अध्याय-1

वास्तविक संख्याएँ (Real Numbers)

युक्लिड विभाजन प्रमेयिका (Euclid's Division Lemma)

दो धनात्मक पूर्णांक (Positive Integer) के भाग की प्रमेयिका

दो धनात्मक पूर्णांक a और b दिये गये हों, तो ऐसी अद्वितीय पूर्ण संख्याएँ q और r प्राप्त होते हैं कि $a = bq + r, 0 \le r < b$

अंकगणित की आधारभूत प्रमेय(Fundamental Theorem of Arithmetic):

प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं के एक गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। यह गुणनखण्डन अभाज्य गुणनखण्डों के आने वाले क्रम के बिना अद्वितीय होता है।

अर्थात् यदि x एक भाज्य संख्या है तो

$x = P_1P_2 - - - - - P_n$, जहाँ $P_1 \le P_2 \le P_3 \le - - - - \le P_n$

और $P_1, P_2, - - P_n$ अभाज्य संख्याएँ हैं।

प्रमेय→ P एक अभाज्य संख्या है, यदि P, a^2 को विभाजित करती है, तो P, a को भी विभाजित करेगी, जहाँ a एक धनात्मक पूर्णांक है।

प्रश्न 1. सिद्ध किजिए कि $3\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हलः- माना कि $3\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

इसलिए $3\sqrt{2}$ को $\frac{a}{b}, b \ne 0$ के रूप मे व्यक्त कर सकते हैं।

अतः $3\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{3b}$

चूँकि a, b और 3 तीनों ही पूर्णांक संख्या है। इसलिए $\frac{a}{3b}$ एक परिमेय संख्या होगी।

इसलिए $\sqrt{2}$ भी एक परिमेय संख्या होगी, जो एक विरोधाभास कथन है क्योंकि

$\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

अतः $3\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या मानना गलत है।

अतः $3\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 2. यूक्लिड (Euclid) एल्गोरिथ्म से म0स0 ज्ञात कीजिए।

(1) 867 और 255

अतः युक्लिड भाग लेमा से:-

$867 = 255 \times 3 + 102$ (शेष)

भाजक 255 और शेष 102 को लेने पर

$255 = 102 \times 2 + 51$ (शेष)

पुनः $102 = 51 \times 2 + 0$

युक्लिड एल्गोरिथ्म के अनुसार शेष '0' (शून्य) आ जाने पर म0स0 प्राप्त हो जाता है।

चूँकि अंतिम अशून्य शेष 51 है। अतः अभीष्ट म0स0=51

प्रश्न 3. अंकगणित के मूलभूत प्रमेय का प्रयोग कर- 392 और 3216 का म0स0 ज्ञात कीजिए।

उत्तर:- मूलभूत प्रमेय के प्रयोग द्वारा म0स0 निकालने में सर्वप्रथम दिये गये संख्या का अभाज्य गुणनखण्ड के रूप में लिखते हैं:

$392 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7 = 2^3 \times 7^2$

$3216 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 67 = 2^4 \times 3 \times 67$

$\therefore$ म0स0 $(392, 3216) = 2^3$ (उभयनिष्ठ गुणनखण्ड का सबसे छोटा घात)

ल०स० (392, 3216) $= \dfrac{\text{दोनों संख्याओं का गुणनफल}}{\text{म०स० (392, 3216)}} = \dfrac{392 \times 3216}{2^3 (= 8)}$

$= \dfrac{1260672}{8}$

$= 157584$

[$\because$ *ल0स0 × म0स0 = संख्य ाओ का गुणनफल*]

वास्तविक संख्याएँ (Real Number)

परिमेय संख्याओं का दशमलव प्रसार
(Decimal Expansion of Rational Number)

सांत दशमलव प्रसार

परिमेय संख्या $\frac{P}{q}$, जहाँ P और q सह अभाज्य है तथा q का अभाज्य गुणनखण्ड 2^n5^m के रूप मे हो जहाँ $m, n, \geq, o$

Example: (1) $0.375 = \frac{375}{10^3} = \frac{3\times5^3}{2^3\times5^3}$

$= \frac{3}{2^3}$

(2) $23.3408 = \frac{233408}{10^4} = \frac{2^2\times7\times521}{5^4}$

आवर्ती असांत दशमलव प्रसार

परिमेय संख्या $\frac{P}{q}$ में q का अभाज्य गुणनखण्ड 2^n5^m के रूप में न हो जहाँ $n, m, \geq, o$

Example: (1) $\frac{64}{455}$

(2) $\frac{129}{2^25^77^5}$

प्रश्न 1. $\frac{15}{1600}$ का दशमलव प्रसार सांत या असांत आवर्ती है? ज्ञात करें।

उत्तर:- $\frac{15}{1600} = \frac{15}{16\times100} = \frac{15}{2^4\times2^2\times5^2} = \frac{15}{2^6\times5^2}$

$\because \frac{p}{q}$ के रूप में $\frac{15}{1600} = \frac{15}{2^6\times5^2}$ अर्थात $q = 2^6\times5^2$ (अर्थात 2^m ´ 5^n, $m, n, \geq, o$)

अतः $\frac{15}{1600}$ का दशमलव प्रसार सांत है।

[संभावित अभ्यास प्रश्न → (i) $\frac{6}{15}$ (ii) $\frac{64}{455}$ (iii) $\frac{17}{512}$]

☆☆→ अपरिमेय संख्या का ऋण (−) और व्युत्क्रम अपरिमेय होता है।

→ परिमेय और अपरिमेय संख्याओं का योग एवं अन्तर अपरिमेय होता है