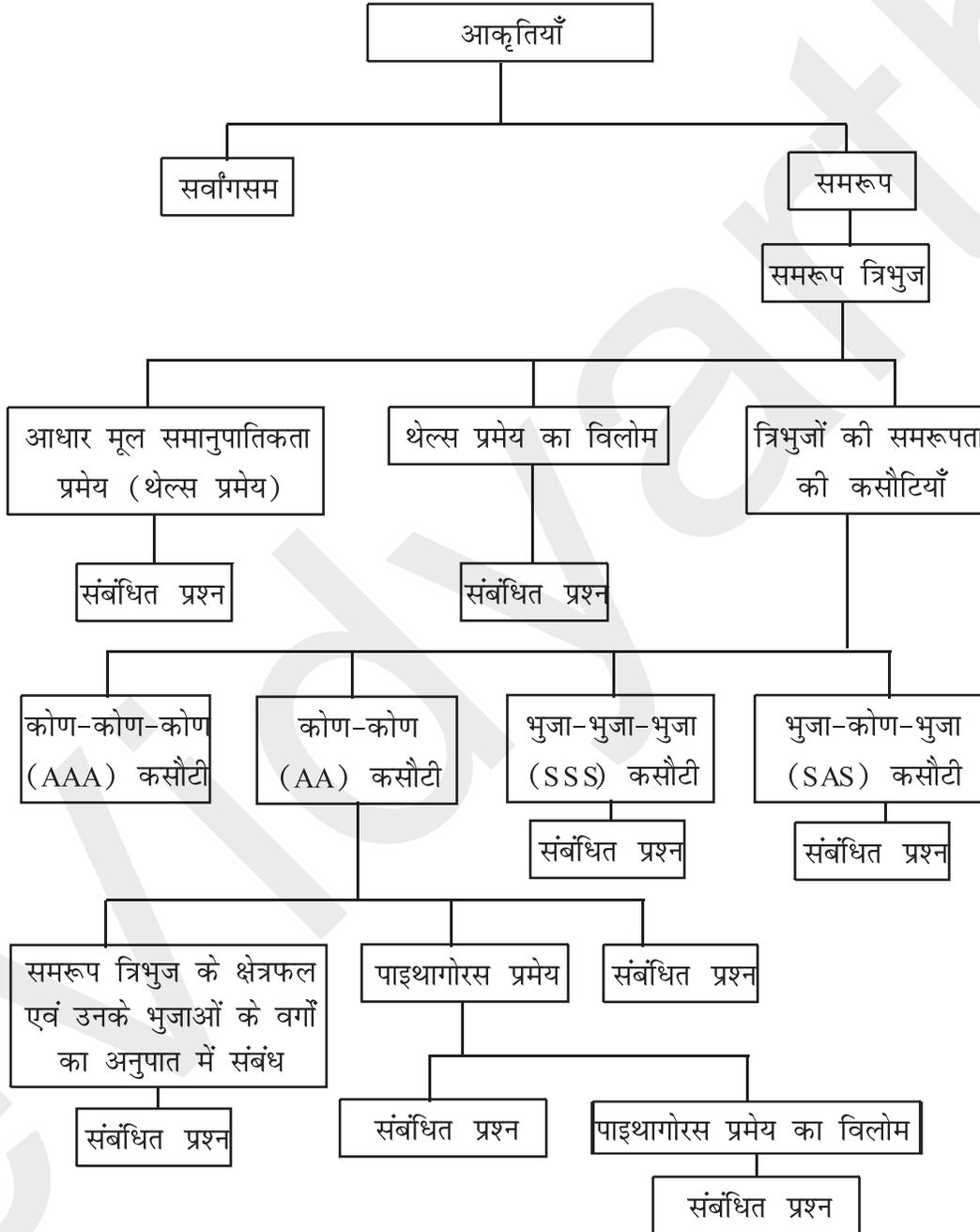


## अध्याय-6

### समरूप त्रिभुज ( Similar Triangles )



## समरूप त्रिभुज ( Similar Triangles )

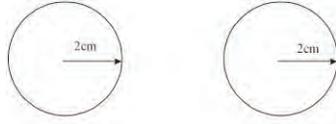
### आकृतियाँ ( Figures )

#### सर्वांगसम ( Congruent )

(1) वैसी आकृतियाँ जो समान आकार (Shape) तथा समान आमाप (Size) की हों।

जैसे:-

वृत्त



वर्ग

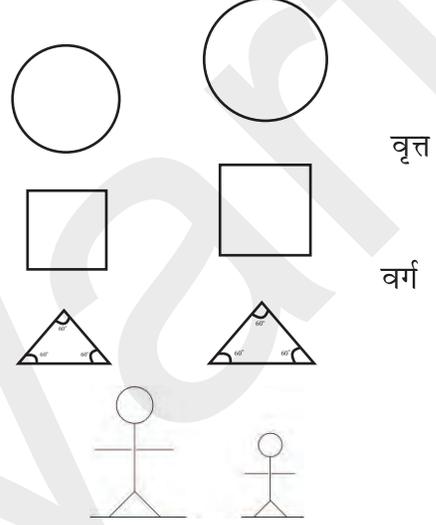


त्रिभुज



#### समरूप ( Similar )

(1) वैसी आकृतियाँ जो समान आकार (Shape) की तो हों परन्तु समान आमाप होना आवश्यक न हों।



वृत्त

वर्ग

☆ सभी सर्वांगसम आकृतियाँ समरूप होती हैं, परन्तु सभी समरूप आकृतियों का सर्वांगसम होना आवश्यक नहीं है।

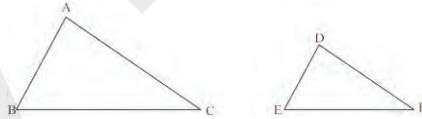
#### त्रिभुजों की समरूपता

☆ दो त्रिभुज समरूप होते हैं यदि

(i) उनके संगत कोण बराबर हों।

(ii) उनकी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में (अर्थात् समानुपाती) हों।

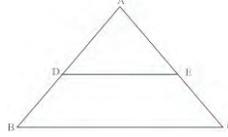
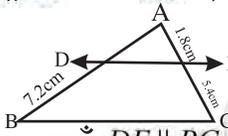
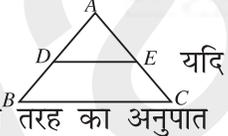
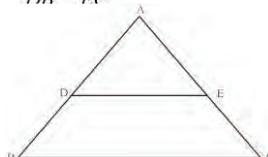
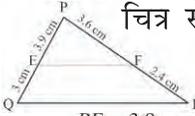
जैसे:-



यदि  $\angle A = \angle D$ ;  $\angle B = \angle E$ ;  $\angle C = \angle F$

और  $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

तो हम कह सकते हैं कि  $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

प्रमेय	चित्र द्वारा समझकर प्रश्न हल करना
<p>(1) आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय (थेल्स प्रमेय)</p> <p>→ यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर अन्य दो भुजाओं को भिन्न-भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने के लिए एक रेखा खींची जाए, तो ये अन्य दो भुजाएँ एक ही अनुपात में विभाजित हो जाती हैं।</p>	<p>(1) यदि <math>DE \parallel BC</math></p>  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ <p>☆ प्रश्न:- निम्नलिखित आकृति में यदि <math>DE \parallel BC</math> तो <math>AD</math> ज्ञात करें।</p>  <p>उत्तर:- यहाँ <math>DE \parallel BC</math> तो</p> <p>थेल्स प्रमेय से <math>\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{AD}{7.2} = \frac{1.8}{5.4}</math></p> $\Rightarrow AD = \frac{1}{3} \times 7.2 = 2.4 \text{ cm}$
<p>(2) थेल्स प्रमेय के Corollaries</p>	<p>(2) यदि <math>DE \parallel BC</math></p>  <p>जिस तरह का अनुपात बायीं ओर से लेते हैं उसी प्रकार का अनुपात दायीं ओर से लेना चाहिए।</p> <p>(a) <math>\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}</math>  (b) <math>\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}</math>  (c) <math>\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}</math>  (d) <math>\frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}</math>  (e) <math>\frac{BD}{AD} = \frac{EC}{AE}</math></p>
<p>(3) थेल्स प्रमेय का विलोम</p> <p>→ यदि एक रेखा किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को एक ही अनुपात में विभाजित करे तो वह तीसरी भुजा के समान्तर है।</p>	<p>(3) यदि <math>\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC</math></p>  <p>प्रश्न:- चित्र से बताएँ क्या <math>EF \parallel QR</math>।</p>  <p>उत्तर:- यहाँ <math>\frac{PE}{EQ} = \frac{3.9}{3.1} = 1.3</math></p> <p>और <math>\frac{PF}{FR} = \frac{3.6}{2.4} = 1.5</math> यह <math>\frac{PE}{EQ} \neq \frac{PF}{FR}</math></p> <p>यहाँ <math>EF \parallel QR</math> नहीं है।</p>

(4) त्रिभुज की समरूपता के लिए कसौटियाँ-

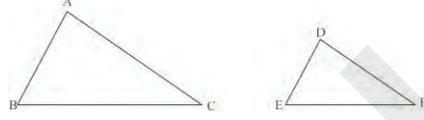
(क) यदि दो त्रिभुजों में संगत कोण बराबर हों, तो उनकी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में होती हैं और इसलिए ये त्रिभुज समरूप होते हैं। (AAA) कसौटी।

(ख) → यदि एक त्रिभुज के दो कोण एक अन्य त्रिभुज के कमशः दो कोणों के बराबर हों तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं। (AA) कसौटी।

(ग) → यदि दो त्रिभुजों में एक त्रिभुज की भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की भुजाओं के समानुपाती हों तो उनमें संगत कोण बराबर होते हैं और इसलिए दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं। (SSS) कसौटी।

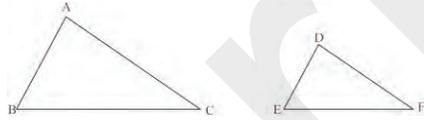
(घ) → यदि एक त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के एक कोण के बराबर हो तथा इन कोणों के अंतर्गत करने वाली भुजाएँ समानुपाती हों, तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं। (SAS) कसौटी।

(क) कोण-कोण-कोण (AAA) कसौटी-



यदि  $\angle A = \angle D$ ;  $\angle B = \angle E$ ;  $\angle C = \angle F$   
 $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$

(ख) कोण-कोण (AA) कसौटी-



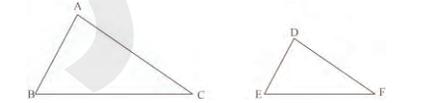
यदि  $\angle A = \angle D$ ;  $\angle B = \angle E$   
 $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$

(ग) भुजा-भुजा-भुजा (SSS) कसौटी-



यदि  $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$   
 $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$

(घ) भुजा-कोण-भुजा (SAS) कसौटी-



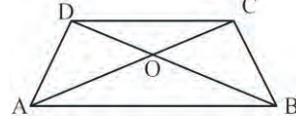
यदि  $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$  और  $\angle A = \angle D$   
 $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$

☆ प्रश्न:- समलंब ABCD, जिसमें  $AB \parallel DC$

है, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दो त्रिभुजों की समरूपता कसौटी का प्रयोग करते हुए सिद्ध करें कि

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$$

हल-



$\triangle DOC$  और  $\triangle BOA$  में

$$\Rightarrow \angle DOC = \angle BOA \text{ (शीर्षाभिमुख कोण)..(i)}$$

और  $AB \parallel CD$

$$\Rightarrow \angle OCD = \angle OAB \text{ (एकान्तर कोण)...(ii)}$$

अतः (i) और (ii) से

$\triangle DOC \sim \triangle BOA$  (AA समरूपता कसौटी)

$$\text{अतः } \frac{OD}{OB} = \frac{OC}{OA}$$

$$\frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC}$$

(5) समरूप त्रिभुजों का क्षेत्रफल—

→ दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलो का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के अनुपात के वर्ग के बराबर होता है।



यदि  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

$$\Rightarrow \frac{\text{ar}(\triangle ABC)}{\text{ar}(\triangle DEF)} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{AC^2}{DF^2}$$

प्रश्न:- दो समरूप त्रिभुजों की भुजाएँ 4:9 के अनुपात में है। इन त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का क्या अनुपात होगा।

$$\text{हल:-} \rightarrow \frac{\text{ar}(\text{पहला } \Delta)}{\text{ar}(\text{दूसरा } \Delta)} = \frac{4^2}{9^2} = \frac{16}{81}$$
$$= 16:81$$

प्रश्न:- यदि  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$  और उनके क्षेत्रफल क्रमशः  $64\text{cm}^2$ ,  $121\text{cm}^2$  है। यदि  $EF = 15.4\text{cm}$  हो तो  $BC$  ज्ञात करें।

$$\text{हल } \rightarrow \frac{\text{ar}(\triangle ABC)}{\text{ar}(\triangle DEF)} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

$$\Rightarrow \frac{64}{121} = \frac{BC^2}{EF^2} \Rightarrow \frac{BC}{EF} = \sqrt{\frac{64}{121}} = \frac{8}{11}$$

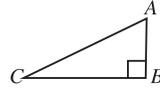
$$\Rightarrow BC = \frac{8}{11} \times EF$$

$$\Rightarrow BC = \frac{8}{11} \times 15.4 = 8 \times 1.4$$

$$\Rightarrow BC = 11.2 \text{ cm}$$

(6) पाइथागोरस प्रमेय

→ एक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।



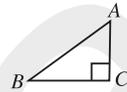
यदि  $\angle B = 90^\circ$

$$\Rightarrow AB^2 + BC^2 = AC^2$$

प्रश्न:- एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें  $\angle C = 90^\circ$  है। सिद्ध करें कि

$$AB^2 = 2AC^2$$

हल:-



$\angle C = 90^\circ$

$$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2 \text{ (पाइथागोरस प्रमेय)}$$

$$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + AC^2 \text{ [}\because AC = BC\text{]}$$

$$\Rightarrow AB^2 = 2AC^2$$

(7) पाइथागोरस प्रमेय का विलोम

→ यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर हो तो पहली भुजा के सम्मुख कोण समकोण होता है।



यदि  $AB^2 + BC^2 = AC^2$

$$\Rightarrow \angle B = 90^\circ$$

प्रश्न  $ABC$  एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें  $AC = BC$  है। यदि  $AB^2 = 2AC^2$  है तो सिद्ध करें कि  $\triangle ABC$  एक समकोण त्रिभुज है।

हल:-

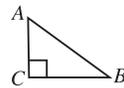
$$AC = BC \text{ (दिया है)}$$

$$AB^2 = 2AC^2 \text{ (दिया है)}$$

$$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$[AC = BC]$$



अतः पाइथागोरस प्रमेय के विलोम से

$$\angle C = 90^\circ$$

अतः  $ABC$  एक समकोण त्रिभुज है।