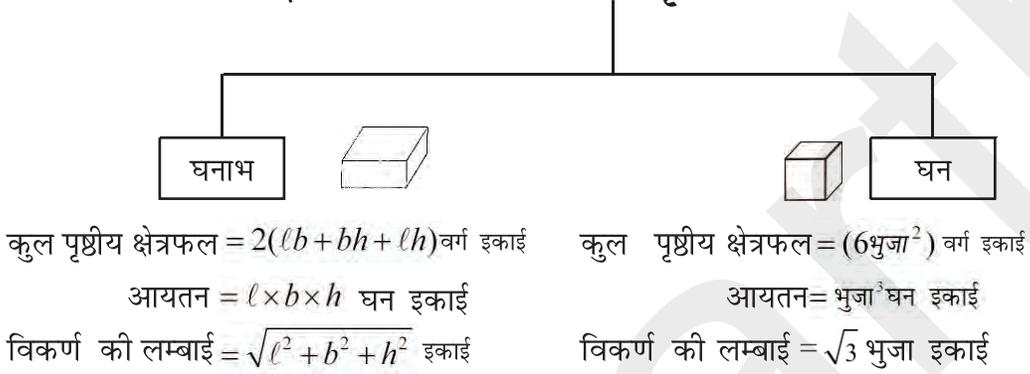
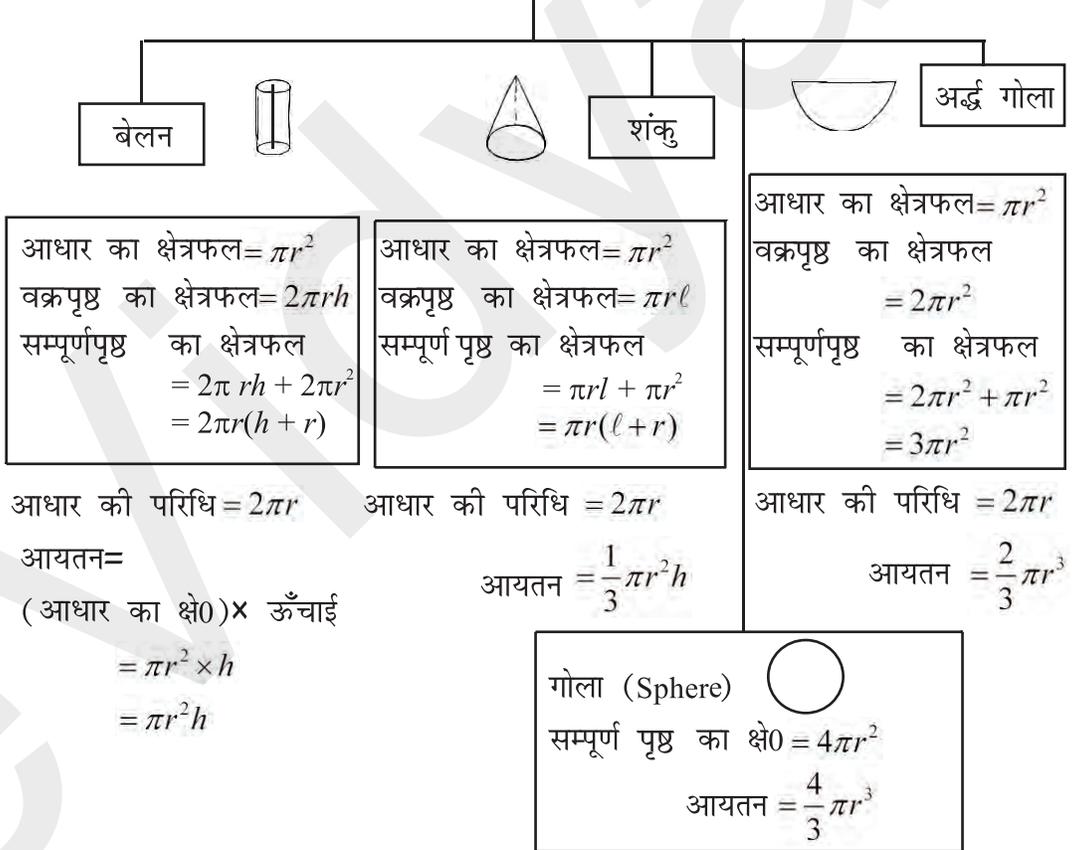


अध्याय-13

आयतन तथा क्षेत्रफल → ठोस आकृतियाँ - समतल सतह



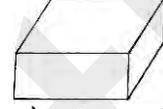
ठोस आकृतियाँ-वक्र सतह



ठोस आकृतियों के आयतन तथा क्षेत्रफल

(Volume and Surface area of Solid)

ठोस (Solid):- आधारभूत आकृतियाँ - घनाभ, घन, शंकु, बेलन और गोला
वे वस्तुएँ जिनकी आकार (Shape) एवं माप (Size) निश्चित होती हैं, ठोस वस्तुएँ कहलाती हैं।



1. **घनाभ:-** जिनक फलक (Faces) आयताकार होते हैं।

- सूत्र- (i) आयतन = $(\ell \times b \times h)$ घन इकाई जहाँ ℓ = लम्बाई, b = चौड़ाई, h = ऊँचाई
(ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2(\ell b + bh + \ell h)$ वर्ग इकाई
(iii) विकर्ण की लम्बाई = $\sqrt{\ell^2 + b^2 + h^2}$ इकाई

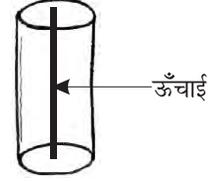
2. **घन:-** जिसके सभी फलक वर्गाकार होते हैं। एक भुजा = a इकाई

- सूत्र- (i) आयतन = a^3 घन इकाई
(ii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6a^2$ वर्ग इकाई
(iii) विकर्ण की लम्बाई = $\sqrt{3} a$ इकाई



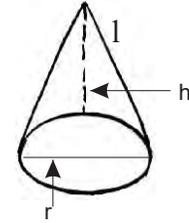
3. **ठोस बेलन:-** दोनो आधार (Base) सर्वांगसम होते हैं तथा आकार वृत्ताकार होते हैं।

- सूत्र- (i) आधार का क्षेत्रफल = πr^2
(ii) आधार का परिधि = $2\pi r$
(iii) बेलन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल = $2\pi r h$
(iv) बेलन के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल = $2\pi r^2 + 2\pi r h$
 $= 2\pi r(r + h)$ वर्ग इकाई
(v) बेलन का आयतन = $\pi r^2 \times h = \pi r^2 h$



4. **शंकु (Cone):-**

- सूत्र- (i) शंकु के आधार का क्षेत्रफल = πr^2 वर्ग इकाई
(ii) शंकु के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = $\pi r \ell$ वर्ग इकाई
(iii) शंकु के आधार की परिधि = $2\pi r$ इकाई
(iv) शंकु के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल वक्रपृष्ठ = $\pi r \ell + \pi r^2$
 $= \pi r(\ell + r)$



- (v) शंकु का आयतन = $\frac{1}{3} \pi r^2 h$ घन इकाई

5. गोला (Sphere):- जैसे- कंचे की गोली, फुटबॉल, क्रिकेट बॉल।

सूत्र- (i) गोले के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$ वर्ग इकाई

(ii) गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$ घन इकाई

6. अर्द्धगोला (Hemisphere):- गोले के दो समान भाग में से प्रत्येक भाग अर्द्धगोला कहलाता है।



सूत्र- (i) वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$

(ii) अर्द्धगोले के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi r^2 + \pi r^2$
 $= 3\pi r^2$

(iii) अर्द्धगोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

7. लम्बवृत्तीय शंकु के छिन्नक (Frustum of a Right Circular Cone):- जैसे- बाल्टी।

सूत्र- (i) शंकु के छिन्नक या बाल्टी का आयतन

$$= \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$$

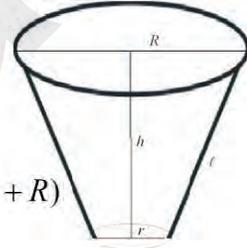
(ii) बाल्टी (छिन्नक) के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल $= \pi \ell(r + R)$

(iii) शंकु के छिन्नक के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल

$$= \pi R^2 + \pi r^2 + \pi \ell(R + r)$$

$$= \pi[R^2 + r^2 + \ell(R + r)]$$

(iv) शंकु के छिन्नक की तिरछी ऊँचाई $= \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$



उदाहरण:- (1) 45 cm उँची बाल्टी की सिरों की त्रिज्यायें 28 cm और 7 cm हैं।

बाल्टी का आयतन ज्ञात करें।

हल : प्रश्न से, $h = 45\text{cm}$, $R = 28\text{cm}$, $r = 7\text{cm}$

सूत्र से, आयतन $= \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$ घन इकाई

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 45(28^2 + 7^2 + 28 \times 7) \text{ घन सेमी}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{22 \times 15}{7} (784 + 49 + 196) \text{ घन सेमी} \\
&= \frac{22 \times 15}{7} \times 1029 \text{ घन सेमी} \\
&= 22 \times 15 \times 147 \text{ घन सेमी} \\
&= 48510 \text{ घन सेमी}
\end{aligned}$$

उदाहरण:- (2) उस गोले का पृष्ठ क्षेत्रफल निकालें जिसका व्यास 14 सेमी है।

प्रश्न से, गोले का व्यास = 14 cm

$$\text{त्रिज्या} = \frac{\text{व्यास}}{2} = \frac{14}{2} = 7 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned}
\text{सूत्र से, गोले का पृष्ठ क्षेत्रफल} &= 4\pi r^2 \\
&= 4 \times \frac{22}{7} (7)^2 \text{ cm}^2 \\
&= 88 \times 7 \text{ cm}^2 \\
&= 616 \text{ cm}^2
\end{aligned}$$

उदाहरण:- (3) 8 cm त्रिज्या वाले एक गोले से 1 cm त्रिज्या वाली कितनी ठोस गोलियाँ बनाई जा सकती हैं?

$$\text{उत्तर- बड़ी गोली का आयतन} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 8^3 \text{ cm}^3$$

$$\text{छोटी गोली का आयतन} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 1^3 \text{ cm}^3$$

$$\begin{aligned}
\therefore \text{अभीष्ट गोलियों की संख्या} &= \frac{\frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 8^3}{\frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 1^3} = 8^3 = 512
\end{aligned}$$

उदाहरण:- (4) 12 cm व्यास का एक वृत्तीय बेलन जल से अंशतः भरा हुआ है। यदि

उसमें 6cm व्यास का एक गोल पूर्णतः डुबा दिया जाता है, तो बेलन में जल की सतह कितनी ऊँचाई उठ जाएगी?

उत्तर:- प्रश्न से, गोल का व्यास $= 6\text{cm}$

\therefore गोल की त्रिज्या $= 3\text{cm}$

$$\begin{aligned}\text{गोल का आयतन} &= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times 3^3 \text{ घन सेमी} \\ &= 36\pi \text{ घन सेमी}\end{aligned}$$

फिर, माना कि जल सतह h सेमी से उपर उठ जाती है।

$$\text{तो उठे हुए जल का आयतन} = \pi \left(\frac{12}{2}\right)^2 \times h \text{ घन सेमी}$$

प्रश्न से, उठे हुए जल का आयतन = गोल का आयतन

$$\text{या, } \pi 36h = 36\pi$$

$$\therefore h = 1$$

अतः जल स्तर 1cm से उठ जाती है।

