====================================

अवकल समीकरण

[DIFFERENTIAL EQUATIONS]

==

अवकल समीकरण (Differential equations) :

एक ऐसा समीकरण जिसमें स्वतंत्र चर (independent variable) के सापेक्ष आश्रित चर (dependent variable) के अवकलज (derivatives) सम्मिलित हो, **अवकल समीकरण** कहलाता है।

उदाहरणार्थ : $x\dfrac{dy}{dx}=y$ एक अवकल समीकरण है।

अवकल समीकरण की कोटि

किसी **अवकल समीकरण की कोटि** (order of a differential equation) उस अवकल समीकरण मे सम्मिलित स्वतंत्र चर के सापेक्ष आश्रित चर के उच्चतम कोटि (higher order) के अवकलज की कोटि (order of the derivative) द्वारा परिभाषित होती है।

उदाहरणार्थ : $\dfrac{dy}{dx}=x^2,\ \dfrac{d^2y}{dx^2}+3x=y$ क्रमशः 1 तथा 2 कोटि के अवकल समीकरण हैं।

अवकल समीकरण की घात

उस अवकल समीकरण की घात (Degree of the differential equation) से हमारा तात्पर्य है उस अवकल समीकरण में उपस्थित उच्चतम कोटि (higher order) के अवकलज की उच्चतम घात (higher degree of derivative) (धनात्मक पूर्णांक)।

उदाहरणार्थ : अवकल समीकरण $\dfrac{dy}{dx}=\sin x$ तथा $\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+y\dfrac{dy}{dx}=0$ के घात क्रमशः 1 तथा 1 हैं।

अवकल समीकरण के निर्माण की प्रक्रिया (Procedure to form a Differential Equation)

I. एक प्राचल (parameter) a वाले वक्रों के कुल का समीकरण का रूप होगा,

$$f(x,\ y,\ a)=0 \qquad \dots (1)$$

समीकरण (1) को x के सापेक्ष अवकलन करने पर इसका रूप होगा,

$$g\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ a\right)=0 \qquad \dots (2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से प्राचल a को विलुप्त (eliminate) करने पर हमें अपेक्षित अवकल समीकरण निम्न रूप में प्राप्त होगा,

$$F\left(x,y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0. \qquad \dots (3)$$

II. दो प्राचल (parameters) a तथा b वाले वक्रों के कुल का समीकरण का रूप होगा,

$$f(x,\ y,\ a,\ b)=0 \qquad \dots (4)$$

समीकरण (4) को x के सापेक्ष अवकलन करने पर इसका रूप होगा,

$$g\left(x,y,\ \frac{dy}{dx},\ a,\ b\right)=0 \qquad \dots (5)$$

चूँकि दो प्राचल को विलुप्त करने के लिए एक और समीकरण की आवश्यकता है, इसलिए परिणाम (5) को एक बार और x के सापेक्ष अवकलन करने पर इसका रूप होगा,

$$h\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ a,\ b\right)=0 \qquad \dots (6)$$

अब तीन समीकरण (4), (5) तथा (6) से दो प्राचल a एवं b को विलुप्त करने पर हमें अपेक्षित अवकल समीकरण निम्न रूप में प्राप्त होगा,

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0 \quad \ldots (7)$$

प्रथम कोटि एवं प्रथम घात के अवकल समीकरणों का हल (Solution of First Order, First Degree Differential Equations) :

I. चर पृथक्करण रूप (Variable Separation form)

माना कि दत्त अवकल समीकरण है,

$$\frac{dy}{dx}=F(x,\ y) \quad \ldots (1)$$

यदि (1) को हम $\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{g(y)}$ के रूप में अभिव्यक्त कर सकते हैं तो इसका रूप होगा,

$$g(y)\cdot dy=f(x)\cdot dx \quad \ldots (2)$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int g(y)\,dy=\int f(x)\,dx$$

$\Rightarrow$ (माना कि) $\quad G(y)=F(x)+C \quad \ldots (3)$

इस प्रकार हम देखते हैं कि दत्त अवकल समीकरण (1) चर पृथक्करण द्वारा (2) के रूप में हो जाता है जिसका समाकलन आसानी से (3) के रूप में ज्ञात हो जाता है।

II. समघातीय रूप (Homogenous form)

$\frac{dy}{dx}=F(x,\ y)$ के रूप वाला अवकल समीकरण समघातीय कहलाता है यदि $F(x,\ y)$ शून्य घात वाला समघातीय फलन है।

i.e., $$\frac{dy}{dx}=F(x,\ y)=f\left(\frac{y}{x}\right) \text{ या } g\left(\frac{x}{y}\right). \quad \ldots (1)$$

समघातीय अवकल समीकरण (Homogenous differential equation) के हल करने के लिए हम $\frac{y}{x}=v$ अर्थात् $y=vx$ प्रतिस्थापित करते हैं।

$$y=vx \ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx} \quad \ldots (2)$$

समीकरण (2) से $\frac{dy}{dx}$ का मान (1) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि

$$v+x\frac{dv}{dx}=f(v),\ \Rightarrow\ x\frac{dv}{dx}=f(v)-v \quad \ldots (3)$$

चरों को पृथक् करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{dv}{f(v)-v}=\frac{dx}{x} \quad \ldots (4)$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर,

$$\int\frac{dv}{f(v)-v}=\int\frac{dx}{x}+C \quad \ldots (5)$$

अब, यदि v को $\frac{y}{x}$ से प्रतिस्थापित कर दिया जाए तो समीकरण (5), समघातीय अवकल समीकरण (1) का व्यापक हल प्रदान करता है।

III. रैखिक समीकरण (Linear form)

अवकल समीकरण का रूप

$$\frac{dy}{dx} + P \cdot y = Q, \qquad \ldots (1)$$

जहाँ P तथा Q अचर (constant) अथवा केवल x का फलन है, प्रथम कोटि (first order) का रैखिक अवकल समीकरण (Linear differential equation) कहलाता है।

रैखिक अवकल समीकरण (1) को हल करने के लिए x के फलन $g(x)$ से दोनों पक्षों को गुणा करते हैं।

i.e., $$g(x)\frac{dy}{dx} + P \cdot g(x) \cdot y = Q \cdot g(x) \qquad \ldots (2)$$

यहाँ $g(x)$ का चयन इस प्रकार करते हैं कि बायाँ पक्ष $y \cdot g(x)$ का अवकलज (derivative) बन जाए।

$$\Rightarrow \quad g(x) \cdot \frac{dy}{dx} + P \cdot g(x) \cdot y = \frac{d}{dx}[y \cdot g(x)]$$

$$\Rightarrow \quad g(x) \cdot \frac{dy}{dx} + P \cdot g(x) \cdot y = g(x) \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot g'(x)$$

$$\Rightarrow \quad P \cdot g(x) = g'(x), \quad \Rightarrow \quad P = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$\Rightarrow \quad \int P\,dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \int P\,dx = \log(g(x))$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = e^{\int P\,dx} \qquad \ldots. (3)$$

यहाँ स्पष्ट है कि समीकरण (1) को $g(x) = e^{\int P\,dx}$ से गुणा करने पर उसका बायाँ पक्ष x तथा y के किसी फलन का अवकलज बन जाता है।

यह फलन $g(x)$ यानि $e^{\int P\,dx}$ दत्त रैखिक अवकल समीकरण का समाकलन गुणांक (Integrating Factor I.F.) कहलाता है।

समीकरण (2) में $g(x) = e^{\int P\,dx}$ रखने पर हम पाते हैं कि

$$e^{\int P\,dx} \cdot \frac{dy}{dx} + P \cdot e^{\int P\,dx} \cdot y = Q \cdot e^{\int P\,dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(y \cdot e^{\int P\,dx}\right) = Q \cdot e^{\int P\,dx}$$

उदाहरण (Example):

उदाहरण 1— Find the general solution of the differential equations: $\sec^2 x \tan y\,dx + \sec^2 y \tan x\,dy = 0$.

हल:— $\sec^2 x \tan y\,dx + \sec^2 y \tan x\,dy = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sec^2 x\,dx}{\tan x} + \frac{\sec^2 y\,dy}{\tan y} = 0$$

यहाँ चर अलग-अलग हो गए हैं।

अब दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\int \frac{\sec^2 x\,dx}{\tan x} + \int \frac{\sec^2 y\,dy}{\tan y} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \log|\tan x| + \log|\tan y| = \log|C|$$

$$\Rightarrow \quad \log|\tan x . \tan y| = \log|C|$$

$\Rightarrow \tan x \cdot \tan y = C$, यही अपेक्षित साधन है।

उदाहरण 2– Show that the given differential equation is homogeneous and solve it $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x}$.

हल : (i) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x}=1+\frac{y}{x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$, जो स्पष्टतः समघाती अवकल समीकरण है।

माना कि $y=vx$, जिससे $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$.

अब दत्त समघाती अवकल समीकरण का रूप है,

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{x+vx}{x}=1+v$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx}=1, \quad \Rightarrow \quad dv=\frac{dx}{x}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने से,

$$\int dv=\int\frac{dx}{x}, \quad \Rightarrow \quad v=\log|x|+c.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{x}=\log|x|+c, \quad \Rightarrow \quad y=x\log|x|+cx,$$ अपेक्षित हल है।

उदाहरण 3– **Find particular solution of the following satisfying the given condition :**

$$\frac{dy}{dx}-3y\cot x=\sin 2x; \quad y=2 \text{ when } x=\frac{\pi}{2}.$$

हल : $\frac{dy}{dx}+(-3\cot x)y=\sin 2x$, जो रैखिक समीकरण है।

यहाँ $\text{I.F.}=e^{\int Pdx}=e^{\int -3\cot x\,dx}=e^{-3\log\sin x}=\sin^{-3}x=\text{cosec}^3 x.$

I.F. गुणा कर समाकलन करने पर,

$$y\cdot\text{cosec}^3 x=\int\sin 2x\cdot\text{cosec}^3 x\,dx$$

$$=\int\frac{2\sin x\cos x}{\sin^3 x}dx=2\int\text{cosec}\,x\cot x=-2\,\text{cosex}\,x+c$$

$$\Rightarrow \quad y=-2\sin^2 x+c\cdot\sin^3 x \qquad \dots(1)$$

जब $x=\pi/2$, तो $y=2$

$$\therefore \quad 2=-2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)+c, \quad \Rightarrow \quad c=4.$$

अतः अपेक्षित विशिष्ट हल $y=-2\sin^2 x(1-2\sin x)$ है।