अवकलज के अनुप्रयोग

* अवकलज - राशियों के परिवर्तन की दर ही अवकलन है, यदि एक राशि y, दूसरी राशि x के सापेक्ष किसी नियम $y = f(x)$ को संतुष्ट करते हुए परिवर्तित होती है तो $\frac{dy}{dx}$ को y का x के सापेक्ष अवकलन कहते हैं।

उदा 1: वृत्त के क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर इसकी त्रिज्या r के सापेक्ष ज्ञात कीजिए जब $r = 5$ Cm. है।

हल:- वृत्त की त्रिज्या $= r$

वृत्त का क्षेत्रफल $A = \pi r^2$

r के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dA}{dr} = \pi . 2r = 2\pi r$$

$$\frac{dA}{dr} (\text{जब } r = 5 \text{ Cm. हो}) = 2\pi \times 5 = 10\pi$$

अतः वृत्त का क्षेत्रफल A, वृत्त की त्रिज्या r के सापेक्ष 10π Cm²/cm की दर से परिवर्तित हो रहा है।

* x का मान बढ़ने से यदि y का मान बढ़ता है तो $\frac{dy}{dx}$ धनात्मक होता है और x का मान बढ़ने से यदि y का मान घटता है तो $\frac{dy}{dx}$ ऋणात्मक होता है।

उदा 2:- किसी आयत की लम्बाई x, 3 Cm/min की दर से घट रही है और चौड़ाई y, 2 Cm./min की दर से बढ़ रही है, जब $x = 10$ Cm. और $y = 6$ Cm. है तब आयत के परिमाप और क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

हल:- दिया गया है, $\frac{dx}{dt} = -3$ Cm./minute (लम्बाई में समय के सापेक्ष परिवर्तन की दर)

तथा $\frac{dy}{dt} = 2$ Cm./minute (चौड़ाई में समय के सापेक्ष परिवर्तन की दर)

आयत का परिमाप $= 2(x+y)$

$$\frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right)$$

$$= 2(-3+2) = -2 \text{ Cm./min.}$$

तथा

आयत का क्षेत्रफल $A = x \times y$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dx}{dt} \times y + \frac{dy}{dt} \times x = -3 \times 6 + 10 \times 2$$

$$= 2 \text{ Cm}^2/\text{min.}$$

* **वर्धमान फलन** - यदि x के किन्हीं दो मानों x_1 और x_2 के लिए, जहाँ $x_1 < x_2$ है और इन बिन्दुओं पर फलन का मान $f(x_1)$ व $f(x_2)$ है, तो फलन वर्धमान फलन कहलाता है, यदि

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 < x_2 \\ \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{array}}$$

उदा 3) - दिखाइये कि फलन $f(x) = x+3$ एक वर्धमान फलन है।

हल - दिया है : $f(x) = x+3$

माना x के कोई दो मान x_1 व x_2 हैं जहाँ $x_1 < x_2$

अत: फलन का रुप लाने के लिए दोनों ओर 3 जोड़ने पर

$$x_1 < x_2$$
$$\Rightarrow x_1 + 3 < x_2 + 3$$
$$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

अत: दिया गया फलन वर्धमान फलन है।

* **ह्रासमान फलन** - यदि x के किन्हीं दो मानों x_1 और x_2 के लिए, जहाँ $x_1 < x_2$ है और इन बिन्दुओं पर फलन के मान $f(x_1)$ व $f(x_2)$ हैं तो फलन ह्रासमान फलन कहलाता है, यदि

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 < x_2 \\ \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{array}}$$

उदा. 4) - दिखाइये कि फलन $f(x) = -2x+4$ एक ह्रासमान फलन है।

हल :- दिया है; $f(x) = -2x+4$

माना x के कोई दो मान x_1 व x_2 हैं जहाँ $x_1 < x_2$

अत: फलन का रुप लाने के लिए :-

$$x_1 < x_2$$

-2 से गुणा करने पर

$-2x_1 > -2x_2$ (असमिका ऋणात्मक चिन्ह होने पर बदल जाती है।)

दोनों ओर 4 जोड़ने पर

$$-2x_1 + 4 > -2x_2 + 4$$
$$f(x_1) > f(x_2)$$

अत: दिया गया फलन ह्रासमान फलन है।

* अन्तराल ज्ञात करना जिसमें फलन निरन्तर वर्धमान या ह्रासमान है।

1. अन्तराल ज्ञात करना जिसमें फलन लगातार वर्धमान (बढ़ रहा) है।

उदा 5: विधि - फलन दिया गया है : $f(x) = -x^2 - 2x + 15$

- फलन का अवकलन ज्ञात करो,

$$f'(x) = -2x-2$$

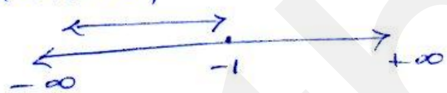
- यदि फलन निरन्तर वर्धमान है तो -

$f'(x) > 0$ रखें,

$$-2x-2 > 0$$
$$2x+2 < 0$$
$$2(x+1) < 0$$
$$x+1 < 0$$
$$x < -1$$

अत: x के वे सभी मान जिन पर x, -1 से छोटा है, फलन के निरन्तर वर्धमान होने के अन्तराल को दर्शाते हैं,

अत: $x \in (-\infty, -1)$



2. अन्तराल ज्ञात करना जिसमें फलन लगातार ह्रासमान (घटरहा) है,

उदा॰6: विधि - फलन दिया है; $f(x) = -x^2 - 2x + 15$

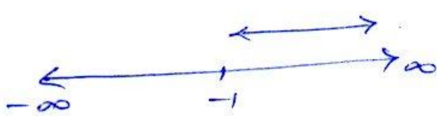
- फलन का अवकलन ज्ञात करो - $f'(x) = -2x-2$
- यदि फलन निरन्तर ह्रासमान है तो - $f'(x) < 0$ रखो,

$$f'(x) < 0$$
$$-2x-2 < 0$$
$$-2(x+1) < 0$$
$$2(x+1) > 0$$
$$x+1 > 0$$
$$x > -1$$

अत: x के वे सभी मान जिन पर x, -1 से बड़ा है, फलन के निरन्तर ह्रासमान होने के अन्तराल को दर्शाते हैं,

अत: $x \in (\infty, -1)$

or $x \in (-1, \infty)$



* उच्चतम और निम्नतम मान - एक फलन कई बिन्दुओं पर घटता और बढ़ता रहता है, उन कई बिन्दुओं में से वह एक बिन्दु जिस पर फलन स्थानीय अधिकतम पर पहुँचता है, फलन का उच्चतम मान कहलाता है,

उन कई बिन्दुओं में से वह एक बिन्दु जिस पर फलन स्थानीय निम्नतम पर पहुँचता है, फलन का निम्नतम मान कहलाता है,

उदा॰7 - निम्न फलन के लिए वे सभी बिन्दु ज्ञात कीजिए जिस पर फलन स्थानीय उच्चतम व स्थानीय निम्नतम हो तथा स्थानीय उच्चतम व स्थानीय निम्नतम मान भी ज्ञात करो,

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$$

(IX) हल :- 1. दिया गया फलन

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$$

2. अवकलन करें, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

3. स्थानीय उच्चतम व स्थानीय निम्नतम मान के लिए, $f'(x) = 0$ रखें,

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$3(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x^2 - (3+1)x + 3 = 0$$ {गुणनखण्ड विधि द्वारा मूल ज्ञात करें}

$$x^2 - 3x - x + 3 = 0$$

$$(x^2 - 3x) - (x - 3) = 0$$

$$x(x-3) - 1(x-3) = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$x - 1 = 0, \quad \boxed{x = 1}$$

$$x - 3 = 0, \quad \boxed{x = 3}$$

अत: वे बिन्दु जिन पर फलन का स्थानीय उच्चतम व स्थानीय निम्नतम मान ज्ञात किया जा सकता है, वे हैं :- $x = 1$ और $x = 3$

4). फलन का पुन: अवकलन करें, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

तो $f''(x) = 6x - 12$

$$f''(x)_{(x=1 \text{ पर})} = 6 \times 1 - 12$$

$$= 6 - 12$$

$$= -6 < 0$$

अत: $x = 1$ पर फलन स्थानीय उच्चतम बिन्दु मान को दर्शाता है,

अत: फलन का उच्चतम मान $x = 1$ पर ज्ञात करें,

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$$

$$f(1) = 1^3 - 6.1^2 + 9.1 - 8$$

$$= 1 - 6 + 9 - 8$$

$$= -5 + 1$$

$$= -4$$

$$f''(x)_{(x=3 \text{ पर})} = 6 \times 3 - 12$$

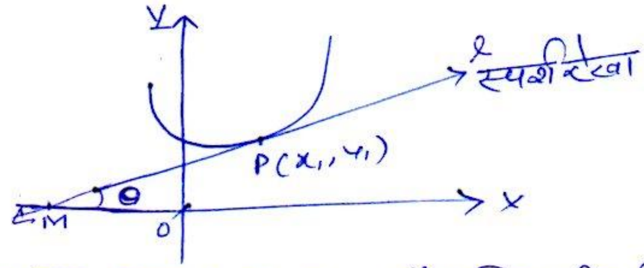
$$= 18 - 12$$

$$= 6 > 0$$

अत: $x = 3$ फलन का स्थानीय निम्नतम बिन्दु है,

अत: $x = 3$ पर फलन का निम्नतम मान

* स्पर्शरेखा - वह रेखा जो वक्र को किसी एक बिन्दु पर स्पर्श करती है, स्पर्श रेखा कहलाती है,



1. माना यह वक्र $y = f(x)$ है जिसकी बिन्दु P पर स्पर्श रेखा l है जो x अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ θ कोण ($\angle lMX$) बनाती है, अत: स्पर्शरेखा की प्रवणता $m = \tan\theta$

2. फलन का अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = m$

अत: $\boxed{m = \frac{dy}{dx} = \tan\theta}$ ही वक्र की स्पर्शरेखा की प्रवणता कहलाती है,

उदा०7: फलन $y = 3x^2 + 2x + 7$ की स्पर्शरेखा की प्रवणता (ढाल) ज्ञात करो,

हल: दिया गया फलन $y = 3x^2 + 2x + 7$

अवकलन करने पर $\frac{dy}{dx} = 6x + 2$

अत: स्पर्शरेखा की प्रवणता $m = \frac{dy}{dx} = 6x + 2$

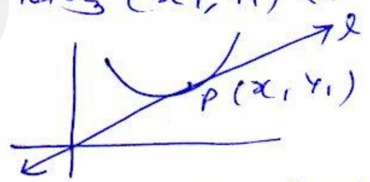
उदा० 8 :- फलन $y = 2x^2 - 3x$ की बिन्दु $x = 2$ पर स्पर्शरेखा की प्रवणता ज्ञात करो,

हल: वक्र - $y = 2x^2 - 3x$

वक्र का अवकलन करने पर $\frac{dy}{dx} = 4x - 3$

अत: स्पर्शरेखा की प्रवणता $\frac{dy}{dx}(at\ 2) = 4 \times 2 - 3 = 5$

* किसी दिये हुए बिन्दु (x_1, y_1) से गुजरने वाली स्पर्शरेखा का समी॰:-



माना एक वक्र $y = f(x)$ दिया गया है,
इस वक्र के बिन्दु $P(x_1, y_1)$ पर वक्र की स्पर्शरेखा l खींची गयी है, अत: इसकी प्रवणता $m = \frac{dy}{dx}(at\ x_1, y_1)$

अत: स्पर्शरेखा का समी॰ →

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

उदा.9 :- वक्र $y = 2x^2 - 3x$ की बिन्दु $(1, 2)$ पर स्पर्शरेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल:- दिया गया वक्र $y = 2x^2 - 3x$

वक्र का अवकलन करने पर :- $\frac{dy}{dx} = 4x - 3$

$\frac{dy}{dx}(x = 1, y = 2)$ पर $= 4 \times 1 - 3 = 1$

अत: स्पर्शरेखा की प्रवणता $m = 1$

अत: बिन्दु $(1, 2)$ पर स्पर्शरेखा का समी० ⇒

$(y - y_1) = m(x - x_1)$

$(y - 2) = 1(x - 1)$

$y - 2 = x - 1$

$\boxed{x - y + 1 = 0}$

उदा.10:- वक्र $y = \sqrt{4x-3} - 1$ पर उन बिन्दुओं को ज्ञात करो जिन पर स्पर्शरेखा की प्रवणता $2/3$ है।

हल:- दिया गया वक्र $y = \sqrt{4x-3} - 1$

अवकलन करने पर $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{4x-3}} \times 4 = \frac{2}{\sqrt{4x-3}}$

माना बिन्दु (x_1, y_1) है,

अत: $\frac{dy}{dx}(x = 1, y = 1)$ पर $= \frac{2}{\sqrt{4x_1 - 3}}$

अत: स्पर्शरेखा की प्रवणता $m = \frac{2}{\sqrt{4x_1 - 3}}$

दिया है $m = \frac{2}{3}$

अत: $\frac{\cancel{2}}{\sqrt{4x_1 - 3}} = \frac{\cancel{2}}{3}$

वर्ग करने पर

$\frac{1}{4x_1 - 3} = \frac{1}{9}$

$4x_1 - 3 = 9$

$4x_1 = 12$

$\boxed{x_1 = 3}$ —— ①

बिन्दु (x_1, y_1) वक्र $y = \sqrt{4x-3} - 1$ को संतुष्ट करता है,

अत: $y_1 = \sqrt{4x_1 - 3} - 1$ $\quad x_1 = 3$ रखने पर

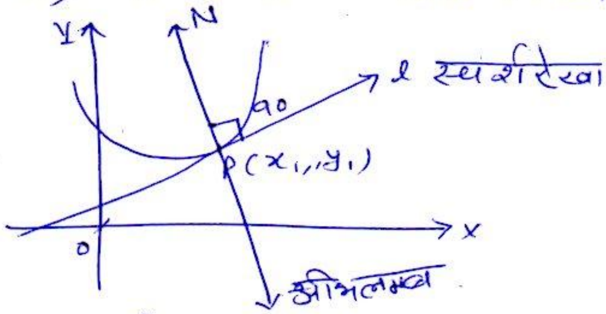
$y_1 = \sqrt{4 \times 3 - 3} - 1 = \sqrt{12 - 3} - 1$

$y_1 = \sqrt{9} - 1 = 3 - 1 = 2$

$\boxed{y_1 = 2}$

अत: बिन्दु : $(3, 2)$ है,

* अभिलम्ब - वह रेखा जो किसी वक्र की स्पर्शरेखा पर लम्ब हो, वक्र का अभिलम्ब कहलाती है।



1. माना स्पर्श रेखा की प्रवणता m है, जहाँ $m = \frac{dy}{dx}$
2. अत: अभिलम्ब की प्रवणता $M = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

$$M = -\frac{1}{m}$$

3. अत: बिन्दु $P(x_1, y_1)$ से गुजरने वाले अभिलम्ब का समी०

$$\boxed{(y-y_1) = M(x-x_1)}$$

उदा॥:- वक्र $y = x^2 - x + 3$ के बिन्दु $(3, 2)$ पर अभिलम्ब का समी० ज्ञात कीजिए।

हल :- दिया गया वक्र $y = x^2 - x + 3$

अवकलन करने पर $\frac{dy}{dx} = 2x - 1$

$$\frac{dy}{dx}(x=3, y=2 \text{ पर}) = 2\times 3 - 1 = 6 - 1 = 5$$

अत: स्पर्शरेखा की प्रवणता $m = 5$

तो अभिलम्ब की प्रवणता $M = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{5}$

अत: बिन्दु $(3, 2)$ पर अभिलम्ब का समी० ⇒

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

$$(y - 2) = -\frac{1}{5}(x - 3)$$

$$5y - 10 = -x + 3$$

$$\boxed{x + 5y = 13}$$

* दो रेखाओं के लम्ब होने की शर्त :-

माना दो रेखाओं की प्रवणताऐं m_1 और m_2 हैं,

अत: $\boxed{m_1 \times m_2 = -1}$

* दो रेखाओं के समान्तर होने की शर्त :-

$$\boxed{m_1 = m_2}$$

(8) * सन्निकटन :- अवकलन विधि से हम किसी संख्या का सन्निकटन मान (वर्गमूल व घनमूल) ज्ञात कर सकते हैं। (8)

उदा १२-: $\sqrt{36.6}$ का सन्निकटन करने के लिए अवकलन का प्रयोग करें।

हल :- माना $y = \sqrt{x}$, जहाँ $x = 36$ और मान लीजिए $\Delta x = 0.6$

$$y = \sqrt{36.6}$$
$$y = \sqrt{36 + 0.6}$$
$$y = \sqrt{x + \Delta x}$$

अतः $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$

$$\Delta y = \sqrt{36.6} - \sqrt{36}$$
$$\Delta y = \sqrt{36.6} - 6$$

अतः $\sqrt{36.6} = 6 + \Delta y$ —— (1)

चूँकि $\Delta y = dy$

अतः वक्र का अवकलन करने पर :-

$$y = \sqrt{x}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} . dx$$
or $$\Delta y = \frac{1}{2\sqrt{x}} . \Delta x$$
$$\Delta y = \frac{1}{2\sqrt{36}} \times 0.6$$
$$\Delta y = 0.05$$

अतः $\sqrt{36.6}$ का सन्निकटन / सन्निकट मान =

$$\sqrt{36.6} = 6 + \Delta y$$
$$= 6 + 0.05 \quad \text{(समी॰(1) से)}$$
$$= 6.05$$

प्रश्नावली

प्र॰1) - वृत्त के क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर इसकी त्रिज्या r के सापेक्ष ज्ञात कीजिए जब $r = 3$ cm. है।

प्र॰2) - दर्शाइये कि फलन $f(x) = 3x + 4$ एक वर्धमान फलन है।

प्र॰3) - दर्शाइये कि फलन $f(x) = -x - 7$ एक ह्रासमान फलन है।

प्र०4) - वह अन्तराल ज्ञात करो जिसमे फलन $f(x) = 2x^2 + 3x + 7$ निरन्तर वर्धमान और निरन्तर ह्रासमान है,

प्र०5) - निम्नलिखित फलन के लिए वे सभी बिन्दु ज्ञात कीजिए जिस पर फलन $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 7$ स्थानीय उच्चतम व स्थानीय निम्नतम हो तथा इन बिन्दुओं पर फलन का स्थानीय उच्चतम और स्थानीय निम्नतम ज्ञात करो,

प्र०6) - बिन्दु $(2, 3)$ पर फलन $y = 3x^3 + 2x^2 + 5x + 3$ की स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए,

प्र०7) - बिन्दु $(-1, -2)$ पर फलन $y = 2x^2 + 3x + 7$ की स्पर्शरेखा और अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए,

प्र०8) - वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जिस पर वक्र की स्पर्शरेखा की प्रवणता 3 है।

प्र०9) - दिखाइये कि वक्र $y = 3x^2 + 2x + 7$ और $y = -\frac{x}{8} + 3$ एक दूसरे पर लम्ब हैं।

प्र०10) :- निम्न का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए,

$\sqrt{25.4}$

***