Lkekdyu (Integration) $\int$

समाकलन, अवकलन–गुणांक का ठीक विलोम प्रक्रिया है। जहॉं अवकलन का अर्थ घटाना तो समाकलन का अर्थ जोड़ना है । अर्थात्

Integration is the Just opposite Process Of Differentiation

यदि F(x) फलन का अवकल गुणांक f(x) हो अर्थात् $\frac{d}{dx}$ F(x)= f(x) हो

अथवा $\int d/dx$ F(x) dx =$\int$ f(x) dx (दोनों तरफ समाकलन चिन्ह लगाने पर)

तो F(x)=$\int$ f(x) dx

या $\int$ f(x) dx = F(x)+c जहॉं c = (अचर)

या f(x) का समाकलन x के सापेक्ष F(x)+c हैं जो कि अनिश्चित समाकलन को दर्शाता है।

जैसे : – Differentiation $\Leftrightarrow$ Integration

$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$ तो $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ + c

$\frac{d}{dx}(x) = 1$ तो $\int 1\,dx = x$ + c

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ तो $\int \cos x\,dx = \sin x$ + c

$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ तो $\int - \sin x\,dx = \cos x$ + c

$\frac{d}{dx}(\tan x) = sec^2 x$ तो $\int - sec^2 x\,dx = \tan x$ + c

$\frac{d}{dx}(\text{cosec}\,x) = -\text{cosec}\,x \cot x$ तो $\int - \text{cosec}\,x \cot x = \text{cosec}\,x$ + c

$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$ तो $\int \sec x \tan dx = \sec x$ + c

$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\text{cosec}^2 x$ तो $\int -\text{cosec}^2 x\,dx = \cot x$ + c

$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ तो $\int \frac{1dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x$ + c

$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ तो $\int \frac{-1dx}{\sqrt{1-x^2}} = \cos^{-1} x$ + c

$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$ तो $\int \frac{1dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x$ + c

$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \frac{-1}{1+x^2}$ तो $\int \frac{-1dx}{1+x^2} = \cot^{-1} x$ + c

$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$ तो $\int \frac{1dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x$ + c

$\frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1} x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$ तो $\int \frac{-1dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{cosec}^{-1} x$ + c

$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ तो $\int e^x\,dx = e^x$ + c

$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log a$ तो $\int a^x \log a\,dx = a^x$+ c

$\frac{d}{dx}(\log e^x) = \frac{1}{x}$ तो $\int \frac{1}{x} dx = \log e^x$+ c

$\frac{d}{dx}(\log a^x) = \frac{1}{x} \log a^e$ तो $\int \frac{1}{x} \log a^e\,dx = \log a^x$ + c

उपरोक्त समस्त सूत्र अवकलन एवं इसके विपरीत समाकलन के मानक रुप में दर्शाये गये हैं जिसका प्रयोग समाकलन संबंधी सरल प्रश्नों के हल करने में किया जाता हैं। जिनमें कुछ उदाहरण निम्नवत् हैं। on next page →

प्रश्न 01. $\int (ax^2+bx+\mathrm{c})\,\mathrm{d}x$ को हल करें।

हल: (I) $\int (ax^2+bx+\mathrm{c})\,\mathrm{d}x$

$= \int (ax^2\mathrm{d}x+bx\int bx.\mathrm{d}x + \int c.\mathrm{d}x$

$= \left(a.\frac{x^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+\frac{cx^1}{1}+c^1\right)$ उत्तर.

प्रश्न 02. $\int \sec x\,(\sec x + \tan x)\,\mathrm{d}x$ को हल करें।

हल: (I) $\int \sec x\,(\sec x + \tan x)\,\mathrm{d}x$

$= \int \sec^2 .\,dx + \int \sec x.\tan x\,.\,\mathrm{d}x$

$= (\tan x + \sec x + \mathrm{c})$ उत्तर.

प्रश्न 03. $\int \frac{2-3\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

हल: (I) $\int \frac{2-3\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

$= \int \frac{2}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{3\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

$= \int_{2\sec^2 x} \mathrm{d}x - 3\int_{\sec x \tan x\, dx}$

$= 2\tan x$-3sec x + c उत्तर.

lekdyu d rjhd Different ways for Integration

1- **Integration by substitution** ifrLFkkiu }kjk lekdyu
2- **Integration by parts** [k.M kk lekdyu
3- **Integration as sum of limits** ;kx lhek d #i e lekdyu
4- **Definite Integration with some special properties and based with previous idefinite integration** fo k'k x|.kk d vk/kkj ij fuf pr lekdyuA

01- Integration by substitution ifrLFkkiu }kjk lekdyu

इस विधि के अर्न्तगत त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ, परिमेय फलनों के समाकलन एवं आंशिक भिन्नों के प्रश्नों में कुछ निम्नवत् मानक सूत्रों का प्रयोग करते हैं जो कि समरणीय हो।

$\int \tan x\, dx = \log|\sec x| + c$ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \frac{1-tan^2 x}{1+tan^2 x}$

$\int \cot x\, dx = \log|\sin x| + c$ $\sin 2x = 2\sin x\cos x = \frac{2\tan x}{1+tan^2 x}$

$\int \sec x\, dx = \log|\sec x + \tan x| + c$ $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\int \mathrm{cosec} x\, dx = \log|\mathrm{cosec} x - \cot x| + c$ $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ on next page →

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x} + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log|x+\sqrt{x^2-a^2}| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log|x+\sqrt{x^2+a^2}| + c$$

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{A\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)+B}{ax^2+bx+c}$$

$$\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \int \frac{A\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$\frac{px+q}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)}$$, **a is not equal to b**

$$\frac{px+q}{(x-a)^2} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-a)^2}$$

$$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + \frac{c}{(x-c)}$$

$$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x^2+bx+c)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{Bx+c}{(x^2+bx+c)}$$

स्मरणीय बातें :–

$\sqrt{x}$, $\sin(\log x)$, $e^{tan-1}\,x$, e^{2x+3}, $\frac{1}{x\,logx}$, $\sin(\cos x)$, $\sin(ax+b)$............... इत्यादि में $\sqrt{x}$, $(\log x)$, $tan-1x$, $2x+3$, $logx$, $\cos x$, $(ax+b)$ अदि रुप वाले प्रश्नों में प्रतिस्थापन के तौर पर t अथवा θ रखते हैं तब समाकलन करने से प्रश्नों का हल आसानी से हो जाता है।

I kf/kr mnkgj.k %&

i: 01- $\frac{2x}{1+x^2}$ का समाकलन करें।

हलः– माना कि $I = \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

पुनः माना कि $1+x^2 = t$

दोनो तरफ अवकलन करने पर

$0+2x\,dx = dt$

या $2x\,dx = dt$

अतः $I = \int \frac{dt}{t}$

$= \log t + C$

$= \log(1+x^2) + C$ उत्तर.

i: 02- $\frac{\sin(\tan^{-1}x)}{1+x^2}$ का समाकलन करें।

हलः– माना कि $I = \int \frac{\sin(\tan^{-1}x)}{1+x^2}\,dx$

पुनः माना कि $\tan^{-1}x = t$

दोनो तरफ अवकलन करने पर

$\frac{1dx}{1+x^2} = dt$

अतः $I = \int \sin t\,dt$

$= -\cos t + c$

$= \cos(\tan^{-1}x) + c$ उत्तर.

on next page →

iz 03- $\cot x\, log \sin x$ का समाकलन करें।

हलः– माना कि $I = \int \cot x\, log \sin x \ dx$

पुनः माना कि $log \sin x = t$

दोनो तरफ अवकलन करने पर

$$\frac{1\cos x\, dx}{\sin x} = dt$$

या $\cot x\, dx = dt$

अतः $I = \int t\, dt$

$= \frac{t^2}{2} + c$

$= \frac{(\log \sin x)^2}{2} + c$ उत्तर.

iz 04- $\frac{5x-2}{1+2x+3x^2}$ का समाकलन करें।

हलः– माना कि $I = \int \frac{5x-2}{1+2x+3x^2} dx$

जहाँ $\frac{5x-2}{1+2x+3x^2} = \frac{A\frac{d}{dx}(3x^2+2x+1)+B}{1+2x+3x^2}$ I

$= \frac{A(2+6x)+B}{1+2x+3x^2}$

$= \frac{2A+6Ax+B}{1+2x+3x^2}$

$\frac{5x-2}{1+2x+3x^2} = \frac{6Ax+(2A+B)}{1+2x+3x^2}$

दोनों तरफ से समान गुणांको की तुलना करने पर

$6A = 5$ अतः $A = \frac{5}{6}$ और $2A+B = -2$

;k $B = -2-2A = -2-2\times\frac{5}{6} = -\frac{11}{3}$

अतः समीकरण I से $\frac{5x-2}{1+2x+3x^2} = \frac{\frac{5}{6}(2+6x)-\frac{11}{3}}{1+2x+3x^2}$

$$\int \frac{5x-2}{1+2x+3x^2}\, dx = \int \frac{\frac{5}{6}(2+6x)-\frac{11}{3}}{1+2x+3x^2}\, dx$$

$= \frac{\frac{5}{6}(2+6x)dx}{1+2x+3x^2} - \frac{11}{3}\int \frac{dx}{1+2x+3x^2}$

$= \frac{5}{6}\log(1+2x+3x^2) - \frac{11}{3}$ --------------------II

जहाँ $II = \int \frac{dx}{1+2x+3x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+2x\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+2x\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^2-(\frac{1}{3})^2+\frac{1}{3}}$

on next page →

$$= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{3})^2 + (\sqrt{2/}\ 3)^2}$$

$$= 1/\sqrt{2} \tan^{-1} \frac{3x+1}{\sqrt{2}} + c$$

अतः समीकरण II से $\int \frac{5x-2}{1+2x+3x^2} dx = \frac{5}{6} \log(1 + 2x + 3x^2) - \frac{11}{3\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{3x+1}{\sqrt{2}} + c$ उत्तर.

i 05- $\frac{x}{(x-1)(x^2+1)}$ का समाकलन करें।

हलः— माना कि $\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)}$

$$= \frac{A(x^2+1)+(x-1)(Bx+C)}{(x-1)(x^2+1)}$$

$$= \frac{Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx - C}{(x-1)(x^2+1)}$$

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{x^2 (A+B) + x(C-B) + (A-C)}{(x-1)(x^2+1)}$$

दोनों तरफ से समान गुणांको की तुलना करने पर

A+B=0, C-B=1 , A-C=0 इन्हें हल करने पर C= $\frac{1}{2}$, B= $\frac{-1}{2}$, A= $\frac{1}{2}$

vr% $\int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-1)} - \frac{1}{2} \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x^2+1)}$

$$= \frac{1}{2} \log(x-1) - \frac{1}{4} \int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x^2+1)}$$

$$= \frac{1}{2} \log(x-1) - \frac{1}{4} \log(x^2+1) + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x}{1} + C$$ उत्तर.

अभ्यास हेतु प्रश्नः—

01. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin x}}$

02. $\int \frac{2x\ dx}{x^2+3x+2}$

03. $\int \frac{(x+2)\ dx}{2x^2+6x+5}$

04. $\int \frac{dx}{x^2-3x+13}$

05. $\int \frac{x\ dx}{(x-1)^2 (x+2)}$

06. $\int \sin 4x \sin 8x\ dx$

on next page →

2- **Integration by parts** [k.M %k lekdyu

;fn **u** vkj **v, x** d nk pj Qyu gk rk [k.M %k lekdyu dk l= fuEuor~ gksxk%&

%iFke Qyu × f}rh; Qyu% dk lekdyu = iFke Qyu × f}rh; Qyu dk lekdyu &[f}rh; Qyu dk lekdyu × iFke Qyu dk vodyu] dk lekdyu

vFkkr~

$$\int u.v\,dx = u\int vdx - \int\left[\int vdx.\frac{du}{dx}\right]dx$$

u और v में से प्रथम या द्वितीय निर्धारण करने के लिए ILATE की मदद लेते हैं।

जहाँ I= Inverse , L= Log , A=Algebra, T=Trigonometry, E= Exponential

इन शब्दों में जो शब्द पहले आयेगा उसे प्रथम और बाद में आने वाले शब्द द्वितीय समझा जायेगा।

lkf/kr mnkgj.k %&

प्र0 1. $\int x\ \sec^2 x\ dx$

हलः ILATE द्वारा $x =$ I और $\sec^2 x$ = II मानने पर

$$I = x \times \int \sec^2 x\ dx - \int\left[\left(\int \sec^2 x\ dx\right) \times \frac{dx}{dx}\right]dx$$

$$= x\ tanx - \int tanx \times 1dx$$

$$= x\ tanx - log\ secx + c$$ उत्तर.

प्र0 2 $\frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ का समाकलन ज्ञात करें।

हलः– $I = \int \frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

माना कि $\sin^{-1}x = t$ अतः $x = \sin t$

दोनों तरफ अवकलन करने पर

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt$$

अतः $I = \int t\sin t\,dt$

$$= t\times\int \sin t\,dt - \int\left[\left(\int \sin t\,dt\right) \times \frac{dt}{dt}\right]dt$$

$$= t(-\cos t) - \int(-\cos t)\,dt$$

$$= -t\cos t + \sin t + c$$

$$= -\sin^{-1}x\ \cos(\sin^{-1}x) + \sin(\sin^{-1}x) + c$$ उत्तर.

अभ्यास हेतु प्रश्नः–

01. $\int x(logx)^2 dx$

02. $\int \tan^{-1}x\,dx$

03. $\int \frac{x\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

on next page →

3- **Integration as sum of limits** ;kx lhek ds #i esa lekdyu

;kxQy dh lhek ds #i esa fuf pr lekdyu dk gy Kkr djus ds fy, ge fuEu lw= dk iz;ksx djrs gSA

$\int f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} h\,[\,f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots\ldots\ldots+f\{a+(n-1)h\}]$

जहॉ a = निम्न सीमा, b = उच्च सीमा और n = $\frac{b-a}{h}$ या nh = b – a

ftlds vUrxZr vkSj Hkh fuEu lw=ksa dh vko ;drk gy djus esa iM+ ldrh gSA

01- $\sum \boldsymbol{n} = \mathbf{1+2+3}\ldots\ldots\ldots\ldots + \boldsymbol{n} = \frac{n(n+1)}{2}$ प्राकृत संख्याओं का योग।

02- $\sum n^2 = 1^2+2^2+3^2\ldots\ldots\ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग।

03- $\sum n^3 = 1^3+2^3+3^3\ldots\ldots\ldots\ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ प्राकृत संख्याओं के घनों का योग।

04- $\mathbf{a + ar + ar^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mathbf{ar^{n-1}} = \frac{a\,(r^n-1)}{r-1}$ गु0 श्रे0 के $\boldsymbol{n}$ पदों का योग।

साधित प्रश्नः— 01. योगफल सीमा के रुप में निश्चित समाकलन करें:— $\int_2^3 x^2\,dx$

हलः— चूँकि $\int f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} h\,[\,f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots\ldots\ldots+f\{a+(n-1)h\}]$ ....(I)

यहॉ a = 2, b = 3 अतः nh = b – a = 3 – 2 = 1 अर्थात् nh = 1

और f(a) = f(2) = 2^2 , f(a+h) = $(a+h)^2 = (2+h)^2$, f (a+2h) = $(a+2h)^2 = (2+2h)^2$ ....f{a+(n-1)h } = $\{a+(n-1)h\}^2 = \{2+(n-1)h\}^2$

अतः समीकरण (I) से

$\int_2^3 x^2\,dx = \lim_{h\to 0} h\,[2^2 + (2+h)^2 + (2+2h)^2 + \ldots\ldots\ldots + f\{2+(n-1)h\}^2] = \lim_{h\to 0} h\,[2^2 + (2^2+2.2h+h^2) + \{2^2+2(2.2h)+(2h)^2 \ldots\ldots\ldots + 2^2+2.2(n-1)^2h+(n-1)^2h^2$

$= \lim_{h\to 0} h[(2^2+2^2+2^2+\cdots\ldots\ldots \text{to n terms})+4h(1+2+3+\ldots\ldots\ldots+(n-1)+h^2\{1^2+2^2+3^2\ldots+(n-1)^2\}]$

$= \lim_{h\to 0} h\,[2^2.n + 4h.n.\left(\frac{n-1}{2}\right) + h^2(n-1)n\left(\frac{2n-1}{6}\right)]$

$= \lim_{h\to 0} [2^2.nh + 4nh.\left(\frac{nh-h}{2}\right) + (nh-h)nh\left(\frac{2nh-h}{6}\right)]$

$= \lim_{h\to 0} [2^2.1 + 4.1\left(\frac{1-0}{2}\right) + (1-0)1\left(\frac{2.1-0}{6}\right)]$

$= 4 + 2 + \frac{1}{3}$

$= \frac{19}{3}$ उत्तर.

अभ्यास हेतु प्रश्नः—

01. $\int_{-1}^{1} e^x\,dx$ का योगफल सीमा रुप में समाकलन करें।

,02. $\int_0^5 (x+1)\,dx$ का योगफल सीमा रुप में समाकलन करें।

03. $\int_a^b x\,dx$ का योगफल सीमा रुप में समाकलन करें।

on next page →

4- **Definite Integration with some special properties and based with previous idefinite integration** fo k’k x|.kk d vk/kkj ij fuf pr lekdyu

निश्चित समाकलन के अन्तर्गत कुछ विशेष गुणों का उपयोग करने पर निश्चित समाकलन के प्रश्न आसानी से हल हो जाते हैं जो इस प्रकार हैं–

01. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$ 02. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

03. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

04. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

05. $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

06. $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ यदि $f(2a-x) = f(x)$

$= 0$ यदि $f(2a-x) = -f(x)$

07. $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ यदि $f(-x) = f(x)$ सम फलन

$= 0$ यदि $f(-x) = -f(x)$ विषम फलन

जहाँ $\int_{-a}^a$ में –a = निम्न सीमा तथा a = उच्च सीमा

साधित तथा परिषदीय मॉडल प्रश्नः–

01. $\int_0^1 e^{x2}\ dx$ का समाकलन करें।

हलः– माना कि $x^2 = t$ अतः $2x\,dx = dt$

जब $x = 0$ तो $t = 0$

जब $x = 1$ तो $t = 1$

अतः $I = \int_0^1 e^t \frac{dt}{2}$

$= \frac{1}{2}[\,e^t\,]$ (सीमा 0 से 1)

$= \frac{1}{2}[\,e^1 - e^0\,]$

$= \frac{1}{2}(\,e - 1\,)$ उत्तर.

02. $\int_0^{\pi} \frac{x\,tanx\ dx}{\sec x+\tan x}$ का समाकलन ज्ञात करें।

हलः– माना कि $I = \int_0^{\pi} \frac{x\,tanx\ dx}{\sec x+\tan x}$..............................(I)

$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\,tanx\ dx}{\sec x+\tan x}$..............................(II)

I और II को जोड़ने पर :–

$2I = \int_0^{\pi} \frac{xtan\,x+\pi\,tanx-xtan\,x}{\sec x+\tan x}\,dx$

on next page →

या $\quad I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{tanx\ dx}{\sec x+\tan x}$

$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{tanx\ dx}{\sec^2 x-\tan^2 x} \times \sec x - \tan x$

$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} tanx\times \sec x\, dx$ - $\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \sec^2 x. dx + \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} 1dx$

$= \frac{\pi}{2}[\sec x] - \frac{\pi}{2}[\tan x] + \frac{\pi}{2}[x]$ (सीमा 0 से π तक)

$= \frac{\pi}{2}[\sec \pi - \sec 0]$- $\frac{\pi}{2}[\tan \pi - \tan 0] + \frac{\pi}{2}[\pi - 0]$

$= \frac{\pi}{2}(-1-1)$- $\frac{\pi}{2}(0\text{-}0) + \frac{\pi}{2}.\pi$

$= (\frac{\pi^2}{2} - \pi)$ उत्तर.

03. $\int_0^1 |5x-3|\,dx$ का समाकलन ज्ञात करें।

हलः– चूंकि $|5x-3| = (5x-3)$ जब $5x-3 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{3}{5}$

$= -(5x-3)$ जब $5x-3 < 0 \rightarrow x < \frac{3}{5}$

अतः $\int_0^1 |5x-3|dx = \int_0^{\frac{3}{5}} |5x-3|dx + \int_{\frac{3}{5}}^1 |5x-3|\,dx$

$= -\int_0^{\frac{3}{5}} (5x-3)dx + \int_{\frac{3}{5}}^1 (5x-3)\,dx$

$= [3x - \frac{5x^2}{2}] + [\frac{5x^2}{2} - 3x]$ (0 से $\frac{3}{5}$ तथा $\frac{3}{5}$ से 1 निम्न सीमा और उच्च सीमा)

$= (\frac{9}{5} - \frac{9}{10}) + (-\frac{1}{2} + \frac{9}{10})$

$= \frac{13}{10}$ उत्तर.

अभ्यास हेतु परिषदीय मॉडल प्रश्न :–

01. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx$ का समाकलन ज्ञात करें।

02. $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ का समाकलन ज्ञात करें।

03. $\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$ का समाकलन ज्ञात करें

04. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)dx$ का समाकलन ज्ञात करें।

05. $\int_2^8 |x-5|dx$ का समाकलन ज्ञात करें।