vk0;g

संख्याओं या फलनों की आयताकार सारणी को आव्यूह कहते है । इन संख्याओं या फलनों को आव्यूह के अवयव कहते है। आव्यूह को अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों द्वारा व्यक्त करते है।

उदाहरण– A= $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 7 & -6 \end{pmatrix}$

क्षैतिज रेखाऐं आव्यूह की पंक्तियॉ और उर्ध्व रेखाऐं आव्यूह के स्तम्भ कहलाते है।

vk0;g dh dkfV

m पंक्तियों तथा n स्तम्भों वाले किसी आव्यूह को mxn कोटि का आव्यूह कहते है। जैसे–

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\ldots\ldots\ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

vk0;g ds izdkj

1– ifDr vk0;g– एक आव्यूह पंक्ति आव्यूह कहलाता है यदि उसमें केवल एक पंक्ति होती है।

उदाहरण– A=$[-3 \quad 5 \quad 7 \quad 2]_{1x4}$

2– LrEHk vk0;g– एक आव्यूह स्तम्भ आव्यूह कहलाता है यदि उसमें केवल एक स्तम्भ होता है।

उदाहरण– B= $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}_{3x1}$

3– ox vk0;g– एक आव्यूह जिसमें पंक्तियों की संख्या स्तम्भों की संख्या के समान होती है, उसे वर्ग आव्यूह कहते है।

उदाहरण–

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ \frac{3}{4} & 4\sqrt{2} & 5 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}_{3x3}$$

4– fod.k vk0;g– एक वर्ग आव्यूह विकर्ण आव्यूह कहलाता है यदि विकर्ण के अतिरिक्त इसके अन्य सभी अवयव शून्य होते है।

उदाहरण–

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

5– vfn k vk0;g– एक विकर्ण आव्यूह अदिश आव्यूह कहलाता है यदि इसके विकर्ण के अवयव समान होते है।

उदाहरण–

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

6– rRled vk0;g– एक वर्ग आव्यूह जिसके विकर्ण के सभी अवयव 1 होते है, तथा शेष अन्य सभी अवयव शून्य होते है, तत्समक या इकाई आव्यूह कहलाता है।

उदाहरण–

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7– "kU; vk0;g– एक आव्यूह शून्य आव्यूह या रिक्त आव्यूह कहलाता हैयदि इसके सभी अवयव शून्य हों।

उदाहरण– $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

8– vk0;g dk ifjor– किसी आव्यूह की पंक्तियों तथा स्तम्भों का परस्पर विनिमय करने से प्राप्त होने वाले आव्यूह को दिये गये आव्यूह का परिवर्त कहते है। आव्यूह A के परिवर्त को A^{l} या A^{T} से प्रदर्शित करते है।

उदाहरण– $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^{l} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

9– lefer vk0;g– एक वर्ग आव्यूह A सममित कहलाता है यदि $A^{l}=A$

उदाहरण–

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$ एक सममित आव्यूह है क्योंकि $A^{l}=A$

10– fo'ke lefer vk0;g– एक वर्ग आव्यूह A विषम सममित आव्यूह कहलाता है यदि $A^{l}=-A$ विषम सममित आव्यूह के विकर्ण के सभी अवयव शून्य होते है।

उदाहरण–

$$A = \begin{pmatrix} 0 & e & f \\ -e & 0 & g \\ -f & -g & 0 \end{pmatrix}$$ एक विषम सममित आव्यूह है।क्योंकि $A^{l}=-A$

11– 0;Rde.kh; vk0;g– यदि A और B एक ही कोटि के दो वर्ग आव्यूह इस प्रकार हों कि गुणन AB=गुणन BA=I (तत्समक आव्यूह) तो B को A का या A को B का व्युत्क्रम आव्यूह कहते है। और इसे A^{-1}या B^{-1} के द्वारा निरूपित करते है। ऐसी दशा में आव्यूह A और B व्युत्क्रमणीय आव्यूह कहलाते है।

vk0;gk dk ;kx

यदि A और B समान कोटि के आव्यूह है तो उनका योगफल A+B वह आव्यूह होता है जिसका प्रत्येक अवयव A और B के संगत अवयवों के योग के बराबर है।

उदाहरण– $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

$$A+B=\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

vk0;gk dk x.ku

यदि A और B दो ऐसे आव्यूह है कि A के स्तम्भों की संख्या B की पंक्तियों की संख्या के बराबर हो तो आव्यूह A और B का गुणन AB होगा। आव्यूह AB के अवयवों को प्राप्त करने के लिए A की पंक्तियों तथा B के स्तम्भों को लेकर अवयवों के क्रमानुसार गुणन करते है और तदोपरांत इन गुणनफलों का योगफल ज्ञात करते है।

उदाहरण– $A=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \Rightarrow \text{प्रथम पंक्ति}(R_1) \\ \Rightarrow \text{दूसरी पंक्ति}(R_2) \end{array}$

(C_1)प्रथम स्तम्भ दूसरा स्तम्भ(C_2)

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

गुणनफल $AB=\begin{pmatrix} R_1xC_1 & R_1xC_2 \\ R_2xC_1 & R_2xC_2 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 1x2+(-1)x(-1)+2x5 & 1x7+(-1)x1+2x(-4) \\ 0x2+3x(-1)+4x5 & 0x7+3x1+4x(-4) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+1+10 & 7-1-8 \\ 0-3+20 & 0+3-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -2 \\ 17 & -13 \end{pmatrix}$$

ikjfEHkd lfd;kvk }kjk ,d vkO;g dk O;Rde Kkr djuk

यदि A एक ऐसा आव्यूह है कि इसके व्युत्क्रम (A^{-1}) का अस्तित्व है तो प्रारंभिक पंक्ति संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा A^{-1} ज्ञात करने के लिए A=IA लिखते है और केवल पंक्ति संक्रियाओं का प्रयोग (स्तम्भ संक्रियाओं का कदापि नहीं) A=IA पर तब तक करते है जब तक कि I=BA नहीं मिल जाता है। इस प्रकार प्राप्त आव्यूह B ,आव्यूह A का व्युत्क्रम होगा।

इसी प्रकार यदि स्तम्भ संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा A^{-1} ज्ञात करना चाहते है तो A=AI लिखते है और A=AI पर केवल स्तम्भ संक्रियाओं का प्रयोग (पंक्ति संक्रियाओं का कदापि नहीं) तब तक करते है जब तक कि I=AB नहीं मिल जाता है। इस प्रकार प्राप्त आव्यूह B, आव्यूह A का व्युत्क्रम होगा।

उदाहरण– यदि $A= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ तेा प्रारम्भिक रूपान्तरण के प्रयोग से इसका व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

प्रारम्भिक पंक्ति संक्रियाओं का प्रयोग करने पर A=IA

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A$$

$R_2 \Rightarrow R_2-2R_1$ के प्रयोग द्वारा–

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} A$$

$R_2 \Rightarrow R_2/5$ के प्रयोग द्वारा

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix} A$$

$R_1 \Rightarrow R_1+R_2$ के प्रयोग द्वारा

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix} A$$

I=BA

$$A^{-1}=B= \begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 \\ & \end{pmatrix}$$

$$-2/5 \quad 1/5$$

ijh{kk dh nf’V ls dN egRoi.k i u

1– यदि $F(x)=\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ है तो सिद्ध कीजिए कि

$$F(x).F(y)=F(x+y)$$

2– यदि $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ है तो $A^2-5A+6I$ का मान ज्ञात कीजिए

3– निम्नलिखित आव्यूहों को एक सममित आव्यूह तथा एक विषम सममित आव्यूह के योगफल के रूप में ज्ञात कीजिए–

a- $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ b- $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

4– निम्नलिखित आव्यूहों के व्युत्क्रम,यदि उनका अस्तित्व है तो प्रारम्भिक रूपान्तरण के प्रयोग से ज्ञात कीजिए–

a- $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ b- $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

5– आव्यूह X ज्ञात कीजिए यदि $X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & -8 & -9 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ है।

6– मान लीजिए कि $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ है।

एक ऐसा आव्यूह D ज्ञात कीजिए कि CD-AB=O हो।

7– समीकरण $\begin{pmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$ से a,b,c तथा d के मान ज्ञात कीजिए।