रैखिक प्रोग्रामन

(Linear Programming)

कार्य विधि (WORKING RULE)

इस विधि में निम्न पदों (Steps) का समाविष्ट है।

(i) रैखिक प्रोग्रामन समस्या (L.P.P.) का सुसंगत क्षेत्र (feasible region) ज्ञात करते हैं तथा उसके कोणीय बिन्दुओं (शीर्षों) को या तो निरीक्षण (inspection) से या दो सीमा (boundary) रेखाओं के प्रतिच्छेदन बिन्दु (intersecting point) को रेखाओं के समीकरणों को हल करके उस बिन्दु को ज्ञात करते हैं।

(ii) उद्देश्य फलन (objective function) $Z = ax + by$ का मान प्रत्येक कोणीय बिन्दु (शीर्ष) पर ज्ञात करते हैं। माना कि M तथा m क्रमशः इन बिन्दुओं पर अधिकतम (maximum) तथा न्यूनतम (minimum) मान प्रदर्शित करते है।

iii) जब सुसंगत क्षेत्र (feasible region) परिबद्ध (bounded) है, M तथा m उद्देश्य फलन Z के अधिकतम (maximum) तथा न्यूनतम (minimum) मान है।

iv) जब सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध (Unbounded) हो तो हम निम्नलिखित विधि का उपयोग करते हैं :

(a) M को Z का अधिकतम मान लेते हैं। यदि $ax + by > M$ द्वारा प्राप्त अर्ध-तल (half-plane) का कोई बिन्दु सुसंगत क्षेत्र में न पड़े, अन्यथा (otherwise) Z कोई अधिकतम मान नहीं है।

(b) m को Z का न्यूनतम मान लेते है यदि $ax + by < m$ द्वारा प्राप्त खुले अर्ध-तल (Open half-plane) तथा सुसंगत क्षेत्र में कोई बिन्दु उभयनिष्ठ नहीं है, अन्यथा (otherwise) Z का कोई न्यूतनम मान नहीं है।

रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं के भिन्न प्रकार (Different Types of Linear Programming Problems)

I. उत्पादन संबंधी समस्याएँ (Manufacturing Problems)—इस प्रकार की समस्याओं से हम ज्ञात करते हैं कि विभिन्न उत्पादनों (Prodcuts) के कितने नग (items/units), जो बिक जाए, बनाने (तैयार करने) में एक निश्चित (fixed), प्रति नग जनशक्ति (manpower), मशीन के घंटे (machine hours), श्रम के घंटे (labour hours), निर्माण (उत्पादन) में व्यय (cost), माल भंडारण गोदाम (ware house) में प्रत्येक उत्पादन को रखने के लिए स्थान आदि को दृष्टि में रखते हुए अधिकतम लाभ (maximum profit) कमाया जा सके।

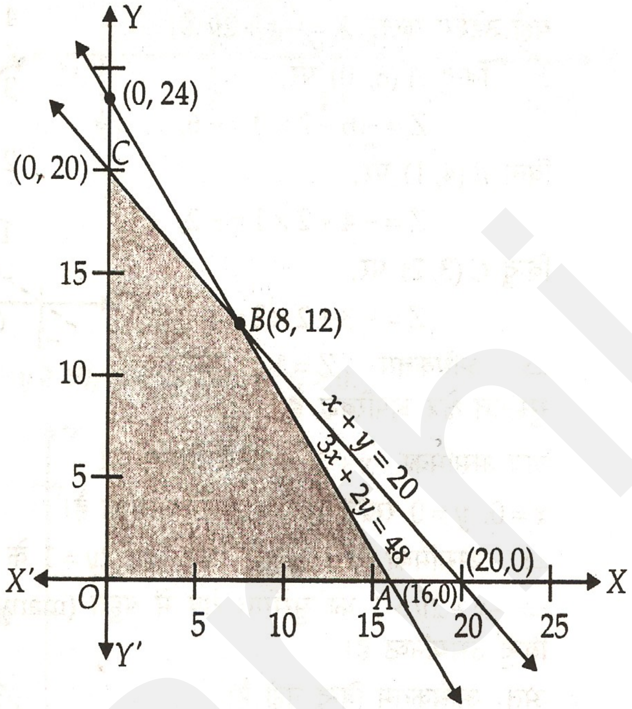
II. आहार संबंधी समस्याएँ (Diet Problems)—इस प्रकार की समस्याओं में हम ज्ञात करते हैं कि विभिन्न प्रकार के घटक (Constituents)/पोषक (nutrients) तत्त्व आहार में कितनी मात्रा (amount) में प्रयोग किए जाएँ जिससे उसमें (आहार में) सभी पोषक तत्त्वों की न्यूनतम आवश्यक मात्रा (minimum required amount) कम-से-कम लागत (minimum cost) पर प्राप्त हो।

III. परिवहन संबंधी समस्याएँ (Transportation Problems)—इस प्रकार की समस्याओं में हम परिवहन प्रणामी (transportation schedule) को तय (निश्चित) करते हैं जिससे संयंत्रों (plants)/कारखाने (factories) से विभिन्न स्थानों (different Locations) पर स्थित (situated) विभिन्न बाजारों (different markets) में उत्पादनों (products) को भेजने में परिवहन व्यय (transporting cost) न्यूनतम (minimum) हो।

उदाहरण (Example)

उदाहरण—1: A dealer wishes to purchase a number of fans and sewing machines. He has only Rs. 5,760 to invest and has space for at most 20 items. A fan and sewing machine cost Rs. 360 and 240 respectively. He can sell a fan at a profit of Rs. 22 and sewing machine at profit of Rs. 18. Assumming that he can sell whatever he buys, how should he invest his money in order to maximise his profit? Translate the problem into L.P.P. and solve it graphically.

हल : यहा एक व्यापारी, जिसके पास निवेश के लिए 5,760 रुपये तथा 20 नग समान रखने के लिए जगह है, पंखा एवं सिलाई मशीन खरीदना चाहता है। एक पंखा एवं एक सिलाई मशीन का मूल्य क्रमशः 360 रुपये एवं 240 रुपये हैं। वह एक पंखा पर 22 रुपये एवं एक सिलाई मशीन पर 18 रुपये लाभ कमाते हुए सभी नग बेच लेगा, तो वह चाहता है कि किस तरह निवेश करें कि अधिकतम लाभ हो।



माना कि व्यापारी x पंखे तथा y सिलाई मशीन खरीदता है।

अब प्रश्नानुसार उद्देश्य फलन $Z = 22x + 18y$ है तथा व्यवरोध

$360x + 240y \le 5760,\ x + y \le 20, x \ge 0, y \ge 0$ है।

$\Rightarrow Z = 22x + 18y$, जबकि

$3x + 2y \le 48,\ x + y \le 20,\ x \ge 0,\ y \ge 0,$ जो एक L.P.P. है। व्यवरोधों के निकाय द्वारा निर्धारित सुसंगत क्षेत्र $OABC$ है जिसके कोनीय बिन्दु O, A, B तथा C के निर्देशांक क्रमशः $(0,\ 0), (16,\ 0), (8, 12)$ तथा $(0,\ 20)$ हैं।

उद्देश्य फलन $Z = 22x + 18y$ है।

$\therefore$ बिन्दु $O\,(0,\ 0)$ पर, $Z = 22 \times 0 + 18 \times 0 = 0,$

बिन्दु $A\,(16, 0)$ पर, $Z = 22 \times 16 + 18 \times 0 = 352$

बिन्दु $B\,(8, 12)$ पर, $Z = 22 \times 8 + 18 \times 12 = 176 + 216 = 392,$

बिन्दु $C\,(0, 20)$ पर, $Z = 22 \times 0 + 18 \times 20 = 360.$

बिन्दु $(8, 12)$ पर अधिकतम लाभ $Z = 392$ रुपये हैं।

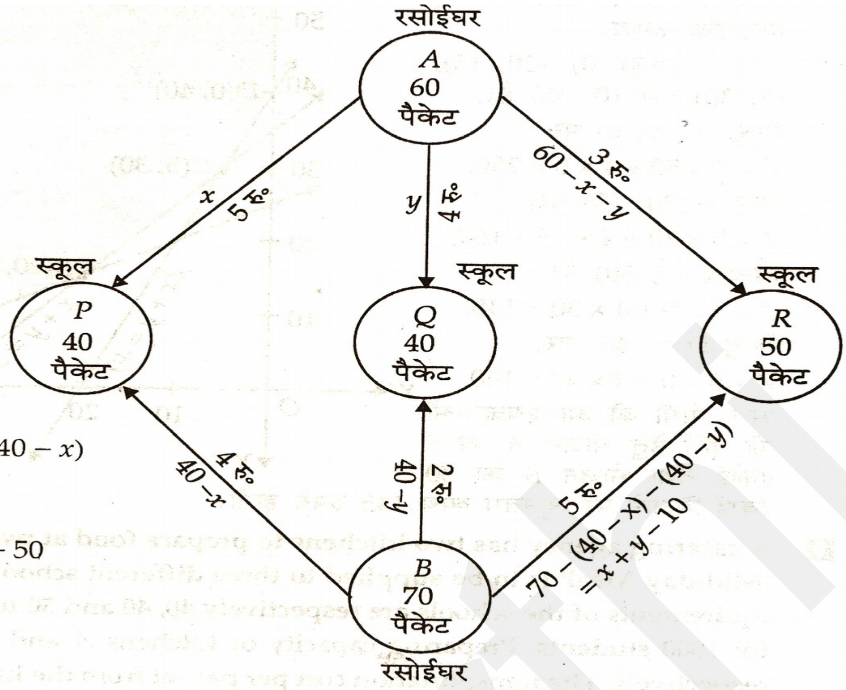
अतः व्यापारी 8 पंखा तथा 12 सिलाई मशीन के निवेश पर अधिकतम लाभ 392 रुपये पाएगा।

उदाहरण–2: एक भोजन प्रबंधक को दो रसोइघर A तथा B है। इन स्थानों से तीन स्कूल, जो P, Q तथा R जगह पर स्थापित हैं, पर मध्य दिवस भोजन देना है। इन स्कूलों की मासिक आवश्यकताएँ क्रमशः 40, 40 तथा 50 भोजन पैकेट की है। एक पैकेट में 1000 विद्यार्थियों का भोजन है। रसोईघर A तथा B के क्रमशः 60 तथा 70 पैकेट प्रतिमाह तैयार करने की क्षमता है। रसोईघर से स्कूल तक प्रति पैकेट परिवहन व्यय निम्नलिखित हैं :

प्रति पैकेट परिवहन व्यय (रुपये में)		
को	से	
	A	B
P	5	4
Q	4	2
R	3	5

कितने-कितने पैकेट प्रत्येक रसोईघर से स्कूल तक पहुँचाएँ जाएँ कि परिवहन व्यय न्यूनतम हो? न्यूनतम व्यय भी ज्ञात करें।

हल : माना कि रसोईघर A से x पैकेट स्कूल P को तथा y पैकेट स्कूल Q को पहुँचाया जाता है, तो समस्या को आरेख द्वारा निम्न रूप में दिखलाया जा सकता है :



यहाँ हम पाते हैं कि

$x \geq 0,\ y \geq 0,$

$40 - x \geq 0 \ \Rightarrow\ x \leq 40,$

$40 - y \geq 0 \ \Rightarrow\ y \leq 40,$

$60 - x - y \geq 0 \ \Rightarrow\ x + y \leq 60,$

$x + y - 10 \geq 0 \ \Rightarrow\ x + y \geq 10.$

कुल परिवहन व्यय

$Z = 5x + 4y + 3(60 - x - y) + 4(40 - x) + 2(40 - y) + 5(x + y - 10)$

$= 5x + 4y + 180 - 3x - 3y + 160 - 4x + 80 - 2y + 5x + 5y - 50$

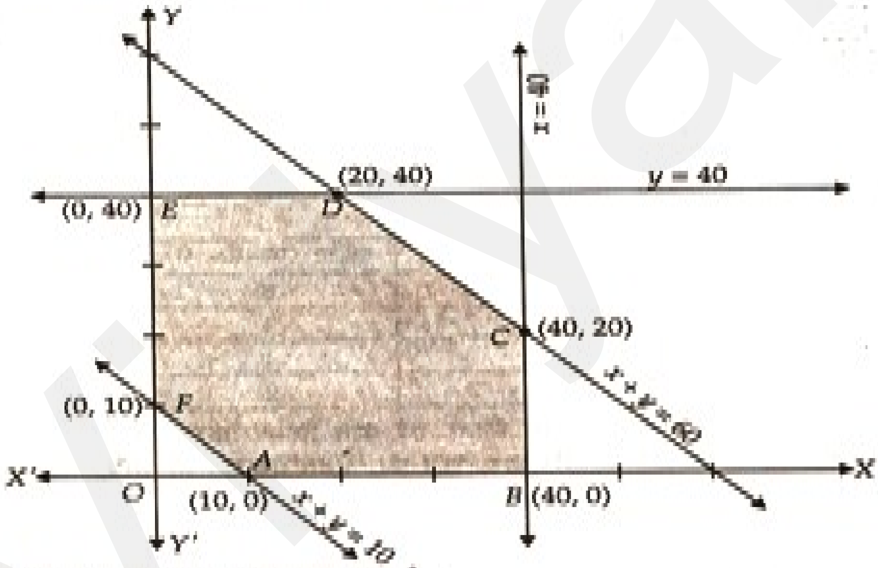
$= 3x + 4y + 370$

अब समस्या का रूप (L. P. P.) में हुआ, न्यूनतमीकरण

$Z = 3x + 4y + 370$, जबकि व्यवरोध हैं,

$x \leq 40,\ y \leq 40,\ x + y \leq 60,\ x + y \geq 10,\ x \geq 0,\ y \geq 0.$

व्यवरोधों के निकाय द्वारा निर्धारित सुसंगत क्षेत्र $ABCDEF$ है जिसके कोणीय बिन्दु $A\,(10, 0)$, $B\,(40, 0)$, $C\,(40, 20)$, $D\,(20, 40)$, $E\,(0, 40)$ तथा $F\,(0, 10)$ हैं।



कोणीय बिन्दु पर $Z = 3x + 4y + 370$ का मान है :

बिन्दु	Z का मान
$A\,(10, 0)$	$Z = 3 \times 10 + 4 \times 0 + 370 = 400$
$B\,(40, 0)$	$Z = 3 \times 40 + 4 \times 0 + 370 = 490$
$C\,(40, 20)$	$Z = 3 \times 40 + 4 \times 20 + 370 = 570$
$D\,(20, 40)$	$Z = 3 \times 20 + 4 \times 40 + 370 = 590$
$E\,(0, 40)$	$Z = 3 \times 0 + 4 \times 40 + 370 = 530$
$F\,(0, 10)$	$Z = 3 \times 0 + 4 \times 10 + 370 = 410$

स्पष्टतः बिन्दु $(10, 0)$ पर $Z = 400$ न्यूनतम है।

अतः रसोईघर A से स्कूल P, Q, R में क्रमशः 10, 0, 50 पैकेटों तथा रसोईघर B से स्कूल P, Q, R में क्रमशः 30, 40, 0 पैकेटों का परिवहन होना चाहिए जिससे न्यूनतम परिवहन व्यय 400 रु. का होगा।