XII B

Page No. ______
Date ______

प्रायिकता (Probability)

विश्व में सामान्यतः दो प्रकार के प्रयोग है। प्रथम प्रकार के प्रयोगों के परिणाम निश्चित रहते है। इन्हें बार-2 दोहराने के बाद परिणाम एक ही आते है।

जैसे :- काँच का अपवर्तनांक चाहे किसी विधि से निकाला जाय सदैव 1.5 आता है।

द्वितीय प्रकार के प्रयोग वे है जिन्हें बार-2 दोहराने से परिणाम बदल जाते है, क्योंकि इनके परिणाम संयोग पर निर्भर करते है –

जैसे :- 1- सिक्के को फेंकने से यह निश्चित नहीं है कि शीर्ष आयेगा या पुच्छ।

2- पासे को यदृच्छया फेंकने से 1,2,3,4,5,6 मे से कौन सा अंक ऊपर आयेगा, निश्चित नहीं है।

एक समय था जब प्रायिकता का सिद्धान्त जुआरियों और सटोरियों तक ही सीमित था, इसकी उत्पत्ति इन्हीं की प्रेरणा से हुई। जुआरियों और सटोरियों ने अपने खेलों से सम्बन्धित समस्याओं को गणितज्ञ गैलीलियो, पैस्कल, फर्मा आदि के सम्मुख रखा। उनके गणितीय अध्ययन से प्रायिकता सिद्धान्त की उत्पत्ति हुई। गणितज्ञ लाप्लास, गॉस, बरनौली ने इस सिद्धान्त का विकास किया। ~~अब~~ वर्तमान मे इसका उपयोग प्राकृतिक, ~~ि~~ भौतिक विज्ञान, अर्थशास्त्र व्यवसाय, बीमा व्यवसाय, अवसर आधारित क्रीड़ाओं (खेल) आदि मे किया जाता है। प्रायिकता सिद्धान्त आधुनिक गणित की अत्यन्त रोचक शाखाओं मे से है और ज्ञान के अनेक क्षेत्रों मे इस्तेमाल के लिये महत्वपूर्ण है।

परिभाषा :- (Definition) विभिन्न परिस्थितियों मे किसी घटना के घटित होने की अनिश्चितता की गणितीय माप को प्रायिकता कहते है।

Page No.
Date

जैसे :- आज वर्षा हो सकती है या आज तूफान आने
As
की सम्भावना है।

यदि कोई घटना a प्रकार से हो और b प्रकार से न हो, जबकि उसके होने और न होने की सम्भावनाएं समान हो तो

उसके होने की प्रायिकता $= \frac{a}{a+b}$

$= \frac{\text{अनुकूल परिणाम प्राप्त होने की सम्भावनाये}}{\text{कुल सम्भव परिणामों की संख्या}}$

इसी प्रकार घटना के न होने की प्रायिकता $= \frac{b}{a+b}$

प्रायिकता इकाई :- यदि कोई घटना होनी निश्चित है तो वह प्रत्येक स्थिति मे अवश्य होगी जिसे उस घटना की प्रायिकता इकाई कहते है इसका मान = 1 होता है।
Probability Unit

यदि किसी घटना के होने की प्रायिकता P है तो उसके न होने की प्रायिकता 1-P होती है। अर्थात कुल प्रायिकता = 1

यदृच्छया :- बिना पक्षपात किये हुए प्रयोग करना यदृच्छया कहलाता है।
Random

यादृच्छिक परीक्षण :- वह परीक्षण जिसमे एक से अधिक परिणाम सम्भव हो तथा परीक्षण के पूर्ण होने से पहले परिणाम बताना सम्भव न हो यादृच्छिक परीक्षण कहलाता है।
Random experiment

जैसे :- यदि एक सिक्के को उछाले तो प्राप्त परिणाम चित या पट मे से क्या होगा यह अनिश्चित है।
As

परिणाम :- किसी यादृच्छिक परीक्षण के किसी सम्भावित नतीजे को परिणाम कहते है।
outcomes

जैसे :- एक पासे को फेकने पर पांसे के ऊपरी फलक पर अंकित बिन्दुओं की संख्या इस परीक्षण के परिणाम 1, 2, 3, 4, 5 या 6 है।
As

प्रतिदर्श समष्टि (Sample space) :- किसी यादृच्छिक परीक्षण के सभी सम्भावित परिणामों का समुच्चय प्रतिदर्श समष्टि कहलाता है, इसे संकेत S द्वारा व्यक्त किया जाता है।

जैसे (As) :- पासे की एक फेंक के परीक्षण पर पांसे की ऊपर की ऊपरी फलक पर बिन्दुओं की संख्या के परिणाम 1, 2, 3, 4, 5, 6 है तो प्रतिदर्श समष्टि

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

एक सिक्के को उछालने पर चित (Head) व पट (Tail) आता है तो प्रतिदर्श समष्टि

$S = \{H, T\}$

प्रतिदर्श बिन्दु (Sample point) :- प्रतिदर्श समष्टि S का प्रत्येक अवयव प्रतिदर्श बिन्दु कहलाता है।

प्रतिदर्श समष्टि के गुण (Properties of sample space) :- ① प्रतिदर्श समष्टि का प्रत्येक अवयव प्रयोग के किसी सम्भव परिणाम को व्यक्त करता है।

② प्रतिदर्श समष्टि के परिणाम परस्पर अपवर्जी होते है, अर्थात एक समय मे एक ही परिणाम सम्भव है।

③ सभी सम्भव परिणामों मे से एक परिणाम का आना निश्चित है।

घटना (Event) :- प्रतिदर्श समष्टि S के किसी उपसमुच्चय को घटना कहते है जिसे $E \subset S$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

जैसे (As) :- एक सिक्के को यदृच्छया उछाला जाता है तो H व T क्रमश: शीर्ष व पुच्छ व्यक्त करते है तो $S = \{H, T\}$

शीर्ष ऊपर आने की घटना $E_1 = \{H\}$

पुच्छ ऊपर आने की घटना $E_2 = \{T\}$

इस प्रकार $E_1 \subset S$ तथा $E_2 \subset S$

एक घटना का घटित होना :- occurrence of an event किसी परीक्षण के प्रतिदर्श समष्टि S की घटना E घटित हुई कही जाती होती है यदि परीक्षण का परिणाम ω इस प्रकार हो कि

$$\omega \in E$$

यदि घटना घटित नहीं होती है तो

$$\omega \notin E$$

जैसे :- As पासे की फेंक में परिणाम ω = 1, 2, 3, 4, 5, 6 कोई भी फेंक आ सकता है।

सम अंक आने की घटना E = 2, 4, 6

सम अंक आना एक घटना E है

प्रतिदर्श समष्टि $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ऊपर फलक पर 2, 4, 6 अंक प्राप्त होता है तो

$E = \{2, 4, 6\}$

$E \subset S$ अतः घटना E घटित हुई

यदि पासे पर प्राप्त अंक 1, 3, 5 प्राप्त होता है तो घटना E घटित नहीं होती है

घटनाओं की संक्रियाये :- operations on events ये निम्न प्रकार होती है।

घटनाओं का संघ :- Union of events :- E_1 व E_2 प्रतिदर्श समष्टि S की दो घटनाये है तो वह घटना जिसमें वे सब अवयव उपस्थित हो जो या तो E_1 में हो या E_2 में हो या E_1 व E_2 दोनों में हो। घटना E_1 तथा E_2 का संघ कहा जाता है। इसे $E_1 \cup E_2$ प्रकट करते है।

जैसे :- As पासे की एक फेंक लिये

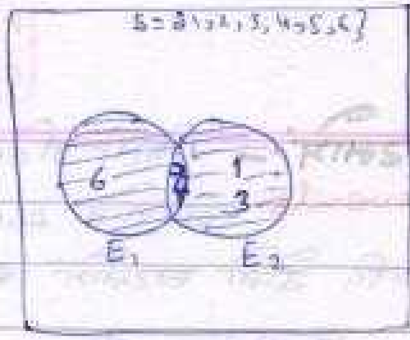
$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

E_1 = सम संख्या प्राप्त होना $= \{2, 4, 6\}$

E_2 = 5 से कम संख्या प्राप्त होना $= \{1, 2, 3, 4\}$

$E_1 \cup E_2 = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

$E_1 \cup E_2 = \{1,2,3,4,6\}$



घटनाओं का सर्वनिष्ठ :- Intersection of events :- E_1 व E_2

प्रतिदर्श समष्टि S की दो घटनाये है तो वह घटना जिसमें वे सब अवयव सम्मिलित होते है जो E_1 व E_2 दोनों घटनाओं में हो तो इसे सर्वनिष्ठ कहा जाता है, और $E_1 \cap E_2$ से प्रकट किया जाता है

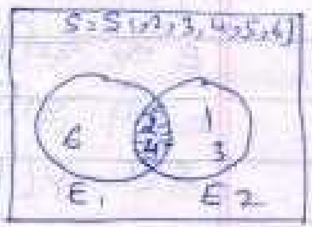
जैसे :- पासे की एक फेंक में प्रतिदर्श समष्टि

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$

E_1 = सम संख्या प्राप्त होना $= \{2,4,6\}$

E_2 = 5 से कम संख्या प्राप्त होना $= \{1,2,3,4\}$

तो $E_1 \cap E_2 = \{2,4\}$



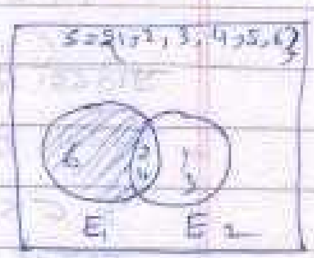
घटनाओं का अन्तर :- Difference of events :- प्रतिदर्श समष्टि S की दो घटनाये E_1 व E_2 है तो E_1 के उन सब अवयवो वाली घटना जिसमें E_2 के अवयव उपस्थित न हो $E_1 - E_2$ कहलाती है

जैसे :- पासे की फेंक में प्रतिदर्श समष्टि $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

E_1 = सम संख्या प्राप्त होना $= \{2,4,6\}$

E_2 = 5 से कम संख्या प्राप्त होना $= \{1,2,3,4\}$

$E_1 - E_2 = \{6\}$



$E_1 - E_2 = \{6\}$

परस्पर अपवर्जी घटनाएँ :- किसी प्रतिदर्श समष्टि S की दो घटनाएँ E_1 व E_2 परस्पर अपवर्जी
mutually exclusive events
कहलाती हैं, यदि दोनों घटनाएँ एक साथ घटित न हों, अर्थात $E_1 \cap E_2 = \phi$

जैसे :- पासे को यदृच्छया एक बार उछाला जाता है तो प्रतिदर्श समष्टि
$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

E_1 = सम अंक ऊपर आने की घटना = $\{2, 4, 6\}$

E_2 = विषम अंक ऊपर आने की घटना = $\{1, 3, 5\}$

तो $E_1 \cap E_2 = \phi$

E_1 व E_2 परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं।

सप्रतिबन्ध प्रायिकता :- किसी प्रतिदर्श समष्टि की दो
Conditional Probability
घटनाएँ दी गयी हों तो एक घटना के घटित होने की सम्भावना का प्रभाव दूसरी घटना की प्रायिकता पर पड़ता है। E व F दो घटनाएँ हैं E के घटित हो जाने पर F घटना होती है तो F की प्रायिकता प्रतिबंधी प्रायिकता कहलाती है इसे $P(F/E)$ से प्रदर्शित करते हैं।

यदि F घटना हो जाने पर E घटना घटित होती है तो इसे सप्रतिबन्ध प्रायिकता कहते हैं जिसे $P(E|F)$ से प्रदर्शित करते हैं

E व F दो घटनाएँ हैं इनके संयुक्त रूप से घटित होने की प्रायिकता, घटना E की प्रायिकता तथा घटना F की प्रतिबन्धी प्रायिकता जबकि E घटित हो चुकी है के गुणनफल के बराबर होती है

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P\left(\frac{F}{E}\right)$$

प्रतिदर्श समष्टि S की दो घटनाएँ E व F हैं

घटना E घट चुकी है तो $P(E) \neq 0$

$E \subset S$

घटना E घट चुकी है तो S के सभी अवयव घटित नहीं हो सकते, S के वही अवयव घटित

होंगे जो E में है।

F के सभी अवयव घटित नहीं हो सकते

F के केवल वही अवयव घटित होंगे जो E में है इसे $E \cap F$ कहते है।

यदि घटना E के घटित हो चुकने पर घटना F की प्रायिकता $= P(F/E)$

$$P(F/E) = \frac{(E \cap F) \text{ के अनुकूल प्रतिदर्श बिन्दुओ की संख्या}}{E \text{ के अनुकूल प्रतिदर्श बिन्दुओ की संख्या}}$$

$$P\left(\frac{F}{E}\right) = \frac{n(E \cap F)}{n(E)} \quad (1)$$

$n(S)$ से भाग देने पर

$$P(F/E) = \frac{\frac{n(E \cap F)}{n(S)}}{\frac{n(E)}{n(S)}} = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} \quad (2)$$

अतः (1) व (2) से $$P\left(\frac{F}{E}\right) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{n(E \cap F)}{n(E)}$$

जहां $n(E) > 0$

या $$P(E \cap F) = P(E) \cdot P\left(\frac{F}{E}\right)$$

इसी प्रकार घटना F के घटित होने पर घटना E घटित होती है तो

$$P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{n(E \cap F)}{n(F)} \quad \text{जहां } n(F) > 0$$

या $$P(E \cap F) = P(F) \cdot P\left(\frac{E}{F}\right)$$

सप्रतिबंध प्रायिकता के गुण :- (1) E व F प्रतिदर्श समष्टि की दो घटनाये है

Properties of Conditional Probability

तो $P\left(\frac{S}{F}\right) = P\left(\frac{F}{F}\right) = 1$

$\because P(S/F) = P(S \cap F) = P(F) = 1$

Page No.
Date

2- A व B प्रतिदर्श समष्टि S की दो घटनायें है F एक अन्य प्रकार की घटना है जहां $P(F) \neq 0$ तो

$$P\left(\frac{A \cup F}{F}\right) = P(A/F) + P(B/F) - P\left(\frac{A \cap B}{F}\right)$$

यदि A व B अपवर्जी घटनायें है तो $P\left(\frac{A \cap F}{F}\right) = 0$

$$P\left(\frac{A \cap B}{F}\right) = P(A/F) + P(B/F)$$

3- $P\left(\frac{E'}{F}\right) = 1 - P(E|F)$

पूरक घटना :- S सार्वत्रिक समुच्चय है A उप
Complementary event
समुच्चय है तो A' को पूरक समुच्चय कहते है।

$$A' = S - A$$

इसी प्रकार घटना E का पूरक E' है

$$E' = S - E = \{w : w \in S, w \notin E\}$$

$$P\left(\frac{E'}{F}\right) = 1 - P\left(\frac{E}{F}\right)$$

चूंकि $P(S/F) = 1$

$$P\left[\frac{E \cup E'}{F}\right] = 1 \qquad S = E \cup E'$$

$$P\left(\frac{E}{F}\right) + P\left(\frac{E'}{F}\right) = 1 \qquad E \text{ व } E' \text{ परस्पर अपवर्जी घटना है}$$

$$\therefore P(E'/F) = 1 - P(E/F)$$

उदाहरण.- E व F दो घटनायें है $P(E) = 0.6$

$P(F) = 0.3$, $P(E \cap F) = 0.2$

तो $P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{0.2}{0.3} = 2/3$

$P(F/E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Page No. ______
Date

प्रायिकता का गुणन नियम:- multiplication Theory of Probability — E व F एक प्रतिदर्श समष्टि S की दो घटनाये है समुच्चय $E \cap F$ दोनो घटना E व F के घटित होने को दर्शाता है या $E \cap F$ घटना E व F के युगपत घटित होने को दर्शाता है। घटना $E \cap F$ को EF भी लिखा जाता है

घटना F के दिये जाने पर घटना E की सप्रतिबंध प्रायिकता

$$P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \quad \text{जहां } P(F) \neq 0$$

या $P(E \cap F) = P(F) \cdot P(E/F)$ ①

तथा $$P(F/E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} \quad \text{जहां } P(E) \neq 0$$

या $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F/E)$ ②

समीकरण ① व ② को मिलाने पर

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F/E) = P(F)\, P(E/F)$$

इसे प्रायिकता का गुणन नियम कहते है

दो से अधिक घटनाओ के लिये प्रायिकता का गुणन नियम:- यदि E, F, G एक प्रतिदर्श समष्टि की घटनाये है तो

$$P(E \cap F \cap G) = P(E)\, P(F/E)\, P(G/E \cap F)$$

स्वतंत्र घटनाये:- Independent events - यदि किसी एक घटना के घटित होने की सूचना दूसरी घटना की प्रायिकता पर कोई प्रभाव नही डालती है तो वे स्वतंत्र घटनाये कहलाती है। यदि E व F स्वतंत्र घटनाये है तो

$P(F/E) = P(F)$ जहां $P(E) \neq 0$

$P(E/F) = P(E)$ जहां $P(F) \neq 0$

गुणन नियम से

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F/E)$$

यदि E व F स्वतंत्र घटनाये नहीं है तो

$P(E \cap F) \neq P(E).P(F)$

प्रश्न:- ताश के 52 पत्तों की गड्डी में से बिना प्रतिस्थापित किये यदृच्छया दो पत्ते निकाले जाते है, दोनों पत्तों के काले रंग का होने की प्रायिकता ज्ञात करो

हल:- कुल पत्ते = 52

काले रंग के पत्ते = 26

एक काले पत्ते की प्रायिकता $= \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

एक पत्ता खींचने के बाद बचे पत्ते $= 52-1 = 51$

एक काला पत्ता खींचने के बाद शेष बचे काले पत्ते $= 26-1 = 25$

दोनों पत्तों के काले रंग का होने की प्रायिकता

$$= \frac{1}{2} \times \frac{25}{51} = \frac{25}{102}$$ **उत्तर**

प्रश्न:- एक डिब्बे में 15 सन्तरे है जिसमे 12 अच्छे 3 खराब है। 3 सन्तरे अच्छे होने पर बिक्री के लिये स्वीकृत किया जाता है। स्वीकृत होने की प्रायिकता ज्ञात करो

हल:- अच्छे सन्तरे = 12

खराब सन्तरे = 3

12 सन्तरों में से 3 अच्छे सन्तरे निकालने के प्रकार

$$= {}^{12}C_3 = \frac{12!}{3!(12-3)!}$$

$$= \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{3 \times 2 \times 1 \times 9!}$$

$$= \frac{12 \times 11 \times 10}{6} = 2 \times 11 \times 10 = 220$$

15 सन्तरों में से 3 सन्तरे निकालने के प्रकार $= {}^{15}C_3$

$$= \frac{15!}{3!(15-3)!}$$

$$= \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12!}{3 \times 2 \times 1 \times 12!} = \frac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2}$$

$= 5 \times 7 \times 13$

$= 35 \times 13$

$= 455$

स्वीकृत होने की प्रायिकता = 3 अच्छे सन्तरे चुनने की प्रायिकता

$$= \frac{^{12}C_3}{^{15}C_3} = \frac{220}{455} = \frac{44}{91}$$ **उत्तर**

बेज प्रमेय :- (Bayes Theorem) यदि $E_1, E_2, \ldots E_n$ अरिक्त घटनाएँ है जो प्रतिदर्श समष्टि S के विभाजन का निर्माण करती है। अर्थात $E_1, E_2, \ldots E_n$ युग्मत असंयुक्त हैं तो $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n = S$

A ऐसी घटना है जिसकी प्रायिकता शून्येतर है तो

$$P\left(\frac{E_i}{A}\right) = \frac{P(E_i)\,P\left(\frac{A}{E_i}\right)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)\,P\left(\frac{A}{E_j}\right)}$$ जहाँ $i = 1, 2, 3 \ldots n$

एक प्रतिदर्श समष्टि का विभाजन :- (Partition of Sample Space) यदि घटनाएँ $E_1, E_2, E_3, \ldots E_n$ के समुच्चय को प्रतिदर्श समष्टि S के विभाजन को निरूपित करता है यदि

1- $E_i \cap E_j = \phi$ जहाँ $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3, \ldots n$

2- $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \cdots \cup E_n = S$

3- $P(E_i) > 0$ जहाँ $i = 1, 2, 3 \ldots n$

यदि कोई घटना E और उसकी पूरक घटना E' प्रतिदर्श समष्टि S का विभाजन करती है तो

$E \cap E' = \phi$

$E \cup E' = S$

सम्पूर्ण प्रायिकता की प्रमेय :- (Theorem of Total Probability) यदि $E_1, E_2, E_3 \ldots E_n$ प्रतिदर्श समष्टि S का एक विभाजन है और प्रत्येक घटना $E_1, E_2, \ldots E_n$ की प्रायिकता शून्येतर

Page No.
Date

है। A प्रतिदर्श समष्टि के संगत एक घटना है तो

$$P(A) = P(E_1)\,P\left(\frac{A}{E_1}\right) + P(E_2)\,P(A/E_2) + \cdots P(E_n)\cdot P\left(\frac{A}{E_n}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P(E_j)\,P\left(\frac{A}{E_j}\right)$$

प्रश्न: एक थैले पर 4 लाल 4 काली गेंदें हैं। दूसरे थैले मे 2 लाल 6 काली गेंदे है। दोनों थैलो मे से एक गेंद यदृच्छया निकाली जाती है जोकि लाल है। इस बात की प्रायिकता क्या होगी कि गेंद पहले थैले से निकाली गयी है।

हल:- पहले थैले को चुनने की घटना $= E_1$

दूसरे थैले को चुनने की घटना $= E_2$

एक थैले को चुनने की प्रायिकता $= P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}$

पहले थैले गेंदे $= 4$ लाल $+ 4$ काली $= 8$

लाल गेंद चुनने की प्रायिकता $= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

लाल गेंद को A से निरूपित किया जाता है

$P(A/E_1) = \frac{1}{2}$

दूसरे थैले मे गेंदे $= 2$ लाल $+ 6$ काली $= 8$

एक लाल गेंद निकालने की प्रायिकता $P(A/E_2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

लाल गेंद पहले थैले से निकालने की प्रायिकता

$$P\left(\frac{E_1}{A}\right) = \frac{P(E_1)\,P(A/E_1)}{P(E_1)\,P\left(\frac{A}{E_1}\right) + P(E_2)\,P(A/E_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}}$$

Page No.
Date

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2+1}{8}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{\overset{2}{\cancel{8}} \times 1}{3 \times 4} = 2/3$$ उत्तर

यादृच्छिक चर और इसके प्रायिकता बंटन :-
Random Variables and its Probability Distribution

एक यादृच्छिक चर वह फलन होता है जिसका प्रान्त किसी यादृच्छिक परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि होता है।

उदाहरण :- एक सिक्के को दो बार अनुक्रम में उछाले जाने पर परीक्षण का प्रतिदर्श

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

यदि x प्राप्त चितों की संख्या को प्रकट करता है तो x यादृच्छिक चर है। प्रत्येक परिणाम के लिये इसका मान निम्न है।

$X(HH) = 2$
$X(HT) = 1$
$X(TH) = 1$
$X(TT) = 0$

यदि दूसरा चर y, प्रतिदर्श समष्टि S के प्रत्येक परिणाम के लिये चितों की संख्या और पटों की संख्या के घटाव को व्यक्त करता है तो

$y(HH) = 2$
$y(HT) = 0$
$y(TH) = 0$
$y(TT) = -2$

यह एक प्रतिदर्श समष्टि S में x और y दो भिन्न यादृच्छिक चर को परिभाषित करता है।

एक यादृच्छिक चर की प्रायिकता बंटन :- एक यादृच्छिक
Probability Distribution of Random Variable चर x की प्रायिकता

बंटन संख्याओं की निम्नलिखित प्रणाली होती है।

$X : \quad x_1 \quad x_2 \ldots x_n$

$P(X) : \quad P_1 \quad P_2 \ldots P_n$

जहाँ $P_i > 0$ तो $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$ और $i = 1, 2, 3, \ldots n$

वास्तविक संख्या $x_1, x_2, \ldots x_n$ यादृच्छिक चर X के सम्भव मान है।

P_i $(i = 1, 2, 3, \ldots n)$ यादृच्छिक चर X का मान x_i होने की प्रायिकता है।

अर्थात $P(X = x_i) = P_i$

किसी प्रायिकता बंटन के लिये सभी प्रायिकताओं का योग एक होना चाहिए।

यादृच्छिक चर का माध्य :- माना X यादृच्छिक चर है जिसके

Mean of Random Variable सम्भावित मान $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ की क्रमशः प्रायिकता $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ है X का माध्य जिसे μ से व्यक्त करते हैं

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i = E(X)$$

अर्थात x का माध्य चर X के सम्भावित मानों का भारित औसत है जहा प्रत्येक मान को उसकी संगत प्रायिकता से भारित किया गया है।

यादृच्छिक चर X के माध्य को X की प्रत्याशा $E(X)$ कहते है

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i = x_1 P_1 + x_2 P_2 + \ldots x_n P_n$$

अर्थात चर X का माध्य या प्रत्याशा X के सभी सम्भावित मान व संगत प्रायिकताओं के गुणन फलन का योग होता है।

यादृच्छिक चर का प्रसरण :- माना X एक यादृच्छिक चर है

Variance of Random Variable जिसके सम्भावित मान $x_1, x_2 \ldots x_n$

है तथा संगत प्रायिकता $P(x_1)$, $P(x_2)$ --- $P(x_n)$ के साथ विद्यमान है।

$\mu = E(X)$, X का माध्य है X का प्रसरण $Var(X)$ $= \sigma_x^2$ द्वारा निरूपित है तो

$$\sigma_x^2 = Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 P(x_i)$$

या समतुल्यतः $\sigma_x^2 = E(X - \mu)^2$

ऋणेतर संख्या $\sigma_x = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 P(x_i)}$

को यादृच्छिक चर X का मानक विचलन कहते हैं

प्रश्न:- पासों के एक जोड़े को तीन बार उछालने पर द्विकों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

हल:- माना X द्विकों की संख्या निरूपित करता है।

$(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)$ सम्भव द्विक हैं।

स्पष्ट है कि X का मान $0, 1, 2,$ या 3 है।

एक द्विक आने की प्रायिकता $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

एक द्विक न आने की प्रायिकता $= 1 - \frac{1}{6} = 5/6$

$P(X=0) = P$ (एक भी द्विक नहीं)

$$= \frac{5}{6} \times 5/6 \times 5/6 = \frac{125}{216}$$

$P(X=1) = P$ (एक द्विक और दो द्विक नहीं)

$$= \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{25}{216} + \frac{25}{216} + \frac{25}{216} = \frac{75}{216}$$

$P(X=2) = P$ (दो द्विक एक द्विक नहीं)

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{5}{216} + \frac{5}{216} + 5/216 = \frac{15}{216}$$

$P(X=3) = P$ (तीन छिक) $= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

अतः X का अभीष्ट प्रायिकता बंटन निम्न है

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

बरनौली परीक्षण :- Bernouli Traits — एक यादृच्छिक प्रयोग के परीक्षणों को बरनौली परीक्षण कहते है यदि वे निम्न शर्तो को संतुष्ट करते है।

1- परीक्षणों की संख्या परिमित हो।

2- परीक्षण स्वतंत्र होने चाहिए।

3- प्रत्येक परीक्षण के दो परिणाम होने चाहिए सफलता या असफलता।

4- किसी परिणाम की प्रायिकता प्रत्येक परीक्षण मे समान रहनी चाहिए।

द्विपद बंटन :- Binomial Distribution — n बरनौली परीक्षणों वाले एक प्रयोग मे सफलताओं की संख्या की प्रायिकता बंटन $(q+p)^n$ के द्विपद विस्तार द्वारा प्राप्त की जाती है अतः सफलताओं की संख्या X का बंटन निम्न प्रकार से लिखा जाता है।

X	0	1	2	---	x	n
P(X)	${}^nC_0 q^n$	${}^nC_1 q^{n-1} p$	${}^nC_2 q^{n-2} p^2$	---	${}^nC_x q^{n-x} p^x$	${}^nC_n p^n$

इसे प्रायिकता द्विपद बंटन कहते है जिसमें n व p प्राचल है। n व p के दिये हुए पर सम्पूर्ण प्रायिकता बंटन ज्ञात कर सकते है।

प्रश्न :- 52 ताश के पत्तो मे से 5 पत्ते उत्तरोत्तर प्रतिस्थापन सहित निकाले जाते है इसकी प्रायिकता क्या होगी

1- सभी 5 पत्ते हुकम के हो।

2- केवल 3 पत्ते हुकम के हो।

3- एक भी पत्ता हुकम का नहीं हो।

हल :- ताश की गड्डी में कुल 52 पत्ते होते हैं, उसमें 13 पत्ते हुकुम के होते हैं,

एक हुकुम का पत्ता खींचने की प्रायिकता $= \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = p$

हुकुम का पत्ता न खींचने की प्रायिकता $= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = q$

1:- P(सभी 5 पत्ते हुकुम के हों)

$$= {}^5C_0 q^0 p^5 = \frac{5!}{0!(5-0)!} 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5$$

$$= \frac{\cancel{5!}}{1 \times \cancel{5!}} \times \frac{1}{(4)^5}$$

$$= \frac{1}{4^5} = \frac{1}{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4} = \frac{1}{1024}$$

2- P(केवल 3 पत्ते हुकुम के हों)

$$= {}^5C_3 q^{5-3} (p)^3$$

$$= {}^5C_3 \left(\frac{3}{4}\right)^{5-3} \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$= {}^5C_3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$= \frac{5!}{3!(5-3)!} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$= \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!} \times 2!} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{5 \times 4 \times 9}{2 \times 1 \times 4 \times 16 \times 16}$$

$$= \frac{5 \times 9}{2 \times 256}$$

$$= \frac{45}{512}$$

3:- P(एक भी पत्ता हुकुम का नहीं है)

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^5 =$$

$$= \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}$$

$$= \frac{243}{}$$

Page No.
Date

महत्वपूर्ण प्रश्न

1- एक थैले में 5 सफेद, 7 लाल, 4 काली गेंदे है। इनमें से 3 गेंदे यदृच्छया निकाली जाती है। सभी गेंदो के सफेद होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

2- एक परिवार में दो बच्चे है। यदि यह ज्ञात हो कि बच्चों में कम से कम एक बच्चा लड़का है तो दोनों बच्चों के लड़का होने की प्रायिकता क्या है।

3- ताश के 52 पत्तों की एक भली भांति फेंटी गयी गड्डी में से दो पत्ते उत्तरोत्तर बिना प्रतिस्थापन के निकाले जाते है। बादशाहों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

4- एक पांसे को एक बार उछाला जाता है। पांसे पर प्राप्त संख्या 3 का अपवर्त्य होना घटना E से तथा पांसे पर कम संख्या ~~4~~ प्राप्त होना घटना F से निरूपित होती है। ~~o~~ क्या घटना E व F ~~स~~ स्वतंत्र हैं

5:- एक ~~की~~ बक्स में 10 कार्ड है, जिन पर 1 से 10 तक पूर्णांक लिखे हुए है। इनको अच्छी तरह आपस में मिलाया जाता है। बाक्स से यदृच्छया एक कार्ड निकाला जाता है। यदि निकाले गये कार्ड पर 3 से बड़ी संख्या है तो इस संख्या के सम होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

6- एक बहुविकल्पीय परीक्षा में 5 प्रश्न है, जिसमें प्रत्येक के 3 सम्भावित उत्तर है। इसकी क्या प्रायिकता है कि विद्यार्थी केवल अनुमान लगाकर 4 या अधिक प्रश्नों का सही उत्तर दे देगा।

भुवन चन्द्र पाठक
प्रवक्ता - गणित
रा० इ० का० चरकोट
जिला पिथौरागढ़