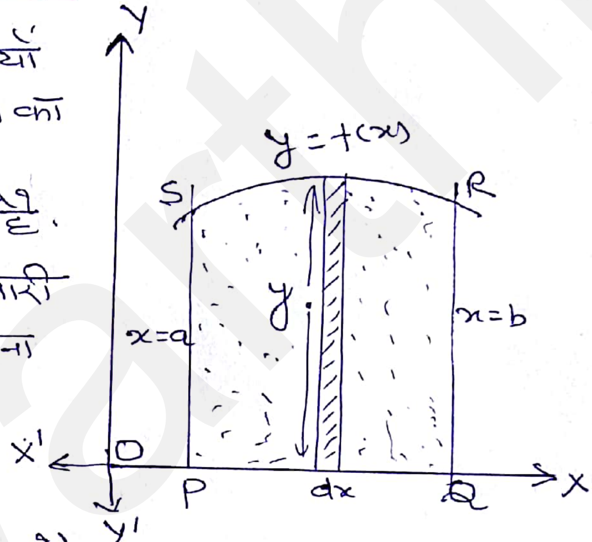
समाकलनों के अनुप्रयोग

इस अध्याय में साधारण वक्रों के अन्तर्गत, सरल रेखाओं, वृत्तों, परवलयों तथा दीर्घवृत्तों (केवल मानक रूप) की चापों के बीच घिरे क्षेत्रफल को ज्ञात करने के लिए समाकलनों के एक विशिष्ट अनुप्रयोग का अध्ययन करेंगे।

साधारण वक्रों के अन्तर्गत क्षेत्रफल :-

दिए वक्र $y=f(x)$, x-अक्ष, कोटियाँ $x=a$ तथा $x=b$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए प्रारंभिक क्षेत्रफल dA ज्ञात करते हैं। पूरे घिरे क्षेत्रफल को बहुत सारी आयताकार पट्टियों से घिरा माना जा सकता है। उनमें से एक पट्टि का क्षेत्रफल प्रा० क्षेत्रफल dA कहलाता है



$\because$ आयताकार पट्टी का क्षे० = ल० × चौ०

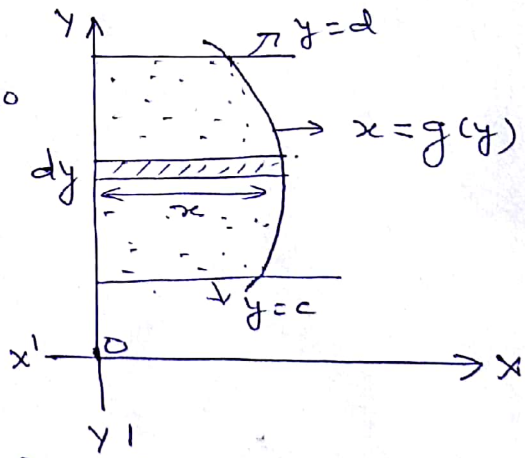
$dA = y\,dx$

पुन: $x=a$ व $x=b$ के बीच सभी पट्टियों के क्षेत्रफलों का योगफल $A=\int_a^b dA = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

पुन: यदि वक्र $x=g(y)$, y अक्ष $y=c$, $y=d$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्र० ज्ञात करने के लिए

$$A=\int_c^d x\,dy=\int_c^d g(y)\,dy$$

यहाँ क्षैतिज पट्टियों पर विचार करेंगे।



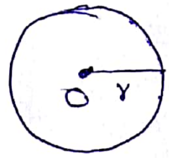
नोट - यदि वक्र की स्थिति x-अक्ष से नीचे है तो क्षेत्र का क्षेत्रफल ऋणात्मक हो जाता है तो हम इसके निरपेक्ष मान को लेते हैं।

निरपेक्ष मान $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$

P.T.O.

कुछ वक्रों के प्रामाणिक रूप :-

1- **वृत्त** - केन्द्र $O(h,k)$
त्रिज्या r तो

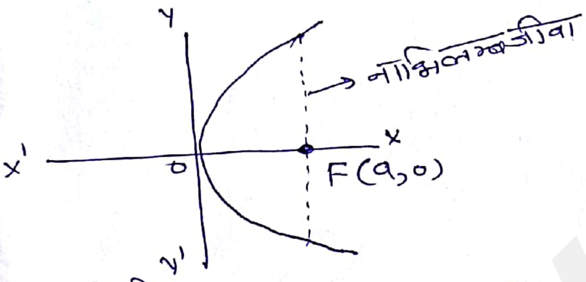


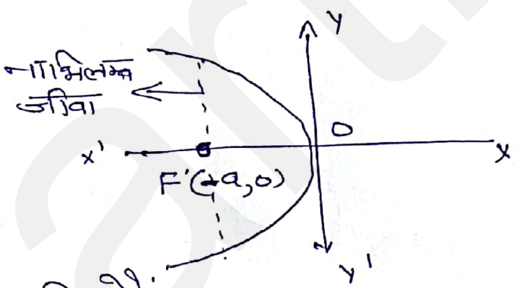
प्रामाणिक रूप -

$$\boxed{(x-h)^2+(y-k)^2=r^2}$$

यदि केन्द्र मूल बिन्दु $(0,0)$ हो तो
वृत्त का समी० $\boxed{x^2+y^2=r^2}$

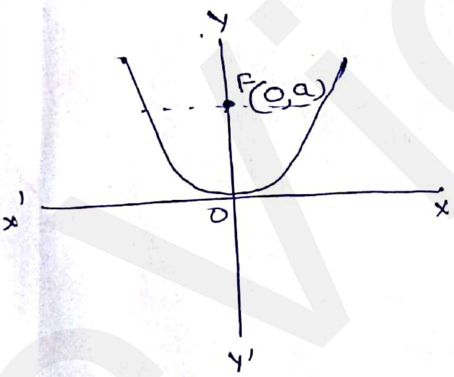
2- **परवलय** (i) $y^2=4ax$ (ii) $y^2=-4ax$

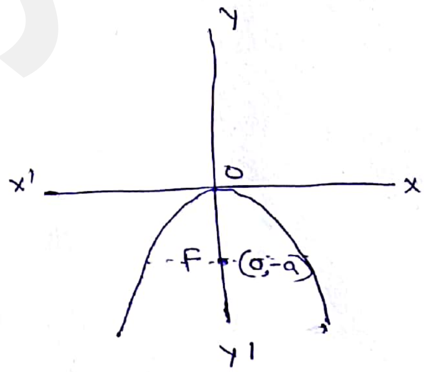




(i) व (ii) दोनों वक्र x-अक्ष के सममित है.

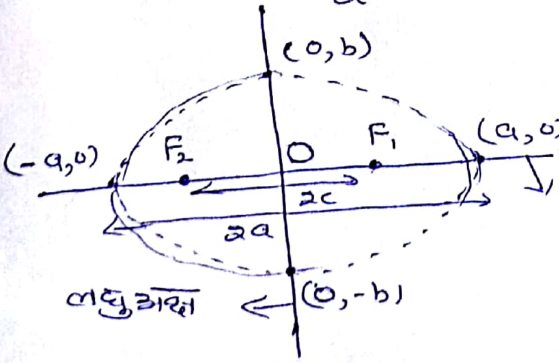
(iii) $x^2=4ay$ (iv) $x^2=-4ay$





(iii) व (iv) दोनों वक्र y-अक्ष के सममित है.

(3) **दीर्घवृत्त** - (A) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $a^2>b^2$ तो दीर्घ अक्ष - x-अक्ष में

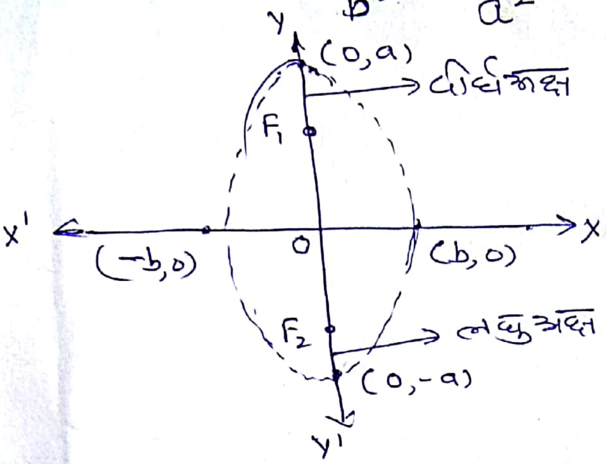


1. दीर्घ अक्ष की ल० = $2a$
2. लघु अक्ष की ल० = $2b$
3. नाभियों के बीच की दूरी = $2c$
4. a, b, c में सम्बन्ध

$$\boxed{c=\sqrt{a^2-b^2}}$$

P.T.O

(3) दीर्घवृत्त (B) - $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, $a^2 > b^2$ तो दीर्घ अक्ष y अक्ष पर होगा



दीर्घ अक्ष की लम्बाई = 2a
लघु अक्ष की लम्बाई = 2b
नाभियों के बीच की दूरी = 2c
a, b, c में सम्बन्ध

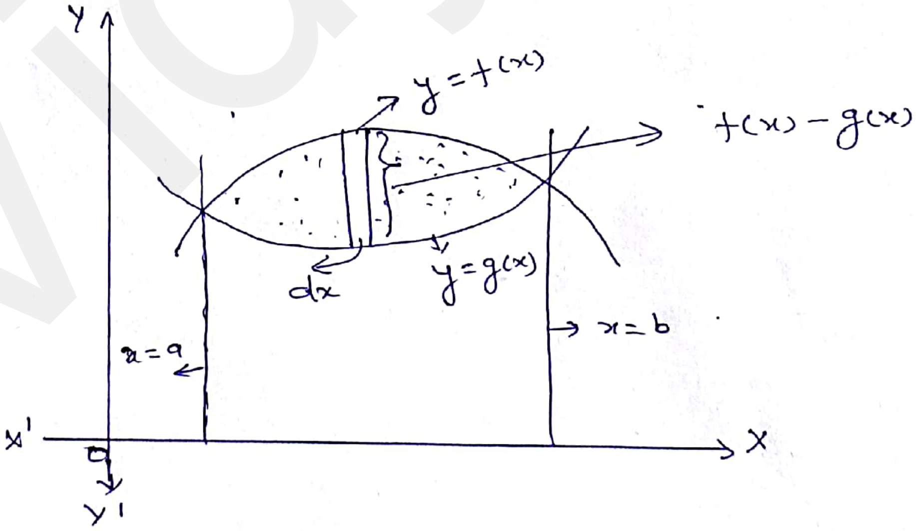
$$\boxed{c = \sqrt{a^2 - b^2}}$$

दो वक्रों के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल :-
(Area Between Two Curves)

माना दो वक्र $y = f(x)$ और $y = g(x)$ दिए गये हैं।
अन्तराल $[a, b]$ में यदि $f(x) \geq g(x)$
तो प्रारम्भिक क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए प्रारम्भिक पट्टी की ऊँचाई $f(x) - g(x)$ होगी। और चौड़ाई dx होगी।

अतः प्रारम्भिक क्षेत्र $dA = [f(x) - g(x)] \cdot dx$

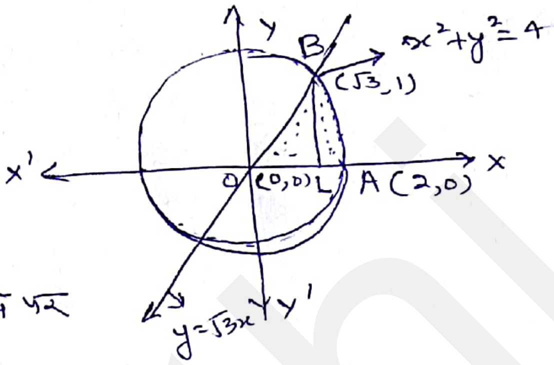
तथा कुल क्षेत्रफल $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$



Example-1- प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2+y^2=4$, रेखा $x=\sqrt{3}y$ एवं x-अक्ष द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Solⁿ- वृत्त $x^2+y^2=4$

केन्द्र $(0,0)$ तथा त्रिज्या 2 है।



$x^2+y^2=4$ तथा $x=\sqrt{3}y$ को सरल करने पर

$3y^2+y^2=4 \Rightarrow 4y^2=4$

$\Rightarrow y=\pm 1$ का मान $x=\sqrt{3}y$ में रखने पर

$x=\pm\sqrt{3}$

अतः रेखा $(\sqrt{3},1)$ तथा $(0,0)$ से होकर जाती है।

$x^2+y^2=4$ से $y=\sqrt{2^2-x^2}$

$x=\sqrt{3}y$ से $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$

अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्रफल OBL + क्षेत्रफल LBA

$$A=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x}{\sqrt{3}}dx+\int_{\sqrt{3}}^{2}\sqrt{2^2-x^2}\,dx$$

$$A=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{3}}+\left[\frac{x}{2}\sqrt{2^2-x^2}+\frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_{\sqrt{3}}^{2}$$

$$A=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}\left[(\sqrt{3})^2-0^2\right]+\left[(0+2\sin^{-1}1)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{4-3}+2\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

$$A=\frac{1}{2\sqrt{3}}\times 3+2\times\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-2\frac{\pi}{3}$$

$$=\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\pi-\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi-2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}\text{ वर्ग इकाई}$$

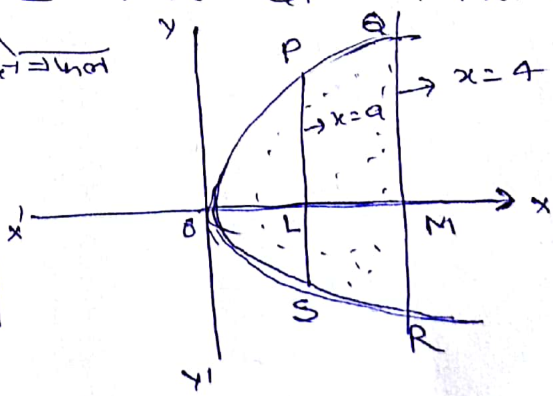
Ans

Example-2 - यदि वक्र $x=y^2$ एवं रेखा $x=4$ से घिरा क्षेत्रफल रेखा $x=a$ द्वारा दो बराबर भागों में विभाजित होता है तो a का मान ज्ञात कीजिए।

~~Solⁿ-~~

Solⁿ- दिया गया वक्र परवलय है जो x अक्ष के सममित होगा

वक्र तथा $x=4$ के बीच घिरा क्षेत्रफल



$$\text{क्षे.}ORQ=2\int_0^4 y\,dx$$

$$=2\int_0^4\sqrt{x}\,dx\quad\left[\because y^2=x,\ \therefore y=\sqrt{x}\right]$$

क्षेत्रफल ORQ $= 2\int_0^4 x^{1/2}\,dx$

$= 2\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^4$

$= \frac{4}{3}\left[4^{3/2} - 0\right]$

$= \frac{4}{3}\times 8 = \frac{32}{3}$ वर्ग इकाई —— (1)

पुनः वक्र तथा $x = a$ से घिरा क्षेत्रफल

क्षेत्रफल OSP $= 2\int_0^a y\,dx = 2\int_0^a \sqrt{x}\,dx$

$= 2\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^a$

$= \frac{4}{3}\cdot a^{3/2}$ वर्ग इकाई —— (11)

दिया है -

$x = y^2$ एवं $x = 4$ से घिरा क्षे० $= 2\times$ $x = y^2$ तथा $x = a$ से घिरा क्षेत्रफल

क्षेत्रफल ORQ $= 2\cdot$ क्षेत्रफल OSP

$\frac{32}{\cancel{3}} = 2\cdot\frac{4}{\cancel{3}}a^{3/2}$ [समी० (1) व (2) से]

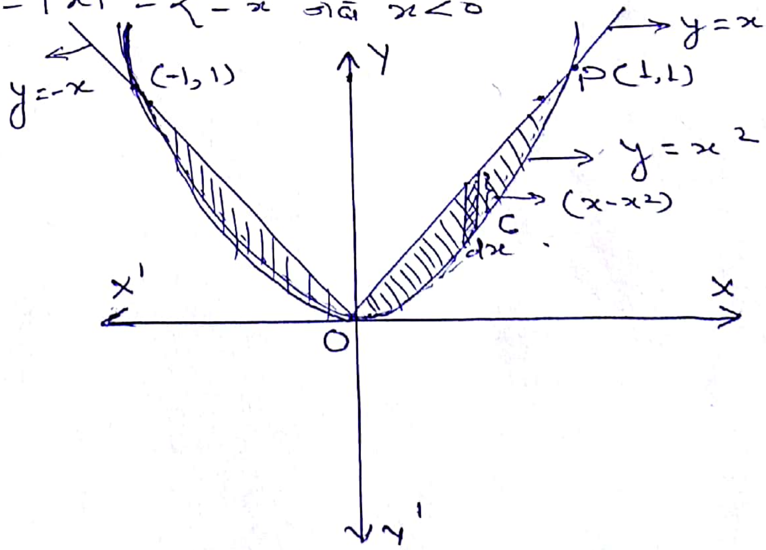
$\Rightarrow a^{3/2} = 4$

$\Rightarrow a = 4^{2/3}$ इकाई Ans

Example - 3 - परवलय $y = x^2$ एवं $y = |x|$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Soln -

पहला वक्र परवलय $y = x^2$ है शीर्ष $(0, 0)$ तथा y-अक्ष के सममित है। तथा $y = |x| = \begin{cases} x & \text{जब } x \geq 0 \\ -x & \text{जब } x < 0 \end{cases}$



$y = x$ का मान $y = x^2$ में रखने पर

$x = x^2$

$\Rightarrow x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$x = 0,\ x = 1$

$y = -x$ रखने पर

$-x = x^2$

$x^2 + x = 0$

$x(x+1) = 0$

$x = 0,\ x = -1$

अतः $x = 0, -1, 1$

$x=0$ तो $y=0$
$x=1$ तो $y=1$
$x=-1$ तो $y=1$

अतः दोनों वक्रो के प्रतिच्छेद बिन्दु $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$ हैं तथा y- अक्ष के सममित हैं।

अभीष्ट क्षेत्रफल $OCP = 2\times$ (प्रथम चतुर्थांश में छायांकित भाग)

$$= 2\cdot\int_0^1 (x-x^2)\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= 2\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-(0-0)\right]$$

$$= 2\left[\frac{3-2}{6}\right] = 2\times\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$ वर्ग इकाई

Ans

Example-4 वक्र $x^2=4y$ तथा रेखा $x=4y-2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Soln— वक्र $x^2=4y$ परवलय है जो y अक्ष के सममित है तथा $x=4y-2$ सरल रेखा है।

$x^2=4y$, $x=4y-2$ को ~~सरल~~ हल करने पर

$\Rightarrow (4y-2)^2=4y$

$16y^2+4-16y=4y$

$16y^2-20y+4=0$

$4y^2-5y+1=0$

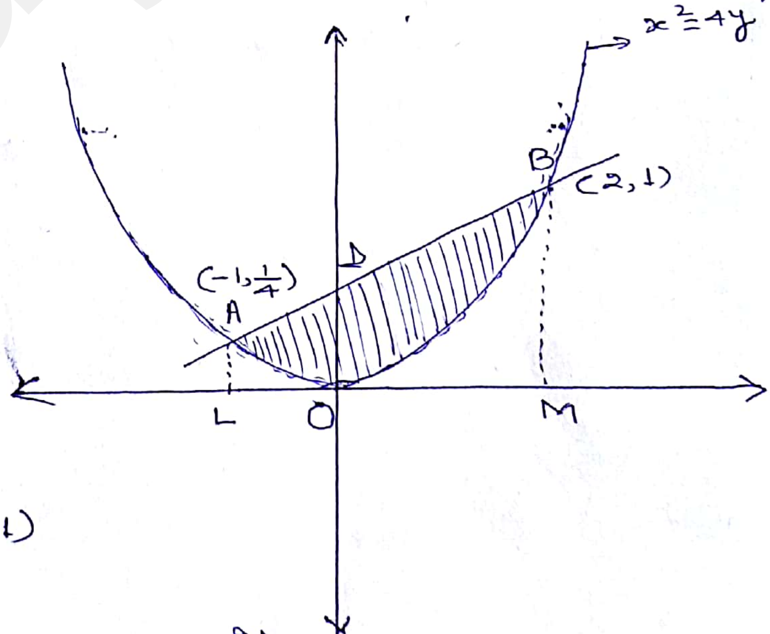
$(4y-1)(y-1)=0$

$y=\frac{1}{4}$, $y=1$

$y=\frac{1}{4}$ तो $x=-1$

$y=1$ तो $x=2$

अतः बिन्दु $A(-1,\frac{1}{4})$, $B(2,1)$ प्रतिच्छेद बिन्दु हैं।



अभीष्ट क्षेत्रफल छायांकित भाग AOB है।

अतः छायांकित भाग AOB का क्षे० = LMBDA का क्षे० − LMBOA का क्षे० —(1)

(i) क्षेत्रफल LMBDA $= \int_{-1}^{2} y\,dx$ $\left[\because x = 4y-2 \quad 4y = x+2 \quad y = \frac{x+2}{4}\right.$

$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{2}(x+2)\,dx$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}$

$= \frac{1}{4}\left[(2+4)-(\frac{1}{2}-2)\right]$

$= \frac{1}{4}(6+\frac{3}{2}) = \frac{15}{8}$ वर्ग इकाई —— (2)

(ii) क्षेत्रफल LMBOA $= \int_{-1}^{2} y\,dx$ $\left\{\because x^2 = 4y \Rightarrow y = \frac{x^2}{4}\right.$

$= \int_{-1}^{2}\frac{x^2}{4}$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{4}\times\frac{9}{3} = \frac{3}{4}$ वर्ग इकाई —(3)

समी० (2) व (3) से मान समी० 1 में रखने पर

अभीष्ट क्षेत्रफल $= \frac{15}{8} - \frac{3}{4} = \boxed{\frac{9}{8} \text{ वर्ग इकाई}}$

Ans

Example-5- परवलय $x^2 = 4y$ और वृत्त $4x^2+4y^2=9$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Solⁿ- $x^2 = 4y$ परवलय का समीकरण है जो y-अक्ष के सममित है।

वृत्त $4x^2+4y^2=9$

$x^2+y^2 = \frac{9}{4}$

$x^2+y^2 = (\frac{3}{2})^2$

केन्द्र (0,0) व त्रिज्या $\frac{3}{2}$ है।

पुनः $x^2 = 4y$ का मान $4x^2+4y^2=9$ में रखने पर

$16y+4y^2 = 9$

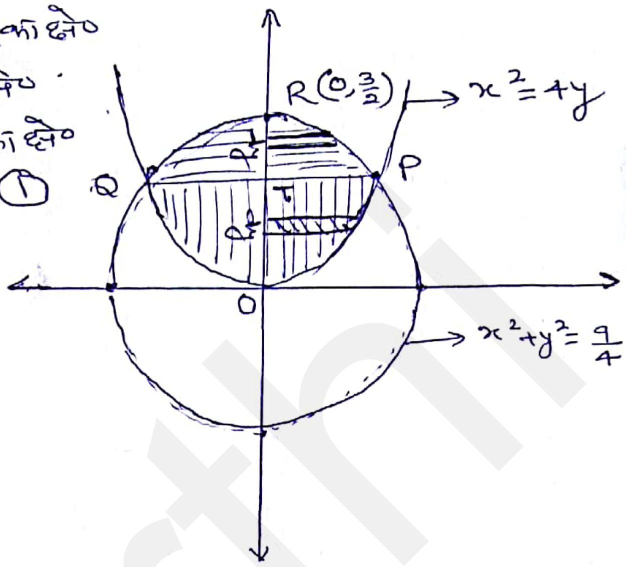
$4y^2+16y-9 = 0$

$(2y+9)(2y-1)=0$ से $y = -\frac{9}{2}, \frac{1}{2}$

$\because y \neq -9/2$ अतः $y = \frac{1}{2}$ अब ग्राफ खींचने पर -

P.T.O.

अभीष्ट क्षेत्र का क्षेत्रफल = क्षेत्र OPRQ का क्षे०
= OPQ का क्षे० + PQR का क्षे०
= 2× OPT का क्षे० + 2× TPR का क्षे० —— (1)



(i) OPT का क्षे० $= \int_0^{\frac{1}{2}} x\,dy$

$\left[\because x^2 = 4y \quad x = \sqrt{4y} = 2\sqrt{y} = 2y^{1/2}\right]$.

$\therefore$ OPT का क्षे० $= 2\int_0^{\frac{1}{2}} y^{1/2} = 2\left[\frac{y^{3/2}}{3/2}\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{4}{3}\left[\frac{1}{2}\right]^{3/2} = \frac{4}{3}\times\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ वर्ग इकाई —— (2)

(ii) TPR का क्षे० $= \int_{1/2}^{3/2} x\,dy = \int_{1/2}^{3/2}\sqrt{\frac{9}{4}-y^2}\,dy$ $\left\{\because x^2+y^2 = 9/4,\ x^2 = \frac{9}{4}-y^2,\ x = \sqrt{\frac{9}{4}-y^2}\right.$

$= \left[\frac{y}{2}\sqrt{\frac{9}{4}-y^2} + \frac{9}{8}\sin^{-1}\frac{y}{3/2}\right]_{1/2}^{3/2}$

$\left[\because \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right.$ से $\left.\right]$

$= \left[\left(0+\frac{9}{8}\sin^{-1}1\right) - \left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{1}{4}} + \frac{9}{8}\sin^{-1}\frac{1}{3}\right)\right.$

$= \frac{9}{8}\sin^{-1}1 - \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{9}{8}\sin^{-1}\frac{1}{3}$

$= -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{9}{8}\left(\sin^{-1}1 - \sin^{-1}\frac{1}{3}\right)$

$= -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{9}{8}\left(\sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ $\left[\because \sin^{-1}x - \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right]\right.$ —— (3)

समी० (2) व (3) का मान (1) में रखने पर -

अभीष्ट क्षेत्रफल $= 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{4} + \frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$= \boxed{\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3}}$ वर्ग इकाई

Ans

P.T.O.

Example-6. वक्रों $(x-1)^2+y^2=1$ एवं $x^2+y^2=1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Solⁿ- वृत्त $x^2+y^2=1$ का केन्द्र $(0,0)$ तथा त्रिज्या 1 है।

वृत्त $(x-1)^2+y^2=1$ का केन्द्र $(1,0)$ तथा त्रिज्या 1 है।

दोनों वृत्तों के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को ज्ञात करने के लिए $x^2+y^2=1$ तथा $(x-1)^2+y^2=1$ को हल करने पर -

$$(x-1)^2+y^2=1 \quad \text{—— (I)}$$

$$x^2+y^2=1 \quad \text{—— (II)}$$

$$(x-1)^2+y^2 = x^2+y^2$$

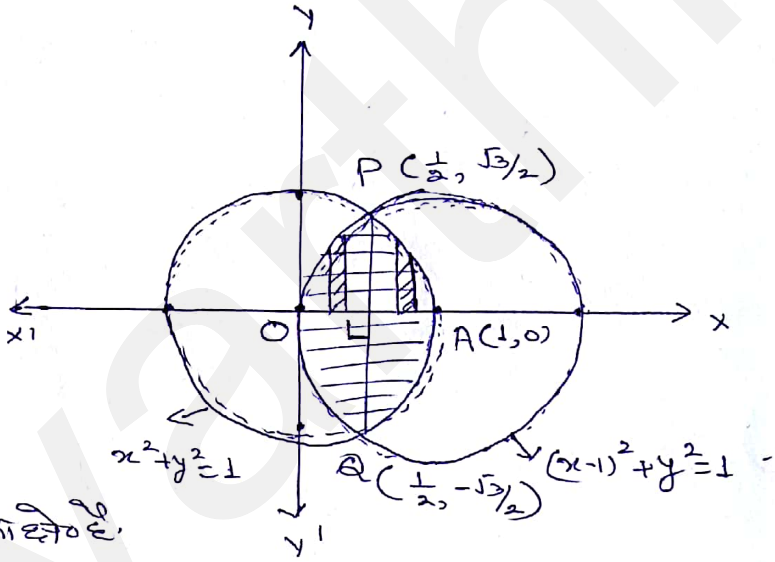
$$\cancel{x^2}+1-2x+\cancel{y^2} = \cancel{x^2}+\cancel{y^2}$$

$$2x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 1/2}$$

$$\boxed{y = \pm\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

प्रतिच्छेद बिन्दु $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$Q\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



अभीष्ट क्षेत्रफल छायांकित भाग का क्षेत्र है।

अभीष्ट क्षेत्रफल = OQAP का क्षेत्रफल

= 2× OAP का क्षेत्रफल

= 2×(OLP का क्षे० + LAP का क्षेत्र०)

$$= 2\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx\right]$$

$\left\{ (x-1)^2+y^2=1 \text{ से } y^2 = 1-(x-1)^2 \Rightarrow y = \sqrt{1-(x-1)^2} \right.$

$\left. x^2+y^2=1 \text{ से } y^2 = 1-x^2 \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2} \right\}$

अभीष्ट क्षेत्रफल $= 2\left\{\left[\frac{x-1}{2}\sqrt{1-(x-1)^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}(x-1)\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}x\right]_{1/2}^{1}\right\}$

$$= 2\left\{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) - 0 - \frac{1}{2}\sin^{-1}(-1)\right\}$$

$$+ 2\left\{\left(0+\frac{1}{2}\sin^{-1}1\right) - \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi - \frac{\pi}{3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)$$ वर्ग इकाई **Ans**

P.T.O.

Imp

वक्र अनुरेखण में सदैव स्मरणीय

(1) सममिति :

* यदि वक्र के समीकरण में y की सभी घात सम हैं तो वक्र x-अक्ष के सापेक्ष सममित होगा।

* यदि वक्र के समीकरण में x की सभी घात सम हैं तो वक्र y-अक्ष के सापेक्ष सममित होता है।

* यदि वक्र के समीकरण में x व y दोनों की सभी घातें सम हों तो वक्र दोनों अक्षों के सापेक्ष सममित होता है।

* यदि वक्र के समीकरण में x व y को परस्पर बदलने से कोई परिवर्तन नहीं हो तो वक्र रेखा $y=x$ के सापेक्ष सममित होता है।

* यदि वक्र के समीकरण में अचर पद नहीं है तो वक्र मूल बिन्दु से गुजरेगा।

* वक्र के समीकरण में $y=0$ और $x=0$ रखने पर क्रमशः x-अक्ष और y अक्ष के साथ वक्र के प्रतिच्छेदन बिन्दु प्राप्त होते हैं।

जैसे- वक्र $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

x अक्ष को $(\pm a, 0)$ तथा y अक्ष को $(0, \pm b)$ पर काटेगा।