प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन

इस अध्याय को समझने से पहले पूर्व ज्ञान के रूप में हमें फलन एवं त्रिकोणमितीय फलनों की आधारभूत जानकारी होना आवश्यक है। इन दोनों प्रकरणों की जानकारी हम पूर्व कक्षा में ले चुके है और फलनों की व्यापक जानकारी हम इसी कक्षा के पूर्व अध्याय में भी ले चुके है। अतः ज्यादा विस्तार में न जाकर हम पूर्व ज्ञान को, इस अध्याय को समझने में सहायक बनाने हेतु त्रिकोणमितीय फलनों के प्रांत एवं परिसर को पुनः उद्धृत करते है।

सारणी (1)

त्रिकोणमितीय फलन	प्रांत (Domain)	परिसर (Range)
Sine	R	$[-1, 1]$
cosine	R	$[-1, 1]$
tangent	$R-\{x; x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in z\}$	R
Cotangent	$R-\{x; x = n\pi, n \in z\}$	R
Secant	$R-\{x: x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in z\}$	$R-(-1, 1)$
Cosecant	$R-\{x; x = n\pi, n \in z\}$	$R-(-1, 1)$

उपरोक्त सारणी से स्पष्ट है कि कोई भी त्रिकोणमितीय फलन एकैकी नहीं है। पूर्व ज्ञान के आधार पर हमें यह भी पता है कि फलनों के प्रतिलोम (व्युत्क्रम) का अस्तित्व होने के लिए उसे एकैकी एवं आच्छादक होना आवश्यक है। अतः इन फलनों को व्युत्क्रमणीय बनाने के लिए इनके प्रांतों को निम्नानुसार सीमित करना आवश्यक है।

सारणी-2

त्रिकोणमितीय फलन	प्रांत	परिसर
Sine	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[-1, 1]$
Cosine	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$
tangent	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	R
Cotangent	$(0, \pi)$	R
Secant	$[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$	$R - (-1, 1)$
Cosecant	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$	$R - (-1, 1)$

उपरोक्त सारणी में अब सभी त्रिकोणमितीय फलन एकैकी एवं आच्छादक हैं। अतः ये सभी अब व्युत्क्रमणीय हैं। इनके प्रांतो एवं परिसरो को परस्पर परिवर्तित कर देने पर प्राप्त फलन इन फलनों के प्रतिलोम फलन हैं। इन्हें ही प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन कहते हैं। प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के प्रांत एवं परिसर निम्नवत हैं —

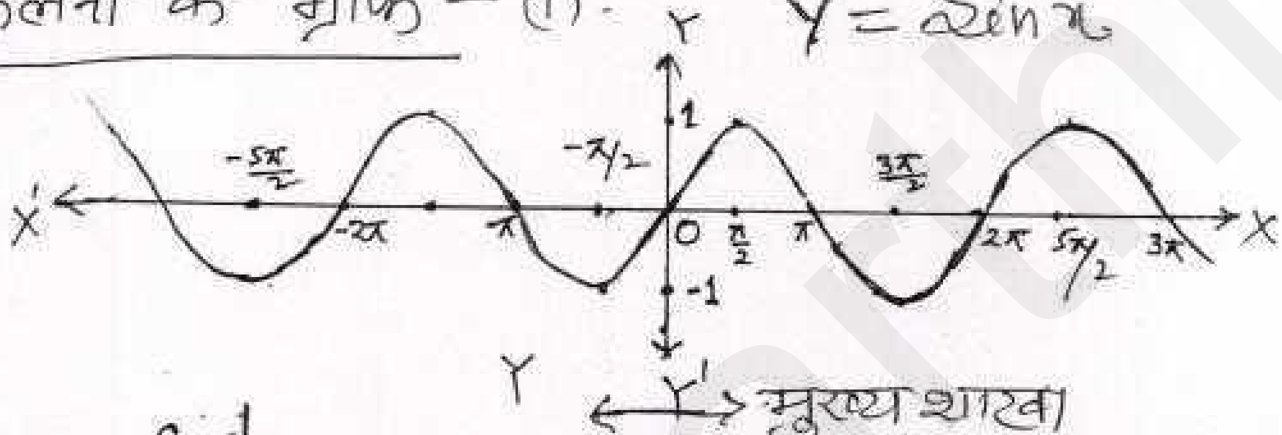
सारणी-3

प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन	प्रांत	परिसर	
$\sin^{-1}$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	मुख्यशाखा
$\cos^{-1}$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	"
$\tan^{-1}$	R	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	"
$\cot^{-1}$	R	$(0, \pi)$	"
$\sec^{-1}$	$R - (-1, 1)$	$[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$	"
$\operatorname{cosec}^{-1}$	$R - (-1, 1)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$	"

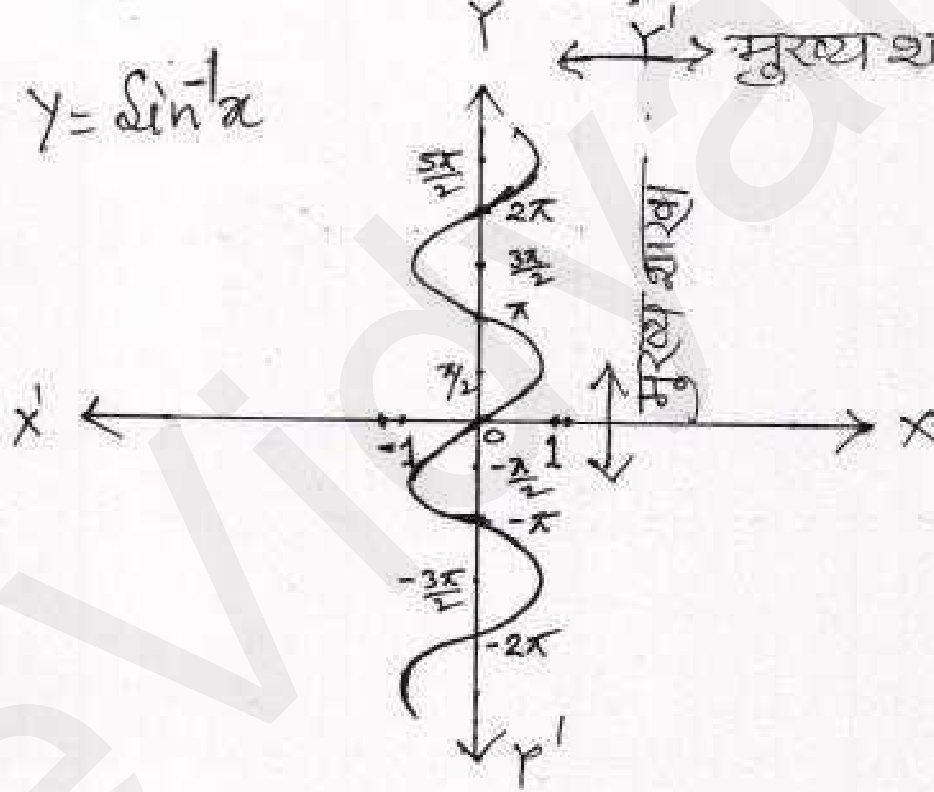
इस प्रकार उपरोक्त सारणी-3 में प्रतिलोम फलनों के

मान कहलाते हैं और परिसर की इस शाखा को मुख्य शाखा या मुख्य मान शाखा कहते हैं।

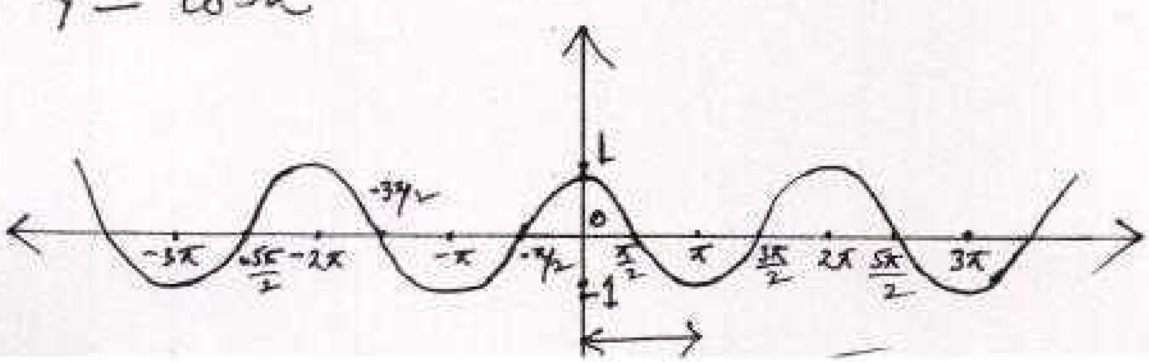
त्रिकोणमितीय फलन एवं संगत प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के ग्राफ – (i) $Y = \sin x$



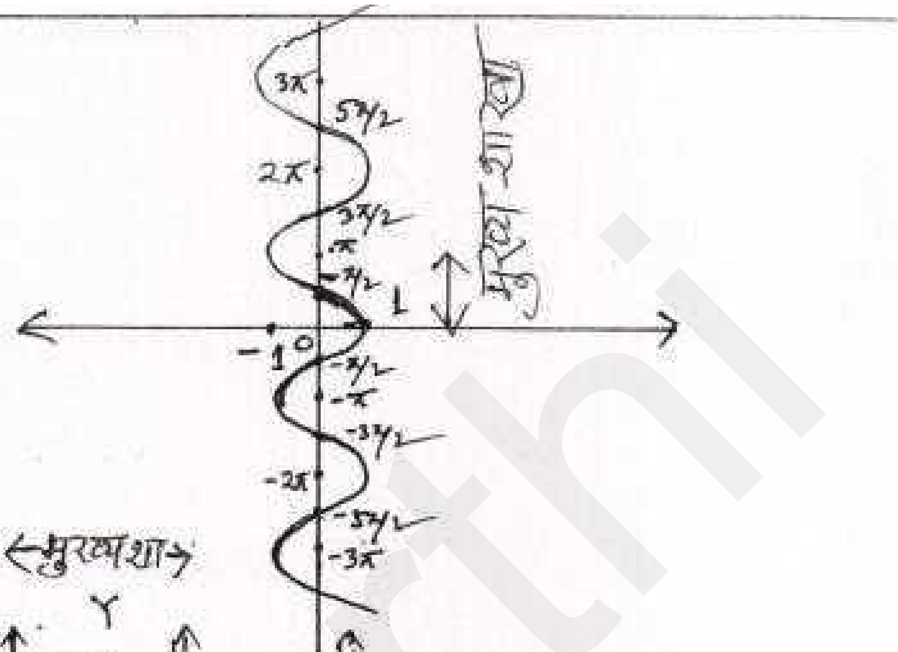
(ii) $Y = \sin^{-1}x$



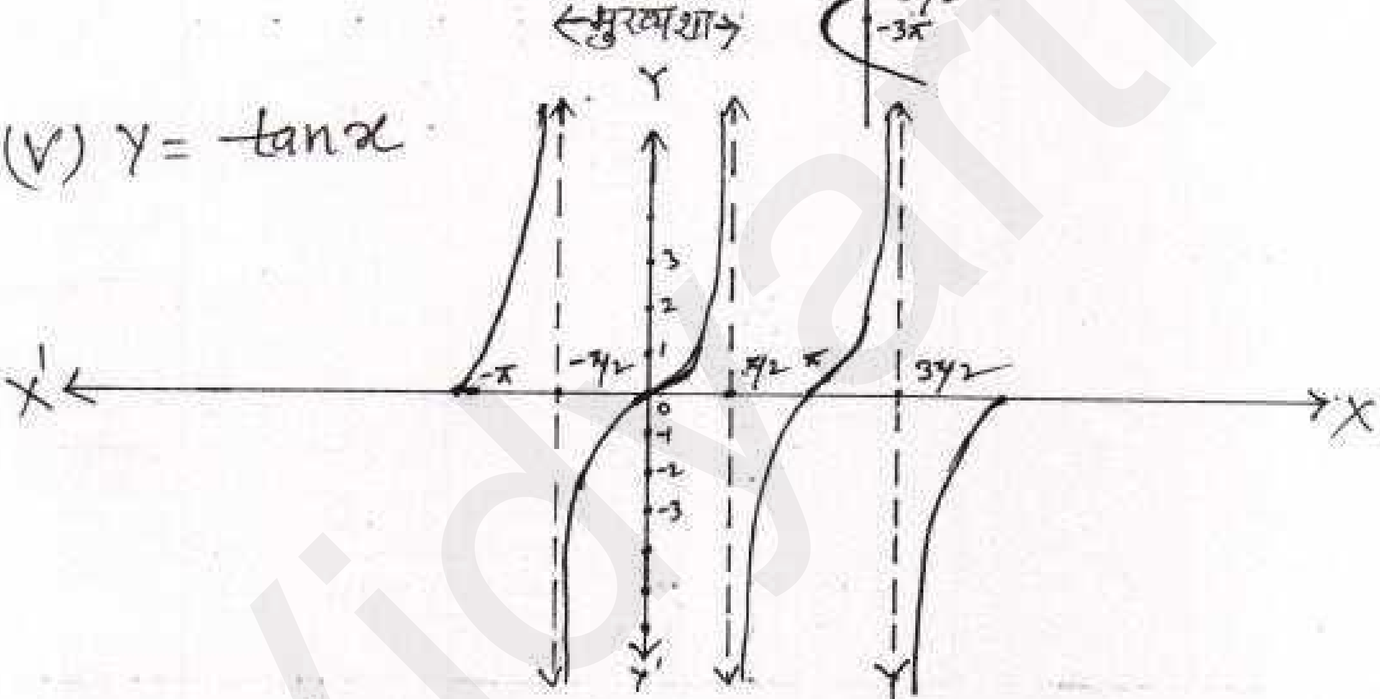
(iii) $Y = \cos x$



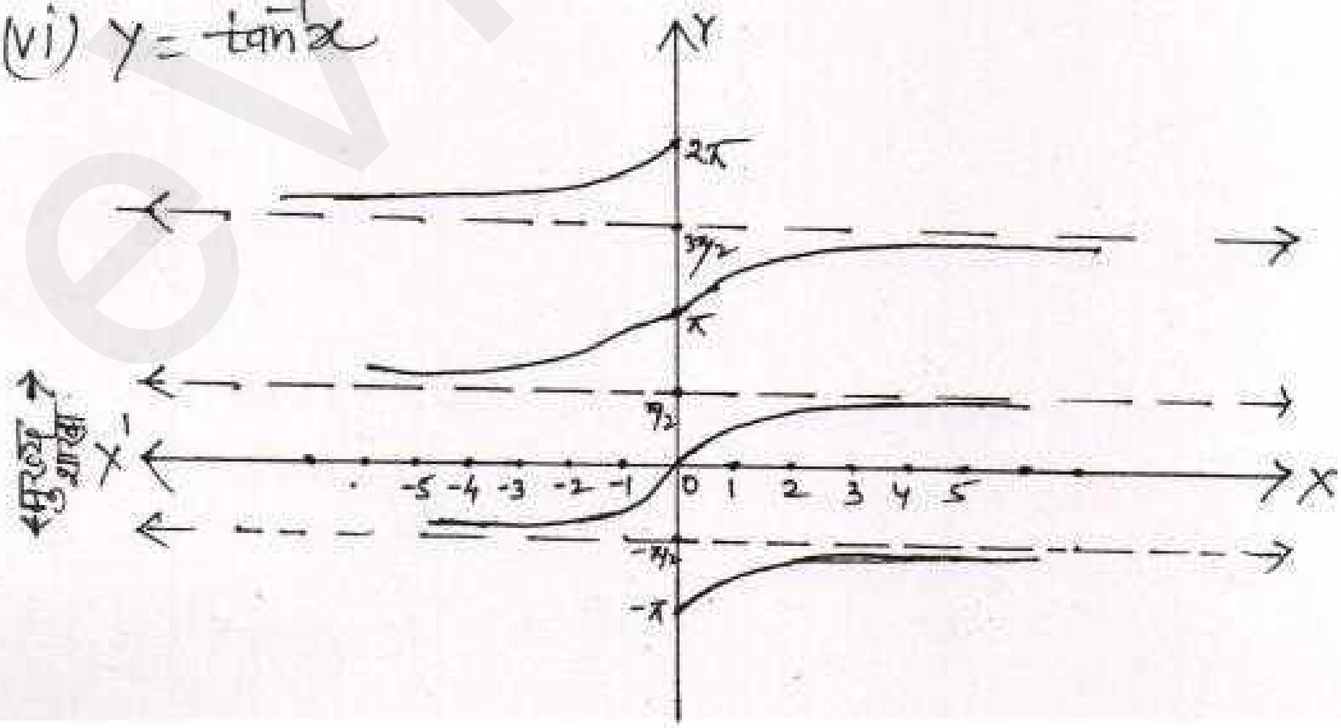
(iv) $y = \cos^{-1}x$



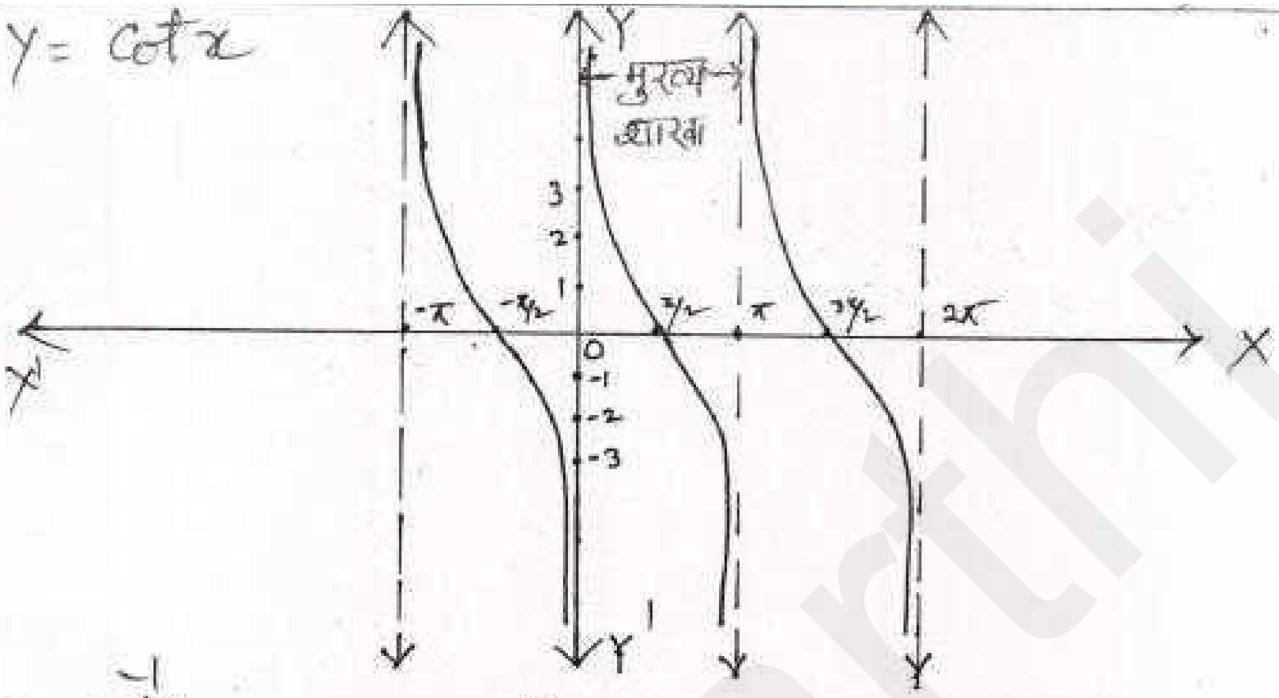
(v) $y = \tan x$



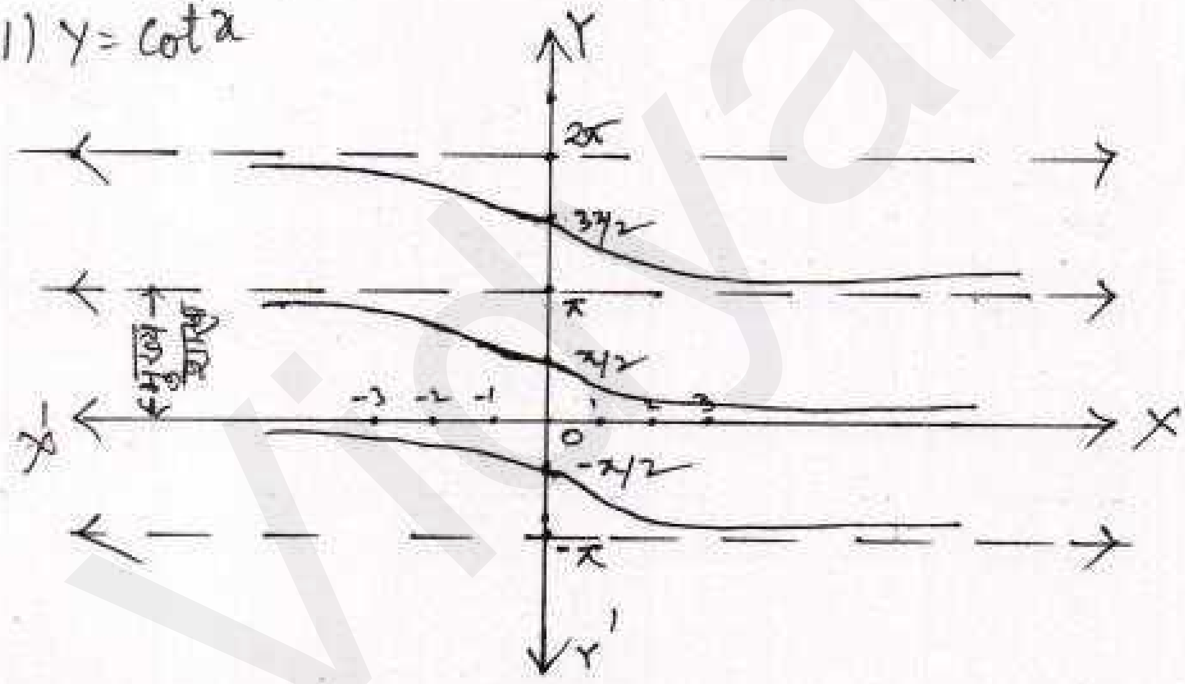
(vi) $y = \tan^{-1}x$



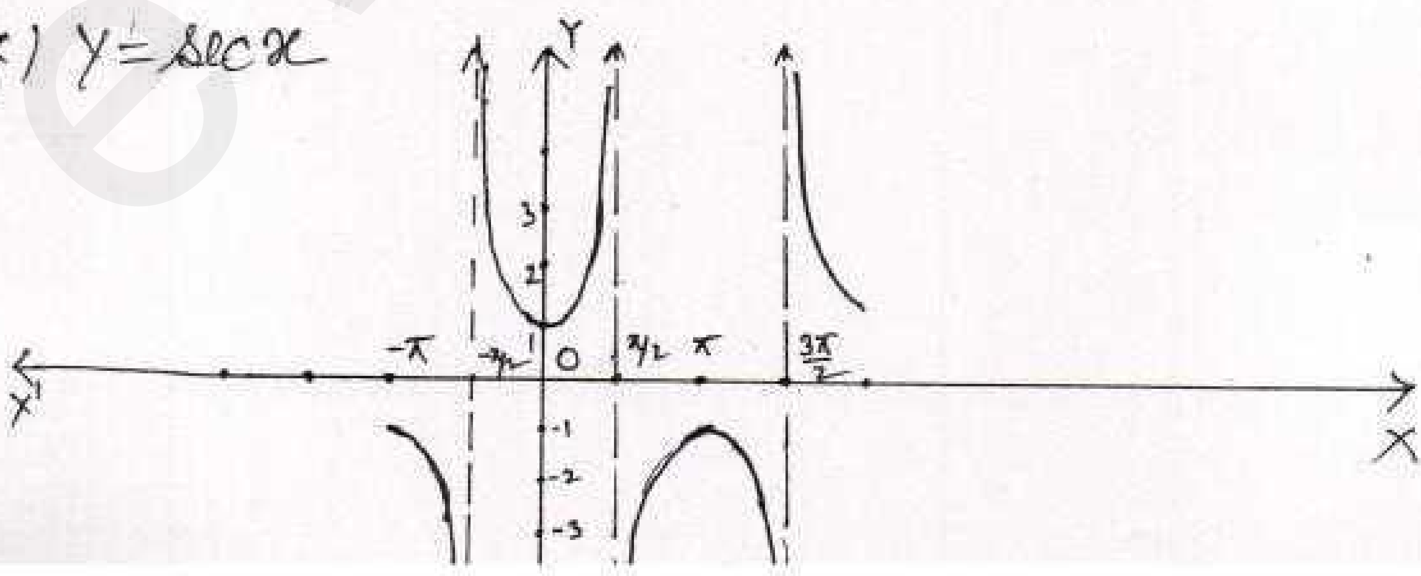
(VII) $y = \cot x$



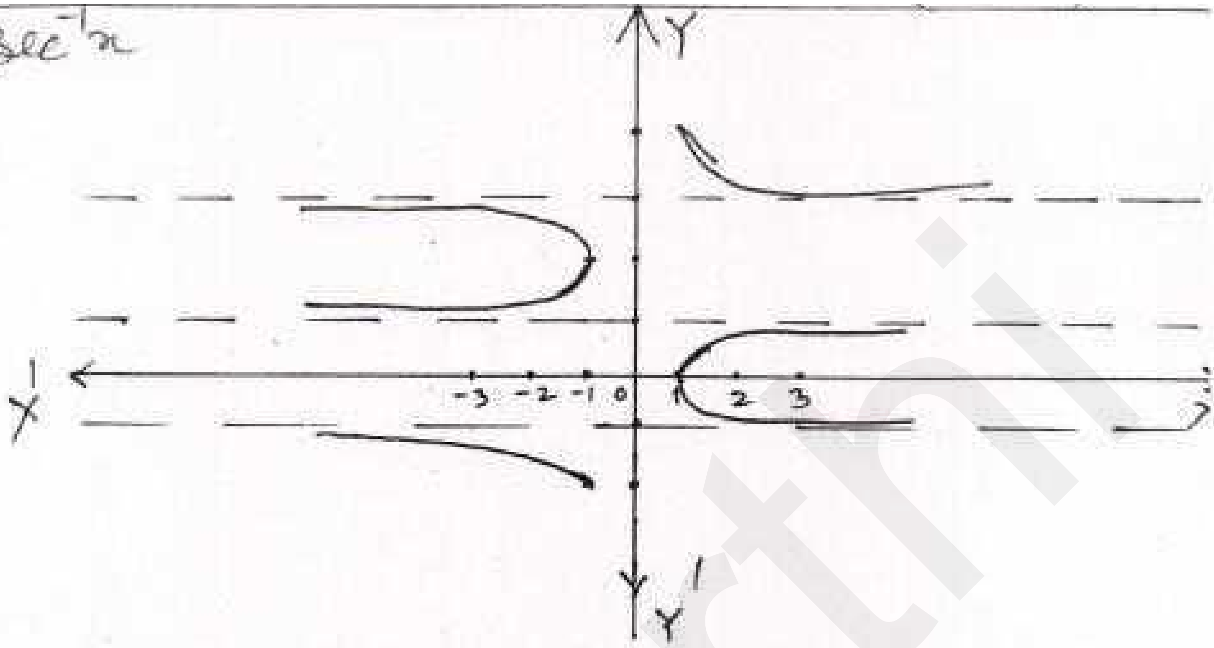
(VIII) $y = \cot^{-1} x$



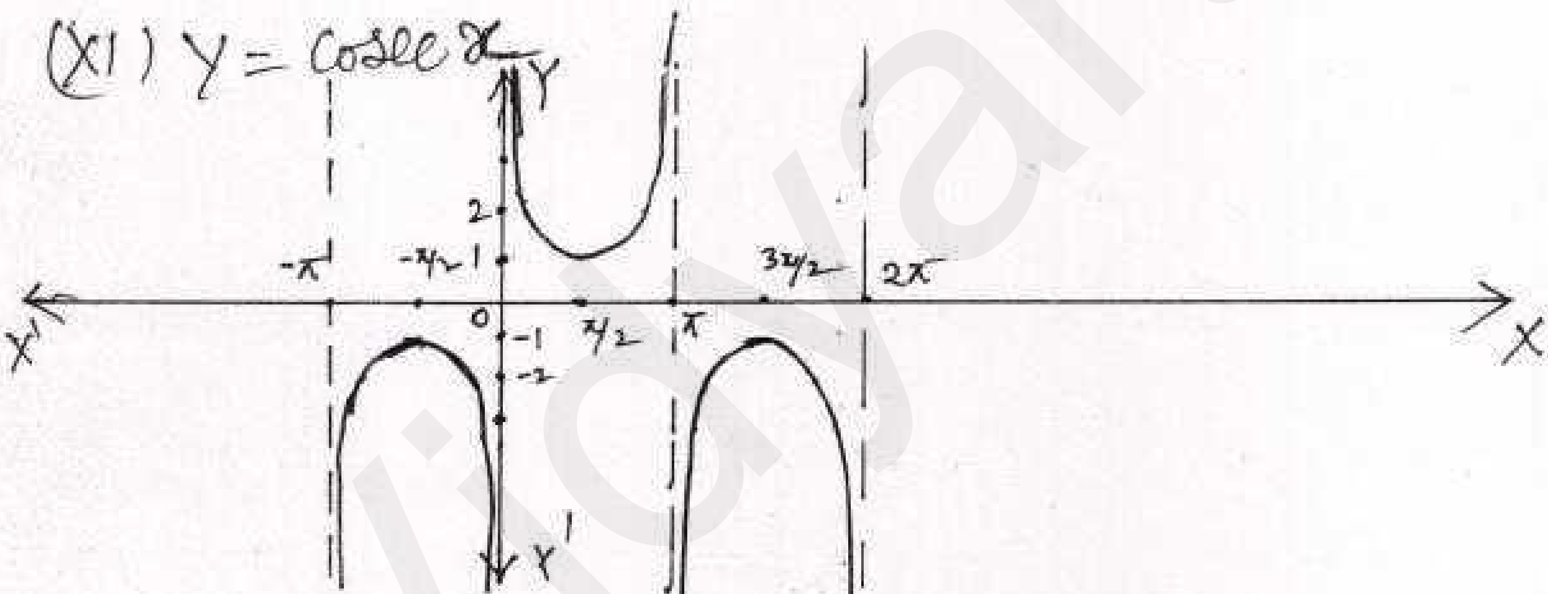
(IX) $y = \sec x$



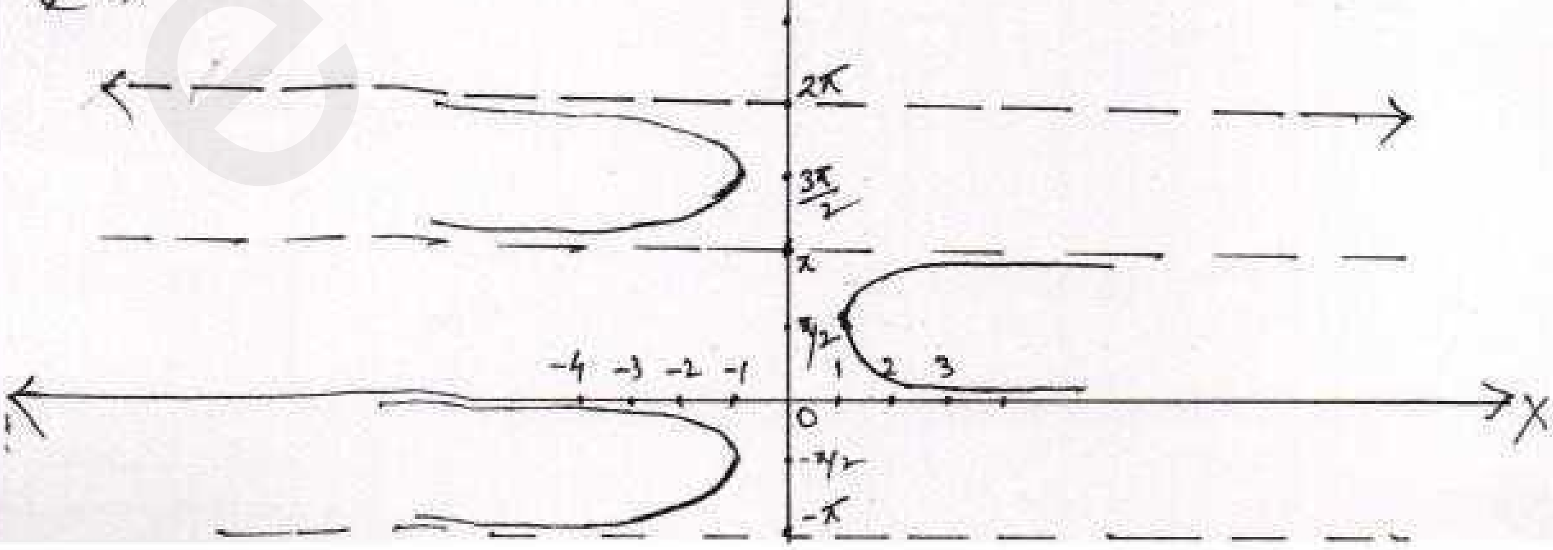
(X). $y = \sec^{-1} x$



(XI) $y = \operatorname{cosec} x$



(XII) $y = \operatorname{cosec}^{-1} x$



उपरोक्त बारह आलेखों (ग्राफों) से स्पष्ट है कि $y = \sin x$ एवं $y = \cos x$ फलन एवं उनके प्रतिलोम सतत है एवं अन्य त्रिकोणमितीय फलन तथा उनके प्रतिलोम फलन सतत नहीं हैं।

वहीं दूसरी ओर $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ तथा उनके प्रतिलोमों को छोड़कर अन्य त्रिकोणमितीय एवं प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन अपनी मुख्य शाखा में सतत हैं।

प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के गुणधर्म

प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के गुणधर्मों को समझने हेतु हमें फलन और कक्षा 11 में पढ़े त्रिकोणमितीय फलनों का अच्छा ज्ञान होना आवश्यक है। ~~प्रतिलो~~ त्रिकोणमितीय फलनों से सम्बंधित विभिन्न बीजीय सर्वसमिकाएँ (सूत्र) आत्मसात होना आवश्यक है। साथ ही प्रतिलोम त्रिको० फलनों के गुणधर्मों को अनेक भागों में बाँटते हुए उन्हें क्रमबद्ध रुप में समझना और याद रखना भी लाभकारी होगा। अतः एक जैसी सर्वसमिकाओं को एक साथ रखते हुए इन फलनों से सम्बन्धित विभिन्न तथ्य एवं निष्कर्ष निम्नवत हैं-

1- दो फलन $f: X \to Y$ एवं $g: Y \to X$ यदि एक दूसरे के व्युत्क्रम (प्रतिलोम) हों तो हमें ज्ञात है कि gof एवं fog दोनों फलन तत्समक फलन होते हैं, अर्थात,

$$gof(x) = x$$
$$fog(y) = y$$

ठीक इसी प्रकार त्रिकोणमितीय फलन एवं उसका संगत प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन एक दूसरे के

एक तत्समक फलन देता है अतः निष्कर्षतः –

$\sin(\sin^{-1}x) = x$ $\sin^{-1}(\sin\theta) = \theta$

$\cos(\cos^{-1}x) = x$ $\cos^{-1}(\cos\theta) = \theta$

$\tan(\tan^{-1}x) = x$ $\tan^{-1}(\tan\theta) = \theta$

$\cot(\cot^{-1}x) = x$ $\cot^{-1}(\cot\theta) = \theta$

$\sec(\sec^{-1}x) = x$ $\sec^{-1}(\sec\theta) = \theta$

$\operatorname{cosec}(\operatorname{cosec}^{-1}x) = x$ $\operatorname{cosec}^{-1}(\operatorname{cosec}\theta) = \theta$

2-(i) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{cosec}^{-1}x$, $x \geq 1$ या $x \leq -1$

(ii) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sec^{-1}x$, $x \geq 1$ या $x \leq -1$

(iii) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \cot^{-1}x$, $x > 0$

(iv) $\cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \tan^{-1}x$, $x > 0$

(v) $\sec^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \cos^{-1}x$, $-1 \leq x \leq 1$

(VI) $\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sin^{-1}x$, $-1 \leq x \leq 1$

उपरोक्त सर्वसमिकाओं की उत्पत्ति लगभग एक ही तरीके से बड़ी सुगमता से की जा सकती है, एक उदाहरण निम्नवत् है.

(i) पहले सूत्र को सिद्ध करने हेतु.

माना $\operatorname{cosec}^{-1}x = y$ --- (i)

$x = \operatorname{cosec} y$

$\frac{1}{x} = \sin y$

$\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = y$ --- (ii)

समी० (i) एवं (ii) से

$\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{cosec}^{-1}x$ Proved

3- (i) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}(x)$, $x \in [-1,1]$

(ii) $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}x$, $x \in R$

(iii) $\operatorname{cosec}^{-1}(-x) = -\operatorname{cosec}^{-1}x$, $|x| \geq 1$

(iv) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$, $x \in [-1,1]$

(V) $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1}x$, $|x| \geq 1$

(VI) $\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1}x$, $x \in R$

<u>उपपत्ति</u> — (i) माना $\sin^{-1}(-x) = y$

$$-x = \sin y$$

$$x = -\sin y \qquad \because \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$x = \sin(-y)$$

$$\sin^{-1}x = -y$$

$$\sin^{-1}x = -\sin^{-1}(-x)$$

$$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x \quad \underline{\text{Proved}}$$

(iv) माना $\cos^{-1}(-x) = y$

$$-x = \cos y$$

$$x = -\cos y$$

$$x = \cos(\pi - y)$$

$$\cos^{-1}x = \pi - y$$

$$\cos^{-1}x = \pi - \cos^{-1}(-x)$$

$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x \quad \underline{\text{Proved}}$$

इसी प्रकार अन्य सर्वसमिकाएं भी सिद्ध की जा सकती हैं।

4- (i) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1,1]$

(ii) $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$, $x \in R$

<u>उपपत्ति</u> - (i) माना $\sin^{-1}x = y$

$$x = \sin y$$

$$x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$$

$$\cos^{-1}x = \left(\frac{\pi}{2} - y\right)$$

$$\cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}x$$

$$\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2} \quad \underline{\text{Proved}}$$

इसी प्रकार अन्य परिणामों को भी सिद्ध कर सकते हैं।

5- (i) $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$

(ii) $\sin^{-1}x - \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2}\ \ y\sqrt{1-x^2}\right)$

(iii) $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \cos^{-1}\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$

(iv) $\cos^{-1}x - \cos^{-1}y = \cos^{-1}\left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$

(v) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

(vi) $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$

<u>उपपत्ति</u> - (i) माना $\sin^{-1}x = \theta$, $\sin^{-1}y = \phi$

$$x = \sin\theta, \quad y = \sin\phi$$

$$\sqrt{1-x^2} = \cos\theta, \quad \sqrt{1-y^2} = \cos\phi$$

$$\because \sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$$

$$= x\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}\cdot y$$

$$\sin(\theta+\phi) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore \theta + \phi = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{\ \ } + y\sqrt{\ \ }\right)$$

इसी प्रकार अन्य परिणाम भी प्राप्त किए जा सकते हैं

6- (i) $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right), \; |x|<1$

$= \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right), \; |x|\leq 1$

$= \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), \; x\geq 0$

(ii) $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), \; \frac{-1}{\sqrt{2}}\leq x\leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

(iii) $2\cos^{-1}x = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), \; \frac{1}{\sqrt{2}}\leq x\leq 1$

उपपत्ति- (i) $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$, माना $\tan\theta = x$

$\theta = \tan^{-1}x$

$\tan 2\theta = \frac{2x}{1-x^2}$

$2\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$

$2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ Proved

इसी प्रकार $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ में $x = \tan\theta$ रखने पर-
$(\theta = \tan^{-1}x)$

$\sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) = \sin^{-1}\sin 2\theta$

$= 2\theta$

$= 2\tan^{-1}x$

$\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 2\tan^{-1}x$ Proved

$\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ में $x = \tan\theta$ रखने पर -

$$\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$$

$$= \cos^{-1}\cos 2\theta$$

$$= 2\theta$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2\tan^{-1}x \quad \underline{\textit{Proved}}$$

इसी प्रकार अन्य सर्वसमिकाएँ भी प्राप्त की जा सकती हैं।

प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन का दूसरे प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन में रूपान्तरण

विभिन्न प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के प्रश्नों में हमें एक प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन को दूसरे प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन में बदलना होता है। विश्लेषणात्मक विधि से इन फलनों को एक से दूसरे में बदलना हम अंत में अभ्यास प्रश्न में दिए गए उदाहरणों के माध्यम से सीखेंगे, परंतु चूँकि विभिन्न प्रश्नों के बीच में हमें अनेक प्रति० त्रिकोणमितीय फलनों को एक दूसरे में परिवर्तित करना होता है. अतः एक व्यावहारिक एवं संक्षिप्त विधि की आवश्यकता महसूस होती है जो शीघ्र और सुगमता से एक को दूसरे में परिवर्तित कर दे। आइये एक उदाहरण से इसे समझें।

उदाहरण :- $\sin^{-1}|1|$ को अन्य पाँच प्रतिलोम

हल:- हम जानते हैं $\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$, $\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$

$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$, $\cot\theta = \frac{\text{आ०}}{\text{लं०}}$, $\sec\theta = \frac{\text{क}}{\text{आ}}$

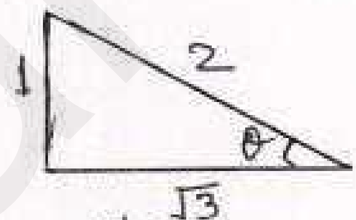
$\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}$

माना $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2}$

$\sin\theta = \frac{\text{लं}}{\text{क}} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ समकोण Δ में लं० $= 1$, कर्ण $= 2$

$\therefore$ आधार $= \sqrt{3}$



$\therefore \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\text{आ०}}{\text{क}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\text{लं०}}{\text{आ}}\right)$

$= \cot^{-1}\left(\frac{\text{आ}}{\text{लं}}\right) = \sec^{-1}\left(\frac{\text{कर्ण}}{\text{आ०}}\right) = \operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{\text{क}}{\text{लं}}\right)$

$\therefore \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \cot^{-1}(\sqrt{3})$

$= \sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \operatorname{cosec}^{-1}(2)$

इस प्रकार हम त्वरित गति से किसी प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन को किसी भी दूसरे प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन में बदल सकते हैं।

विभिन्न उदाहरण हल सहित

उपरोक्त समस्त तथ्यों से संबंधित कुछ प्रश्न हल सहित दिए जा रहे हैं ताकि पाठक तथ्यों को उदाहरण सहित समझ सकें अर्थात उसे तथ्यों/

1- $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए - (मुख्य शाखा से संबंधित प्रश्न)

2- $\sin^{-1}\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए - (प्रगुण 1 से)

3 - $\cos\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}x\right)=0$ तो x का मान बताइये - (प्रगुण 4 से संबंधित)

4 - सिद्ध कीजिए कि $\tan^{-1}\frac{2}{11}+\tan^{-1}\frac{7}{24}=\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ - (प्रगुण 5 से सं०)

5- सिद्ध कीजिए - $\sin^{-1}\frac{5}{13}+\cos^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{63}{16}$ - (प्रगुण 5 एवं फलन रूपान्तरण)

6 - सिद्ध कीजिए $2\sin^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{24}{7}$ - (प्रगुण 6 से)

7- $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ को सभी अन्य प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों में परिवर्तित करें। (फलन रूपांतरण)

8- सिद्ध कीजिए $3\sin^{-1}x=\sin^{-1}(3x-4x^3)$ (प्रगुण 6 से संबंधित)

उत्तर

1- माना $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=\theta$

$$\sin\theta=-\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta=-\sin\frac{\pi}{6} \quad \because \sin(-\theta)=-\sin\theta$$

$$\sin\theta=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\theta=-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$ मुख्य शाखा

Ans

2- $\sin^{-1}\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{3\pi}{5}$

लेकिन $\frac{3\pi}{5} \notin \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\therefore \sin\frac{3\pi}{5}$ को निम्नानुसार लिखा जा सकता है

$$\sin\frac{3\pi}{5} = \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right)$$

$$= \sin\frac{2\pi}{5}$$

$$= \frac{2\pi}{5} \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$ **Ans**

3- $\cos\left(\sin^{-1}\frac{1}{2} + \cos^{-1}x\right) = 0$

$$\therefore \left(\sin^{-1}\frac{1}{2} + \cos^{-1}x\right) = \cos^{-1}0$$

$$\sin^{-1}\frac{1}{2} + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos^{-1}x = \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\frac{1}{2}\right) \quad \left\{\because \sin^{-1}\frac{1}{2} + \cos^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\cos^{-1}x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}$$ **Ans**

4- $\tan^{-1}\frac{2}{11} + \tan^{-1}\frac{7}{24} = \tan^{-1}\frac{1}{2}$

L.H.S $\tan^{-1}\left(\frac{2}{11}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{7}{24}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{2}{11} + \frac{7}{24}}{1 - \frac{2}{11} \times \frac{7}{24}}\right)$

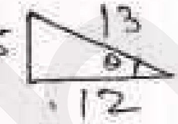
$$= \tan^{-1}\left(\frac{24\times 2 + 11\times 7}{24\times 11 - 2\times 7}\right)$$

$$= \tan^{-1}(125$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= RHS \quad \underline{\text{Proved}}$$

5- $\sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{63}{16}\right)$

L.H.S. $\sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

I -


II -


∵ RHS, $\tan^{-1}$ में लाना है।
∴ दोनों पदों को त्रिभुजों की सहायता से $\tan^{-1}$ में बदलेंगे

$$= \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{5}{12} + \frac{4}{3}}{1 - \frac{5}{12} \times \frac{4}{3}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{15+48}{36-20}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{63}{16}\right) = RHS$$
$\underline{\text{Proved}}$

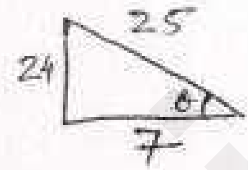
6- $2\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{24}{7}\right)$

L.H.S.- $2\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

$2\sin^{-1}x = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$ से

$$2\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \sin^{-1} 2 \times \frac{3}{5}\sqrt{1-\frac{9}{25}}$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{24}{25}\right)$$



$$= \tan^{-1}\left(\frac{24}{7}\right)$$

$$= \text{RHS} \quad \underline{\text{Proved}}$$

<u>7</u> - प्रथम विधि (विश्लेषणात्मक विधि)

माना $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \theta$

$$\sin\theta = \frac{1}{x} \quad \text{---- (i)}$$

$$\therefore \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$$

$$= \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right) \quad \text{--- (ii)}$$

$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ से

$$\sec\theta = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) \Rightarrow \theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) \quad \text{--- (iii)}$$

$\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ से $\operatorname{cosec}\theta = x \Rightarrow \theta = \operatorname{cosec}^{-1} x$ -- (IV)

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ से $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{--- (V)}$$

$\cot^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ से $\rightarrow$

$$\theta = \cot^{-1}\sqrt{x^2-1}$$

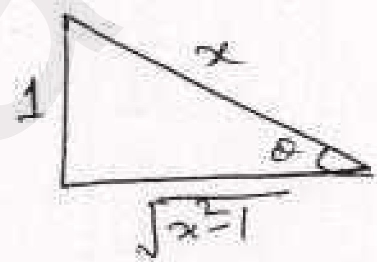
$$\therefore \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{cosec}^{-1}x = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right) = \sec^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \cot^{-1}\left(\sqrt{x^2-1}\right)$$

द्वितीय विधि :- रूपान्तरण वाले प्रश्नों को इस विधि से बनाना बहुत उचित नहीं, परंतु लम्बे प्रश्नों में प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन को दूसरे रूप में परिवर्तित करने हेतु यह विधि संक्षिप्त, सुगम एवं सटीक है।

$$\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \theta$$

$$\sin\theta = \frac{1}{x}$$



$$\sin^{-1}\left(\frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}\right) = \mathrm{cosec}^{-1}\left(\frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}\right) = \sec^{-1}\left(\frac{\text{क.}}{\text{आ.}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\text{लं.}}{\text{आ.}}\right) = \cot^{-1}\left(\frac{\text{आ.}}{\text{लं.}}\right)$$

$$\therefore \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{cosec}^{-1}x = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right) = \sec^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \cot^{-1}\left(\sqrt{x^2-1}\right)$$

Ans

Q- $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

माना $\sin\theta = x \Rightarrow \theta = \sin^{-1}x$

$$\sin 3\theta = 3x - 4x^3$$

$$3\theta = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$$

$$3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x - 4x^3) \quad \text{Proved}$$

इसी प्रकार आप सिद्ध कर सकते हैं- $3\cos^{-1}x = \cos^{-1}(4x^3 - 3x)$