB}\cdot(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = 0$$

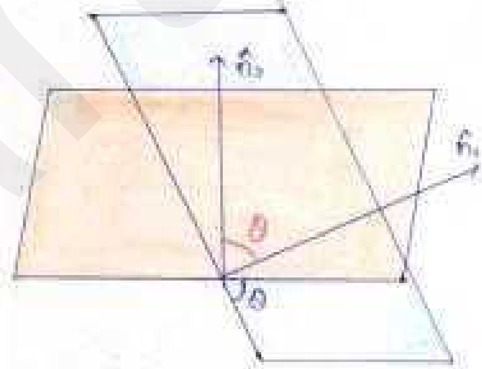
$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

दो समतलों के बीच का कोण -

"दो समतलों का कोण उनके अभिलम्बों के बीच का कोण होता है"

माना समतल $\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = d_1$ और $\vec{r}\cdot\vec{n}_2 = d_2$ के बीच का कोण θ है। तब किसी सार्व बिन्दु से समतलों पर खींचे गये अभिलम्बों के बीच का कोण θ होगा।

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right|$$



कार्तीय रुप - माना दो समतल $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ तथा $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ है तथा उनके बीच का कोण θ है तो

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

* यदि दो समतलों के बीच 90° का कोण है तो

$$\cos\pi/2 = 0$$

$$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2 = 0$$

$$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 = 0$$

* समतल समीकरण $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ और $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ परस्पर समान्तर है यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

* समतल का समीकरण :

(i) समतल के समान्तर समतल का समीकरण $\vec{r}\cdot\vec{n} = \lambda$

(ii) समतल $ax+by+cz+d=0$ के समान्तर समतल का समीकरण $ax+by+cz+d+\lambda=0$

λ का मान दी हुई शर्तानुसार निश्चित किया जाता है।

समतल से दिये गये बिन्दु की दूरी -

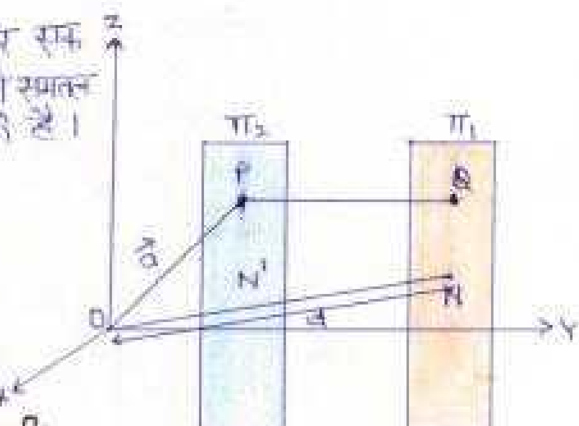
माना एक बिन्दु P जिसका स्थिति सदिश $\vec{a}$ और एक समतल π_1 जिसका समीकरण $\vec{r}\cdot\hat{n} = d$. पुनः बिन्दु P से समतल π_1 के समान्तर समतल π_2 का अभिलम्ब इकाई सदिश $\hat{n}$ है।

अतः समीकरण $(\vec{r}-\vec{a})\cdot\hat{n} = 0$

$$\vec{r}\cdot\hat{n} = \vec{a}\cdot\hat{n}$$

अतः मूल बिन्दु से समतल π_2 की दूरी $= |\vec{a}\cdot\hat{n}|$

P से समतल π_1 की दूरी $= |d - \vec{a}\cdot\hat{n}|$



* यदि समतल π_2 का समीकरण $\vec{r}\cdot\vec{N} = d$ के रुप में है, जहाँ $\vec{N}$ समतल पर अभिलम्ब है. तो लाम्बिक दूरी

$$\frac{|\vec{a}\cdot\vec{N} - d|}{|\vec{N}|} \text{ है।}$$

* मूलबिन्दु O से समतल $\vec{r}\cdot\vec{N} = d$ की दूरी $\frac{|d|}{|\vec{N}|}$ है। $(\because \vec{a}=0)$

कार्तीय रूप - माना समतल का समीकरण $ax+by+cz+d=0$ है तथा P समतल के बाहर एक बिन्दु है जिसके निर्देशांक (x_1, y_1, z_1) है। समतल पर स्थित किसी बिन्दु A के निर्देशांक (x, y, z) है।

समतल से बाहर बिन्दु P से समतल पर PN लम्ब डाला गया है, जिसकी लम्बाई p है।

p = AP का समतल के अभिलम्ब PN पर प्रक्षेप

$$p = \frac{a(x_1-x)+b(y_1-y)+c(z_1-z)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

या $$p = \frac{ax_1+by_1+cz_1-(ax+by+cz)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

परन्तु समतल का समीकरण $ax+by+cz+d=0$

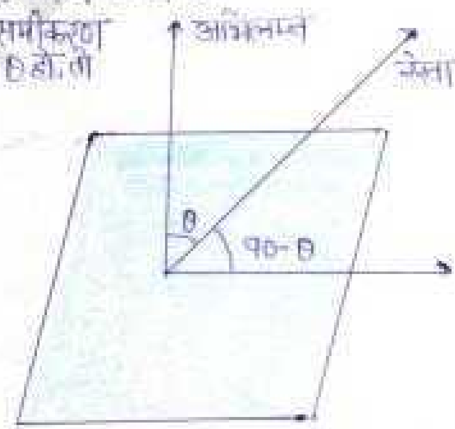
$\therefore ax+by+cz=-d$

$$p = \frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

दूरी धनात्मक होती है अतः $p = \left|\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$

एक रेखा और एक समतल के बीच का कोण - एक रेखा और एक समतल के बीच का कोण, रेखा और समतल के अभिलम्ब के बीच के कोण का पूरक कोण होता है।

सदिश रूप - माना रेखा का समीकरण $\vec{r}=\vec{a}+\lambda\vec{b}$ तथा समतल का समीकरण $\vec{r}\cdot\vec{n}=d$ है। तब रेखा और समतल के अभिलम्ब के बीच का कोण θ होगा



$$\cos\theta = \frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}||\vec{n}|}$$

और यदि रेखा और समतल के बीच का कोण ϕ है तो

$\phi = 90-\theta$

$\sin\phi = \sin(90-\theta) = \cos\theta$

$$\sin\phi = \frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}||\vec{n}|} \quad \text{या} \quad \phi = \sin^{-1}\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}||\vec{n}|}$$

कार्तीय रूप - रेखा $\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$ और समतल $Ax+By+Cz+D=0$ के अभिलम्ब के बीच का कोण θ इस प्रकार है

$$\cos\theta = \frac{a\cdot A+b\cdot B+c\cdot C}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

यदि रेखा और समतल के बीच कोण ϕ हो तो

$\phi = 90-\theta$

$\sin\phi = \sin(90-\theta) = \cos\theta$

$$\sin\phi = \frac{a\cdot A+b\cdot B+c\cdot C}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

* यदि रेखा समतल पर लम्ब है तो यह समतल के अभिलम्ब के समान्तर होगी। अतः $\vec{b}$ तथा $\vec{n}$ समान्तर होंगे। $\vec{b}\times\vec{n}=0$ या $\vec{b}=\lambda\vec{n}$
* यदि रेखा समतल के समान्तर है तो यह समतल के अभिलम्ब के लम्बवत होगी। अतः $\vec{b}$ तथा $\vec{n}$ परस्पर लम्ब होंगे। अतः $\vec{b}\cdot\vec{n}=0$
* कार्तीय रूप में रेखा के समतल पर लम्ब होने का प्रतिबन्ध -

$\vec{b}=p\hat{i}+q\hat{j}+s\hat{k}$ तथा $\vec{n}=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$ समान्तर होंगे।

$$\frac{p}{a}=\frac{q}{b}=\frac{s}{c}$$

* कार्तीय रूप में रेखा के समतल के समान्तर होने का प्रतिबन्ध -

$$\vec{b}\cdot\vec{n}=0$$

$$(p\hat{i}+q\hat{j}+s\hat{k})\cdot(a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k})=0$$

उदाहरण – उस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए, जो मूलबिन्दु से 7 मात्रक दूरी पर है और सदिश $3\hat{i}+5\hat{j}-6\hat{k}$ पर अभिलम्ब है।

हल – $3\hat{i}+5\hat{j}-6\hat{k}$ के अनुदिश मात्रक सदिश

$$\hat{n} = \frac{3\hat{i}+5\hat{j}-6\hat{k}}{\sqrt{(3)^2+(5)^2+(-6)^2}}$$

$$= \frac{3\hat{i}+5\hat{j}-6\hat{k}}{\sqrt{9+25+36}}$$

$$= \frac{3\hat{i}+5\hat{j}-6\hat{k}}{\sqrt{70}}$$

समतल का सदिश समीकरण $\vec{r}\cdot\hat{n}=d$ जबकि $d=7$

$$\vec{r}\left(\frac{3\hat{i}+5\hat{j}-6\hat{k}}{\sqrt{70}}\right)=7$$

उदाहरण – समतलो जिनके सदिश समीकरण $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})=5$ और $\vec{r}\cdot(3\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k})=3$ है, के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल – समतल $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})=5$ का अभिलम्ब $2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ के अनुदिश है। और समतल $\vec{r}\cdot(3\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k})=3$ का अभिलम्ब $3\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$ के अनुदिश। समतलो के बीच कोण θ, अभिलम्बों के बीच के कोण के समान है।

$$\cos\theta = \frac{(2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})\cdot(3\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k})}{\sqrt{4+4+9}\ \sqrt{9+9+25}}$$

$$= \frac{6-6-15}{\sqrt{17}\ \sqrt{43}}$$

$$= \frac{-15}{\sqrt{17}\sqrt{43}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-15}{\sqrt{17}\sqrt{43}}\right)$$

उदाहरण – समतल $2x-y+2z+3=0$ की बिन्दु $(3,-2,1)$ से दूरी ज्ञात कीजिए।

हल – बिन्दु $(3,-2,1)$ से समतल $2x-y+2z+3=0$ की दूरी

$$= \left|\frac{2\cdot3-(-2)+2\cdot1+3}{\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{6+2+2+3}{\sqrt{4+1+4}}\right| = \left|\frac{13}{\sqrt{9}}\right| = \frac{13}{3} \text{ मात्रक}$$

उदाहरण – बिन्दु $(-1,-5,-10)$ से रेखा $\vec{r}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}+\lambda(3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k})$ और समतल $\vec{r}\cdot(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})=5$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु के मध्य की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल – रेखा $\vec{r}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}+\lambda(3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k})$ और समतल $\vec{r}\cdot(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})=5$ से मिलती है।

$$[2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}+\lambda(3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k})]\cdot(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})=5$$

$$(2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})\cdot(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})+\lambda(3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k})\cdot(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})=5$$

$$(2+1+2)+\lambda(3-4+2)=5$$

$$5+1\lambda=5$$

$$\lambda=0$$

सरल रेखा और समतल का प्रतिच्छेद बिन्दु $= 2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$

दिया गया बिन्दु $= -\hat{i}-5\hat{j}-10\hat{k}$

इन बिन्दुओ की मध्य दूरी $= \sqrt{[2-(-1)]^2+(-1+5)^2+(2+10)^2}$

प्रश्नावली

प्रश्न 1- बिन्दु (1,2,-4) से जाने वाली और दोनों रेखाओं $\frac{x-8}{3} = \frac{y+19}{-16} = \frac{z-10}{7}$ और $\frac{x-15}{3} = \frac{y-29}{8} = \frac{z-5}{-5}$ पर लम्ब रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए। (2012)

प्रश्न 2- बिन्दु (-1,3,2) से जाने वाले तथा समतलों $x+2y+3z=5$ और $3x+3y+z=0$ में से प्रत्येक पर लम्ब समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए। (2012)

प्रश्न 3- दो बिन्दुओं (4,2,3) तथा (4,5,7) को मिलाने वाली रेखा की दिक्-कोज्याएँ लिखिए। (2010)

प्रश्न 4- सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ

$$\frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{3} \text{ तथा } \frac{x-2}{2} = \frac{y-6}{3} = \frac{z-3}{4}$$

एक ही समतल $x-2y+z+7=0$ पर स्थित है। (2010)

प्रश्न 5- सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ $\frac{x+3}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{5}$ व $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{5}$ समतलीय है। (2013)

प्रश्न 6- रेखाये जिसके सदिश समीकरण $\vec{r} = (\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}) + \lambda(\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})$ और $\vec{r} = (4\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k}) + \mu(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})$ है, के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। (2014)

प्रश्न 7- यदि एक समतल के अन्तःखण्ड a, b, c है और इसकी मूल बिन्दु से दूरी p इकाई है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{p^2}$$

प्रश्न 8- रेखाओं $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ और $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 9- बिन्दु (5,-3,2) की समतल $\vec{r}\cdot(2\hat{i}-6\hat{j}+3\hat{k}) = 6$ से लम्ब दूरी ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 10- समान्तर समतलों $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}) = 10$ तथा $\vec{r}\cdot(10\hat{i}+15\hat{j}+20\hat{k})+25=0$ के मध्य लम्बवत् दूरी ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 11- सिद्ध कीजिए कि समतलों $4x+4y-5z=12$ तथा $8x+12y-13z=32$ की प्रतिच्छेदी रेखा का समीकरण

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{4} \text{ है।}$$

उत्तरमाला 1→ $\vec{r} = \hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k} + \lambda(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$, 2→ $7x-8y+3z+25=0$, 3→ $0, 3/5, 4/5$
6→ $3/\sqrt{19}$, 8→ $2\sqrt{29}$, 9→ 4, 10→ $40/5\sqrt{29}$ इकाई