अध्याय–3

दो चर वाले रैखिक समीकरण

- व्यापक रूप
- समीकरण युग्म का ग्राफीय विधि से हल
- समीकरणों के गुणांकों के आधार पर निष्कर्ष
  - एक तल में प्रतिबंधो पर आधारित रेखाओं का आलेख
  - समीकरण युग्म का बीजगणितीय विधि से हल(तीनो विधि)
- अनुप्रयोग

दो चर वाले रैखिक समीकरणयुग्म

वह समीकरण जिसको $ax+by+c=0$ के रूप में रखा जा सकता है जहाँ a,b और c वास्तविक संख्याएँ हैं और a और b दोनों शून्य नहीं हैं, दो चरों x और y में एक रैखिक समीकरण कहलाता है।

दो चरों वाले रैखिक समीकरण $ax+by+c=0$ का प्रत्येक हल (x,y) इस समीकरण को निरूपित करने वाली रेखा के एक बिन्दु के संगत होता है।

दो चरो x और y में रैखिक समीकरण युग्म का व्यापक रूप–

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0$$ है।

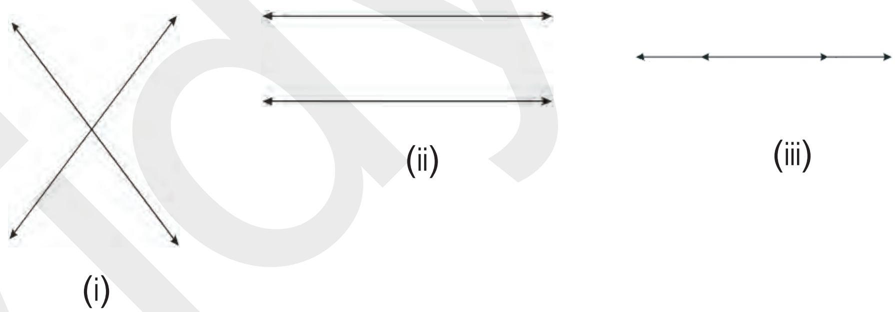
जहाँ a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 सभी वास्तविक संख्याएँ हैं।

एक तल में यदि दो रेखाएं हों, तो निम्न में से केवल एक ही संभावना हो सकती है:–

(i) दोनों रेखाएँ एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं।

(ii) दोनों रेखाएँ प्रतिच्छेद नहीं करती है अर्थात वे समान्तर हैं।

(iii) दोनों रेखाएँ संपाती हैं।



रैखिक समीकरण युग्म का ग्राफीय विधि से हल

दो चरों x और y में रैखिक समीकरण युग्म

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0$$

व्यापक रूप में दिये गये समीकरणो के गुणांक को निम्न रूप में व्यक्त करने पर प्राप्त परिणाम के आधार पर निम्न निष्कर्ष प्राप्त होता है।

शर्त	हलों की संख्या	युग्म का न
$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	एक और केवल एक हल होगा।	युग्म अविरोधी (संगत) कहलाता है।
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	अनगिनत हल होंगे	युग्म आश्रित कहलाता है।
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	कोई हल नहीं होगा	युग्म विरोधी (असंगत) कहलता है।

उदाहरण:–

क्र0सं0	रेखा युग्म	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	अनुपातों की तुलना	ग्राफीय निरूपण	बीजगणितीय निरूपण
1.	$x-2y=0$ $3x+4y-20=0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{0}{-20}$	$\frac{a_1}{a_1} \neq \frac{b_1}{b_2}$	प्रतिच्छेद करती रेखाएँ	केवल एक हल (अद्वितीय)
2.	$2x+3y-9=0$ $4x+6y-18=0$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{-9}{-18}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	संपाती रेखाएँ	अनगिनत हल
3.	$x+2y-4=0$ $2x+4y-12=0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-4}{-12}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	समान्तर रेखाएँ	कोई हल नहीं

उदाहरण:– जाँच कीजिए कि समीकरण युग्म

$x+3y=6$ ....(i)

$2x-3y=12$ ....(ii)

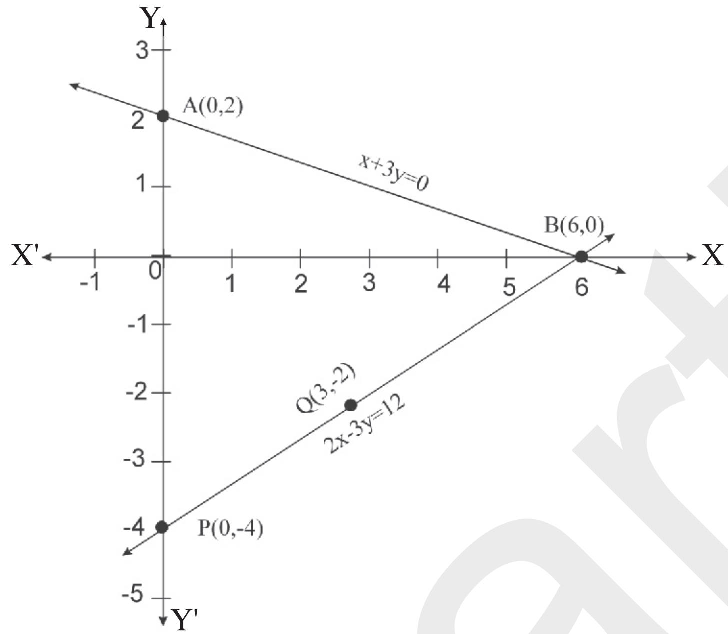
संगत है। यदि ऐसा है तो उन्हें ग्राफ द्वारा हल कीजिए।

हल:– समीकरण (i) और (ii)के ग्राफ खींचने के लिए हम प्रत्येक समीकरण के दो हल ज्ञात करते हैं, जो सारणी में दिए हैं।

x	0	6
$y=\frac{6-x}{3}$	2	0

x	0	3
$y=\frac{2x-12}{3}$	-4	-2

एक ग्राफ पेपर पर बिन्दुओं $A(0,2), B(6,0), P(0,-4)$ और $Q(3,-2)$ को आलेखित करते हैं और बिन्दुओं को मिलाकर रेखा AB और PQ आकृति बनाते हैं।



हम देखते हैं कि रेखाओं AB और PQ में एक उभयनिष्ठ बिन्दु B(6,0) है। इसलिए समीकरण युग्म का एक हल x=6, y=0 है, अर्थात समीकरण युग्म संगत है।

एक रैखिक समीकरण युग्म को हल करने की बीजगणितीय विधि

रैखिक समीकरण युग्म को हल करने की निम्न तीन विधियाँ हैं-

(i) प्रतिस्थापन विधि (Substitution Method)

(ii) लूप्तीकरण विधि (Elimination Method) क

(iii) बज्र-गुणन विधि (Cross-Multiplication Method)

उदाहरण : निम्न रैखिक समीकरण युग्म को तीनों विधियों (प्रतिस्थापन, लुप्तीकरण, बज्र-गुणन) से हल करें-

$7x-15y=2$ ....(i)

$x+2y=3$ ....(ii)

हल : प्रतिस्थापन विधि से,

समीकरण (ii) से

$x+2y=3$

$\Rightarrow \quad x=3-2y$ ....(iii)

x का यह मान समीकरण (i) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं-

$$7(3-2y)-15y=2$$
$$\Rightarrow 21-14y-15y=2$$
$$-29y=-19$$
$$\therefore y=\frac{19}{29}$$

y का मान (iii) में रखने पर

$$x=3-2\times\frac{19}{29}=3-\frac{38}{29}=\frac{49}{29}$$

अतः $x=\frac{49}{29}, y=\frac{19}{29}$

(ii) लुप्तीकरण विधि से-

$7x-15y=2$ ....(i)

$x+2y=3$ ....(ii)

समीकरण (ii) को 7 से गुणा कर हम निम्न समीकरण प्राप्त करते हैं-

$7x+14y=21$ ....(iii)

x को विलुप्त करने के लिए समीकरण (i) में से (iii) घटाते हैं।

$$\begin{array}{r} 7x-15y=2 \\ \underline{-\;\; 7x\underset{-}{+}14y\underset{-}{=}21} \\ -29y=-19 \end{array}$$

$$\therefore y=\frac{19}{29}$$

y का मान (i) में रखने पर हम पाते हैं-

$$7x-15\times\frac{19}{29}=2$$
$$\Rightarrow 7x=2+\frac{285}{29}=\frac{58+285}{29}=\frac{243}{29}$$
$$\Rightarrow x=\frac{\cancel{343}^{49}}{29\times\cancel{7}}=\frac{49}{29}$$
$$\therefore x=\frac{49}{29}, y=\frac{19}{29}$$

(iii) बज्र-गुणन विधि से-

$$7x-15y=2 \quad ....(i)$$

$$x+2y=3 \quad ....(ii)$$

उपरोक्त समीकरण युग्म इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$$7x-15y-2=0$$

$$x+2y-3=0$$

वज्र-गुणन विधि से x एवं y का मान इस प्रकार दिया जा सकता है।

$$x=\frac{-15\times(-3)-2\times(-2)}{7\times2-1\times(-15)}=\frac{45+4}{14+15}=\frac{49}{29}$$

$$y=\frac{-2\times1-(-3)\times7}{7\times2-1\times(-15)}=\frac{-2+21}{14+15}=\frac{19}{29}$$

उदाहरणः- एक भिन्न $\frac{1}{3}$ हो जाती है जब उसके अंश से 1 घटाया जाता है और वह $\frac{1}{4}$ हो जाती है, जब हर में 8 जोड़ दिया जाता है। वह भिन्न ज्ञात कीजिए।

हल : मान लिया कि भिन्न $\frac{x}{y}$ है।

प्रश्नानुसार $\quad \frac{x-1}{y}=\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow 3x-3=y$$

$$\therefore 3x-y=3 \quad ....(i)$$

पुनः $\quad \frac{x}{y+8}=\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow 4x=y+8$$

$$4x-y=8 \quad ....(ii)$$

$$\begin{array}{l} 3x-\cancel{y}=3 \\ 4x-\cancel{y}=8 \\ \underline{-\quad+\quad-} \\ -x \quad =-5 \\ x=5 \end{array}$$

घटाने पर

x का मान (i) में रखने पर

$$3x - y = 3$$

$$\Rightarrow 3 \times 5 - y = 3$$

$$\Rightarrow 15 - y = 3$$

$$\Rightarrow -y = 3 - 15 = -12$$

$$\Rightarrow -y = -12$$

$$\therefore y = 12$$

$$\therefore \text{भिन्न } \frac{x}{y} = \frac{5}{12}$$

☆☆☆