अध्याय-2 पूर्ण संख्याएँ

भूमिका

जब हम गिनती करते हैं तो हमारे सम्मुख संख्याएं 1, 2, 3, 4, 5, 6,...... एक निश्चित क्रम में प्राकृतिक रूप से आती हैं। हम गिनती की संख्याओं को **प्राकृत संख्याएँ (Natural Number)** कहते हैं, अर्थात् 1, 2, 3, 4, 5, 6 .... प्राकृत संख्याएँ हैं।

अगर आपको 20 से घटते क्रम में संख्या बोलने को कहा जाये तो आप बोलेंगे 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 । अगर यह पूछें कि क्या 1 से पहले भी कुछ हो सकता है? प्राकृत संख्याओं में 1 से पहले कोई संख्या नहीं है।

2.1 परवर्ती और पूर्ववर्ती संख्या

आइए एक और बात पर विचार करें। हम प्राकृत संख्या 5 लेते हैं, इसमें 1 जोड़ दें तो हम संख्या 6 पाते हैं। संख्या 6, संख्या 5 के ठीक बाद वाली संख्या है जिसे **परवर्ती या उत्तरवर्ती** (Successor) कहते हैं। इसी प्रकार संख्या 6 के ठीक बाद वाली संख्या 6 + 1 = 7 हुई, 7 की परवर्ती ठीक बाद वाली संख्या 7 + 1 = 8 हुई, अर्थात् किसी संख्या की परवर्ती संख्या उस संख्या में 1 जोड़कर प्राप्त कर लेते हैं।

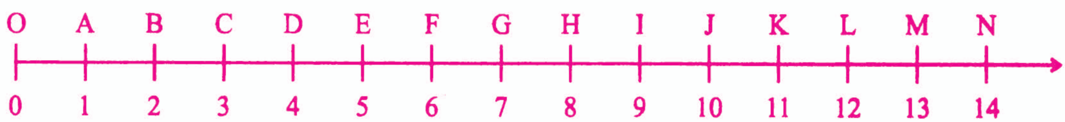
संख्या 5, संख्या 6 से ठीक पहले आती है। हम कहते हैं कि 6 का **पूर्ववर्ती या अनुवर्ती** (Predecessor) 6-1 = 5 है, संख्या 5 की पूर्ववर्ती संख्या 5-1 = 4 है, इसी प्रकार 4 की पूर्ववर्ती संख्या 3, 3 की पूर्ववर्ती संख्या 2 और 2 की पूर्ववर्ती संख्या 1 है। 1 की पूर्ववर्ती संख्या क्या होगी? संभवतः जवाब होगा कुछ नहीं, अर्थात् शून्य (0) यानी 1 की पूर्ववर्ती संख्या 1-1 = 0 होगी। "0" शून्य को जब हम प्राकृत संख्या में शामिल कर लेते हैं, तो इस प्रकार प्राप्त संख्याओं के समूह को पूर्ण संख्याओं का समूह कहते हैं। अर्थात् 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 .. .. को **पूर्ण संख्या** कहते हैं।

स्वयं करके देखिए

1. क्या सभी प्राकृतिक संख्याएँ पूर्ण संख्याएँ हैं?
2. क्या सभी पूर्ण संख्याएँ प्राकृत संख्याएँ भी हैं?
3. सबसे छोटी पूर्ण संख्या कौन-सी हैं?
4. 12 की परवर्ती संख्या बताएँ।
5. 990 की परवर्ती संख्या बताएँ।
6. 999 की अनुवर्ती या पूर्ववर्ती संख्या बताएँ।
7. 20 की अनुवर्ती या पूर्ववर्ती संख्या बताएँ।

2.2 संख्या रेखा

पूर्ण संख्याओं के कुछ गुणों की खोज करने के लिए उन्हें एक रेखा जिसे संख्या रेखा कहते हैं पर निरूपित करने की आवश्यकता पड़ती है। हम एक सरल रेखा खींचते हैं और संख्या शून्य (0) के लिए उस पर एक बिन्दु "O" अंकित कर लेते हैं। "O" से आरम्भ करके उसके दाईं ओर बराबर दूरियों पर बिन्दु A, B, C, D....... आदि क्रम से अंकित करते हैं–



इसे **पूर्ण संख्याओं की संख्या रेखा** कहते हैं।

इस प्रकार,

OA = 1 इकाई तो

OA = AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HI = IJ = JK = KL = LM = MN = 1 इकाई

OB = OA + AB = 1 + 1 = 2 अर्थात् 2 इकाई। इसी प्रकार OC = 3 इकाई, OD = 4 इकाई।

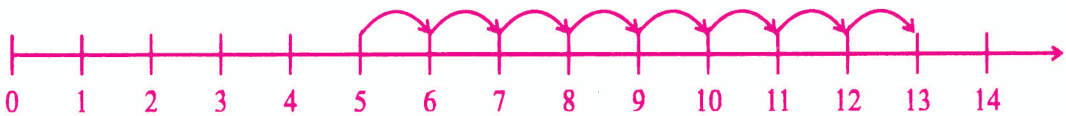
क्योंकि O पूर्ण संख्या शून्य "0" को निरूपित करता है, इसी प्रकार A, B, C, D..... इत्यादि क्रमशः पूर्ण संख्याओं 1, 2, 3, 4, 5 .... इत्यादि को निरूपित करते हैं। उपर्युक्त संख्या रेखा पर हम देखते हैं कि N (14) संख्या रेखा का सीमा बिन्दु नहीं है। संख्या रेखा के अनुदिश दाईं ओर चलते हुए हम आवश्यकतानुसार किसी भी पूर्ण संख्या तक जा सकते हैं। इस प्रकार

हमने पूर्ण संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित किया है।

- संख्या रेखा को देखने से पता चलता है कि बाईं से दाईं ओर संख्याएँ बढ़ती जाती हैं। जैसे– संख्या 8 संख्या 5 से बड़ी है।
- संख्या रेखा से यह भी स्पष्ट है कि दाईं तरफ से बाईं की ओर की संख्याएँ घटती जाती हैं, अर्थात् बाईं तरफ की संख्या दाईं तरफ की संख्या से छोटी है। जैसे– संख्या 3 संख्या 5 से छोटी है।

2.3 संख्या रेखा पर योग (जोड़ना)

संख्या रेखा पर दो संख्याओं का योग दिखाया जा सकता है, जैसे 5 और 8 का योग है–



चूँकि 5 में 8 जोड़ना है इसलिए संख्या रेखा पर संख्या 5 से 8 कदम दाईं ओर बढ़ना है। यानी 5 से एक कदम दाईं ओर 8 बार यानी 13 तक चलते हैं जैसा कि ऊपर दिखाया गया है। आठवें कदम पर संख्या 13 है। इस प्रकार 5 और 8 का योगफल 13 है, अर्थात् $5 + 8 = 13$.

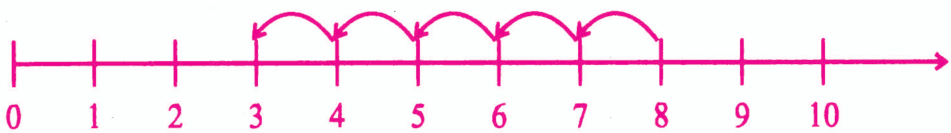
स्वयं करके देखिए

इसी प्रकार संख्या रेखा पर निम्न संख्याओं को दिखाएँ–

5+4, 9+6, 3+5, 2+8, 7+5 और 9+3

2.4 संख्या रेखा पर व्यवकलन (घटाना)

आइए $8 - 5$ को संख्या रेखा पर दिखाएँ।



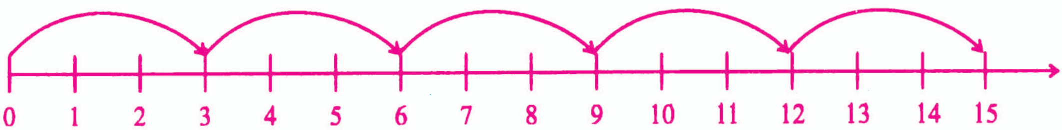
संख्या रेखा के संख्या 8 से 5 कदम बायीं ओर चलने पर संख्या 3 पर पहुँचते हैं, इसलिए 8 और 5 का घटावफल 3 हुआ, अर्थात् $8 - 5 = 3$.

स्वयं करके देखिए

संख्या रेखा का प्रयोग करके 4–3, 9–5, 8–6 और 12–5 का मान ज्ञात करें।

2.5 संख्या रेखा पर गुणन (गुणा)

आइए 3 x 5 ज्ञात करें।



0 से प्रारंभ कीजिए और दाईं ओर एक बार में 3 मात्रकों के बराबर कदम चलिए। ऐसे पाँच कदम चलिए। इस प्रकार चलते हुए हम संख्या 15 पर पहुँचते हैं। अतः 3 और 5 का गुणनफल 15 हुआ अर्थात् 3 x 5 = 15.

प्रश्नावली – 2.1

1. निम्नलिखित के ठीक बाद वाली संख्या बताइए–

(i) 99999 (ii) 800 (iii) 979 (iv) 1000

2. निम्नलिखित के ठीक पहले वाली संख्या बताइए–

(i) 100000 (ii) 100 (iii) 8757 (iv) 99

3. सबसे छोटी पूर्ण संख्या कौन-सी है?

4. निम्नलिखित की परवर्ती संख्या (उत्तरवर्ती संख्या) बताइए–

(i) 54896 (ii) 8765 (iii) 543 (iv) 28 (v) 9999

5. निम्नलिखित की पूर्ववर्ती संख्या (अनुवर्ती संख्या) बताइए–

(i) 876542 (ii) 99 (iii) 101 (iv) 4567 (v) 100000

6. 50 से 80 के बीच कितनी पूर्ण संख्याएँ हैं, लिखिए।

7. संख्या रेखा के आधार पर बताइए कि निम्नलिखित युग्म संख्या में कौन-सी संख्या बड़ी है?

(a) 503, 530 (b) 1023, 1020 (c) 4384, 5987 (d) 70, 40

2.6 पूर्ण संख्याओं के गुण

निम्न पर विचार करें

8 + 2 = 10, एक पूर्ण संख्या, 6 + 5 = 11, एक पूर्ण संख्या,

0 + 12 = 12, एक पूर्ण संख्या, ... +...................... = ...

अतः दो पूर्ण संख्याओं का योगफल सदैव एक पूर्ण संख्या होती है। इसलिए पूर्ण संख्याओं का संग्रह योग के अंतर्गत संवृत (closed) है। यह पूर्ण संख्याओं के योग का संवृत गुण (closed property) कहलाता है।

निम्न पर विचार करें–

5 x 8 = 40, एक पूर्ण संख्या, 4 x 5 = 20, एक पूर्ण संख्या

3 x 2 = 6, एक पूर्ण संख्या, ... x .... = ...

आप अपने से भी कुछ पूर्ण संख्याओं को लेकर गुणा कर जाँचिए।

अर्थात् दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल सदैव एक पूर्ण संख्या होती है।

क्या पूर्ण संख्याएँ गुणन (गुणा) के अंतर्गत भी संवृत है? आपकी जांच क्या बताती है?

निम्न पर विचार करें–

6 − 3 = 3, एक पूर्ण संख्या, 8 − 9 = ...? एक पूर्ण संख्या नहीं है।

अर्थात् दो पूर्ण संख्याओं का व्यवकलन (घटावफल) एक पूर्ण संख्या हो भी सकती है, और नहीं भी। अतः पूर्ण संख्याएँ व्यवकलन (घटाने) के अंतर्गत संवृत नहीं होती।

इसी प्रकार 12 ÷ 4 = 3, एक पूर्ण संख्या, 7 ÷ 8 = एक पूर्ण संख्या नहीं है।

.... ÷ .... = ...

अर्थात् दो पूर्ण संख्याओं का भागफल एक पूर्ण संख्या हो सकता है, नहीं भी। क्या पूर्ण संख्याएँ विभाजन (भाग) के अंतर्गत संवृत हैं?

संवृत गुण : पूर्ण संख्याओं का संग्रह (निकाय) योग और गुणन के अंतर्गत संवृत होता है पर व्यवकलन और विभाजन के अंतर्गत संवृत नहीं होता।

2.7 शून्य द्वारा विभाजन

एक संख्या से विभाजन (भाग देने) का अर्थ है कि उस संख्या को बार-बार घटाना।

$12 \div 4$ ज्ञात करें।

12 में से 4 को कितनी बार घटाने पर हमें 0 मिलेगा? आइए पता करें।

12	
−4	 I
8	
−4	 II
4	
−4	 III
0	

अतः $12 \div 4 = 3$

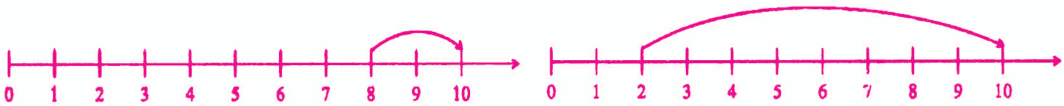
आइए $4 \div 0$ का हल ज्ञात करने का प्रयत्न करते हैं–

4		
−0	 I	प्रत्येक बार घटाने पर हमें 4 पुनः प्राप्त होता है।
4		
−0	 II	क्या यह प्रक्रिया कभी समाप्त होगी? नहीं।
4		
−0	 III	अतः $4 \div 0$ अपरिभाषित है। इसी प्रकार अन्य संख्याओं के साथ भी यह सत्य है।
4		

अतः पूर्ण संख्याओं का शून्य से विभाजन परिभाषित नहीं है।

2.8.1 योग और गुणन की क्रमविनिमेयता (commutative)

(क) 8 + 2 और 2 + 8 पर विचार करें



दोनों से एक ही उत्तर 10 प्राप्त होता है।

इसी प्रकार अन्य संख्या 5 + 2 और 2 + 5 पर विचार करें तो पाएँगे कि दोनों का उत्तर बराबर है।

अतः स्पष्ट है कि

8 + 2 = 2 + 8

और 5 + 2 = 2 + 5

इसी प्रकार का योगफल अन्य संख्याओं के साथ सत्य है।

अतः दो पूर्ण संख्याओं को किसी भी क्रम में जोड़ सकते हैं ।

यह जोड़ का क्रमविनिमेय नियम है।

(ख) 3 X 5 और 5 X 3 पर विचार करें।

3 X 5 = 15 5 X 3 = 15

3 X 5 = 5 X 3

दोनों संख्याओं का गुणनफल बराबर है, इसी प्रकार अन्य संख्याओं के साथ भी सत्य है।

अतः दो पूर्ण संख्याओं का गुणा किसी भी क्रम में कर सकते हैं।

यह गुणा का क्रमविनिमेय नियम है।

पूर्ण संख्याओं के लिए योग और गुणन दोनों ही क्रमविनिमेय है।

स्वयं करें

घटाव और भाग के लिए क्रम विनिमेयता नियम सत्य है या नहीं? कुछ पूर्णांकों के साथ परीक्षण कर पता लगायें।

2.8.2 योग और गुणन की सहचारिता (Associative property)

$(5+2)+4=7+4=11$ और $5+(2+4)=5+6=11$

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट होता है कि

$(5+2)+4=5+(2+4)$, अतः तीन पूर्णांकों के योग में उन्हें किसी भी क्रम में **बारी-बारी से** जोड़ा जा सकता है।

इसे योग का साहचर्य या सहचारिता नियम कहते हैं।

पुनः एक अन्य उदाहरण देखें–

$(5 \times 2) \times 4 = 10 \times 4 = 40$ और $5 \times (2 \times 4) = 5 \times 8 = 40$

उपर्युक्त उदाहरण से स्पष्ट होता है कि –

$(5 \times 2) \times 4 = 5 \times (2 \times 4)$, अतः गुणा में पहली दो संख्याओं को गुणा कर तीसरी संख्या से **गुणा** करें या पहली को शेष दो के गुणनफल से गुणा करें तो कोई अन्तर नहीं आता है। **यह गुणा का साहचर्य नियम है।**

उदाहरण -1 : संख्या 845, 475 और 125 को जोड़िए।

हल : $845 + 475 + 125 = 845 + (475 + 125)$

$= 845 + 600$

$= 1445$

उदाहरण 2 : 12 + 18 + 25 को दो विधियों से ज्ञात कीजिए।

हल : $12 + 18 + 25 = (12 + 18) + 25 = 30 + 25 = 55$

$12 + 18 + 25 = 12 + (18 + 25) = 12 + 43 = 55$

स्वयं करके देखिए

इसे दोनों विधियों (क्रम विनिमेयता और साहचर्य) से जोड़िए–

(a) 12 + 38 + 16 (c) 58 + 28 + 42

(b) 46 + 12 + 4 (d) 25 + 33 + 22

उदाहरण 3 : 14 x 35 को ज्ञात कीजिए।

हल : $14 \times 35 = (7 \times 2) \times 35 = 7 \times (2 \times 35)$

$= 7 \times 70 = 490$

इस उदाहरण में, हमने साहचर्य गुण का उपयोग कर सहजता से उत्तर प्राप्त कर लिया।

उदाहरण 4 : 4 x 185 x 25 को ज्ञात कीजिए।

हल : $4 \times 25 \times 185 = (4 \times 25) \times 185$

$= 100 \times 185 = 18500$

स्वयं करके देखिए

(i) कौन-सा गुणन सरल है और क्यों?

(a) $(6 \times 8) \times 5$ या $6 \times (8 \times 5)$

(b) $(9 \times 5) \times 20$ या $9 \times (5 \times 20)$

(ii) $8 \times 9879 \times 25$

(iii) $4 \times 856 \times 125$

(iv) क्या $(24 \div 6) \div 2 = 24 \div (6 \div 2)$ है?

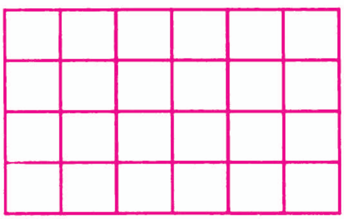
क्या विभाजन के लिए साहचर्य गुण लागू होता है?

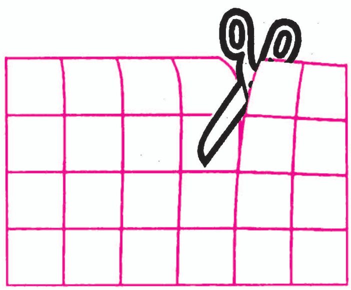
2.8.3 योग पर गुणन का वितरण

4 से.मी. x 6 से.मी. मापों का एक ग्राफ पेपर लें जिसमें 1 से.मी. x 1 से.मी. मापों वाले वर्ग बने हों।

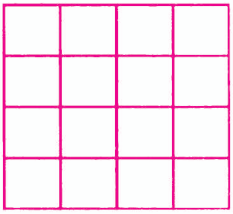
आपके पास कुल कितने वर्ग हैं?

क्या यह संख्या 4 x 6 है?

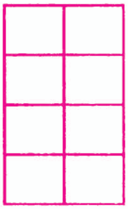




अब इस कागज को 4 सेमी x 4 सेमी और 4 सेमी x 2 सेमी मापों वाले दो भागों में काट लीजिए, जैसा कि आकृति में दिखाया गया है।



वर्गों की सं. = 4 x 4



वर्गों की सं. = 4 x 2

दोनों भागों में कुल मिलाकर कितने वर्ग हैं?

क्या यह $(4 \times 4) + (4 \times 2)$ है? इसका अर्थ है कि

$4 \times 6 = (4 \times 4) + (4 \times 2)$ लेकिन $4 \times 6 = 4 \times (4 + 2)$

क्या यह दर्शाता है कि $4 \times (4 + 2) = 4 \times 4 + 4 \times 2$

इसी प्रकार, आप पाएँगे कि

$8 \times (3 + 9) = 8 \times 3 + 8 \times 9$ है।

इसे योग पर गुणन का वितरण (या बंटन) गुण (distributive property) कहते हैं।

स्वयं करके देखिए

इसी प्रकार आप 9×32, 7×13 में वितरण नियम का उपयोग कर मान ज्ञात कीजिए–

5×15 को यदि $5 \times (10+5)$ में बदलकर गुणा किया जाए तो यह सरलता से हल किया जा सकता है।

2.8.4 तत्समक अवयव (योग और गुणन के लिए)

निम्नलिखित सारणी पर विचार करें–

8	+	0	=	8
4	+	0	=	4
0	+	5	=	5
0	+	24	=	24
0	+	.....	=	....

उपर्युक्त सारणी से यह स्पष्ट है कि जब हम किसी संख्या में शून्य (0) जोड़ते हैं तो स्वयं वही पूर्ण संख्या प्राप्त होती है। इसी कारण **शून्य को पूर्ण संख्याओं के योग के लिए तत्समक अवयव (identity element) या तत्समक कहते हैं। शून्य को पूर्ण संख्याओं के लिए योज्य तत्समक (additive identity) भी कहते हैं।**

निम्नलिखित सारणी पर विचार करें–

7	x	1	=	7
8	x	1	=	8
15	x	1	=	15
18	x	1	=	18
---	x	1	=	------

उपर्युक्त सारणी से यह स्पष्ट है कि जब हम किसी संख्या में 1 से गुणा करते हैं तो स्वयं वही पूर्ण संख्या प्राप्त होती है। इसी कारण 1 को पूर्ण संख्याओं के गुणा के लिए तत्समक अवयव या तत्समक कहते हैं। 1 (एक) को पूर्ण संख्याओं के लिए गुणात्मक तत्समक (multiplicative identity) कहते हैं।

प्रश्नावली – 2.2

1. **उपयुक्त क्रम में लगाकर योग ज्ञात कीजिए–**

(a) 585 + 956 + 15 (b) 1675 + 946 + 325

(c) 65 + 75 + 35

2. **उपयुक्त क्रम (नियम) लगाकर गुणनफल ज्ञात करें–**

(a) 4 x 1225 x 25 (b) 4 x 158 x 125

(c) 4 x 85 x 25 (d) 8 x 29 x 125

3. **निम्नलिखित में प्रत्येक का मान वितरण नियम द्वारा ज्ञात करें–**

(a) 185 x 5 + 185 x 25 (b) 4 x 18 + 4 x 12

(c) 54279 x 92 + 8 x 54279 (d) 12 x 8 + 12 x 2

4 उपयुक्त गुणों का प्रयोग करके गुणनफल ज्ञात करें–

(a) 585 x 806 (b) 2008 x 185

(c) 854 x 102 (d) 258 x 1008

5. मिलान कीजिए–

	A		B
I	$2+8=8+2$	I	गुणन की क्रमविनिमेयता
II	$8 \times 90 = 90 \times 8$	II	जोड़ की क्रमविनिमेयता
III	$885 \times 145 = 885 \times (100+40+5)$	III	गुणा का साहचर्य नियम
IV	$5 \times (4 \times 28) = (5 \times 4) \times 28$	IV	योग पर गुणन का वितरण नियम

6. कोई दूध वाला एक होटल वाले को सुबह 45 लीटर दूध देता है और शाम को 55 लीटर दूध देता है। यदि दूध का मूल्य 15 रु. प्रति लीटर है, तो दूध वाले को प्रतिदिन कितनी धनराशि प्राप्त होगी?

2.9 पूर्ण संख्याओं में प्रतिरूप

हम संख्याओं को बिन्दुओं द्वारा प्रारम्भिक आकारों के रूप में व्यवस्थित कर सकते हैं। जो आकार हम लेंगे वे हैं– रेखा, त्रिभुज, आयत एवं वर्ग।

- प्रत्येक संख्या (एक को छोड़कर) एक रेखा के रूप में व्यवस्थित किया जा सकता है। जैसे– संख्या 2 को इस प्रकार दिखाया जा सकता है– • • जब इन दो बिन्दुओं को मिलाते हैं तो हमें एक रेखा मिलती है। इसी प्रकार 3, 4 ...... संख्या में बिन्दु लेकर एक रेखा में रखने पर और मिलाने पर हमें एक रेखा मिलती है। आप किसी भी संख्या में बिन्दु लेकर उन्हें व्यवस्थित रूप में रखकर एक रेखा द्वारा दर्शा सकते हैं।
- कुछ संख्याओं को आयत के रूप में भी दर्शाया जा सकता है। उदाहरणार्थ,

4 → • •
• •

6 → • • •
• • •

8 → • • • •
• • • •

- कुछ संख्याओं, जैसे–4 और 9 को वर्गों के रूप में भी दर्शाया जा सकता है। उदाहरणार्थ,

4 → • •
• •

9 → • • •
• • •
• • •

इसी क्रम में आगे किस संख्या में बिन्दु लेकर आप उन्हें वर्ग के रूप में दर्शा सकते हैं। (यहाँ यह ध्यान देने योग्य बात है कि प्रत्येक वर्ग एक विशेष प्रकार का आयत होता है।)

- कुछ संख्याओं को त्रिभुज के रूप में भी दर्शाया जा सकता है। संख्या 2 के बराबर बिन्दु लेकर किसी भी तरह से व्यवस्थित करने पर हमें त्रिभुज प्राप्त नहीं होता परन्तु यदि हम 3 और 6 बिन्दु लें और उन्हें इस प्रकार व्यवस्थित करें–

तो हमें समद्विबाहु त्रिभुज प्राप्त होगा। इसी प्रतिरूप को आगे बढ़ाकर पता लगाइए कि कितने बिन्दु होने पर हमें अगला समकोण समद्विबाहु त्रिभुज प्राप्त होगा?

अब सारणी को पूरा कीजिए

संख्या	रेखा	आयत	वर्ग	त्रिभुज
2	हाँ	नहीं	नहीं	नहीं
3	हाँ	नहीं	नहीं	हाँ
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				

स्वयं करके देखिए

1. कौन-सी संख्याएँ केवल रेखा के रूप में दर्शाई जा सकती हैं?

2. कौन-सी संख्याएँ आयतों के रूप में दर्शाई जा सकती हैं?

3. कौन-सी संख्याएँ वर्गों के रूप में दर्शाई जा सकती हैं?

4. ऐसी छः संख्याओं के नाम लिखें जिन्हें त्रिभुजों के रूप में दर्शाया जा सकता है।

5. जिन संख्याओं को एक से अधिक रूपों में दिखाया जा सकता है उन्हें लिखिए।

प्रतिरूपों को देखना

प्रतिरूपों को देखने से आपको गणना की प्रक्रियाओं के सरलीकरण के लिए कुछ मार्गदर्शन मिल सकता है।

जैसे–

(a) $225 + 9 = 225 + 10 - 1 = 235 - 1 = 234$

(b) $225 - 9 = 225 - 10 + 1 = 215 + 1 = 216$

(c) $225 + 99 = 225 + 100 - 1 = 325 - 1 = 324$

(d) $225 - 99 = 225 - 100 + 1 = 125 + 1 = 126$

क्या यह प्रतिरूप 9, 99, 999, ... प्रकार की संख्याओं के जोड़ने या घटाने में आपकी सहायता करता है?

इन्हें देखिए

(a) $95 \times 9 = 95 \times (10 - 1)$

(b) $95 \times 99 = 95 \times (100 - 1)$

(c) $95 \times 999 = 95 \times (1000 - 1)$

क्या आपको किसी संख्या को 9, 99, 999 .... के प्रकार की संख्याओं से गुणा करने की एक संक्षिप्त विधि प्राप्त होती है? ऐसी संक्षिप्त विधियाँ आपको अनेक गणनाएँ मौखिक रूप से (मनगणित से) करने में सहायता करती है।

इन्हें भी गौर से देखें और समझें :

(i) $96 \times 5 = 96 \times \frac{10}{2} = \frac{960}{2} = 480$

(ii) $96 \times 25 = 96 \times \frac{100}{4} = \frac{9600}{4} = 2400$

(iii) $96 \times 125 = 96 \times \frac{1000}{8} = \frac{96000}{8} = 12000$

यह प्रतिरूप आपको किसी संख्या को 5 या 25 या 125 से गुणा करने की एक रोचक विधि बताता है।

(आप इन संख्याओं को इसी प्रकार आगे भी बढ़ा सकते हैं।)

इन्हें भी देखें और समझें :

(i) $86 \times 5 = 86 \times \frac{10}{2} = 43 \times 10 = 430 \times 1$

(ii) $86 \times 15 = 86 \times \frac{30}{2} = 43 \times 30 = 430 \times 3$

(iii) $86 \times 25 = 86 \times \frac{50}{2} = 43 \times 50 = 430 \times 5$

(iv) $86 \times 35 = 86 \times \frac{70}{2} = 43 \times 70 = 430 \times 7$

संख्याओं के प्रतिरूप न केवल रोचक होते हैं, बल्कि मौखिक कलन में मुख्यतः उपयोगी होते हैं और संख्याओं के गुणों को भली भाँति समझने में सहायता देते हैं।

प्रश्नावली – 2.3

1. निम्नलिखित में जोड़ का क्रमविनिमेय नियम किसमें है?

(i) $5 \times 8 = 8 \times 5$ (ii) $(2 \times 3) \times 5 = 2 \times (3 \times 5)$

(iii) $(2 + 8) + 10 = (2 + 8) + 10$ (iv) $15 + 8 = 8 + 15$

2. निम्नलिखित के उपयुक्त नियम लिखें–

(i) $8+32=32+8$ (ii) $(2+12)+15=2+(12+15)$

(iii) $8\times(5+4)=8\times5+8\times4$ (iv) $5\times50=50\times5$

3. निम्नलिखित में से किसमें शून्य निरूपित नहीं होगा?

(i) $1+0$ (ii) 0×0 (iii) $\frac{0}{2}$ (iv) $\frac{10-10}{2}$

4. यदि दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल शून्य है तो क्या हम कह सकते हैं कि इनमें से एक या दोनों ही शून्य होने चाहिए? उदाहरण देकर अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

5. यदि दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल 1 है तो क्या हम कह सकते हैं कि इनमें से एक या दोनों ही 1 के बराबर होनी चाहिए? उदाहरण देकर अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

6. वितरण विधि से ज्ञात कीजिए :

(i) 638×101 (ii) 4375×1001 (iii) 734×25

(iv) 3175×125 (v) 608×35

7. निम्नलिखित प्रतिरूपों को समझें और आगे बढ़ायें।

$1\times8+1=9$

$12\times8+2=98$

$123\times8+3=987$

$1234\times8+4=9876$

– – – ×8 + – = – – – – – –

– – – ×8 + – = – – – – – –

क्या आप सोच सकते हैं कि यह प्रतिरूप किस आधार पर काम करता है?

(संकेत: 12345 = 11111 + 1111 + 111 + 11 + 1)

पूर्ण संख्याओं की गणना के कुछ शॉर्टकट

1. गुणनफल एक संख्या जिसमें इकाई 5 हैं का उसी से

जैसे– 45 × 45

चरण–1 : उत्तर की इकाई और दहाई में 5 × 5 = 25 होगा।

गुणनफल होगा | | | 2 | 5 |

चरण–2 : सैंकड़े और अधिक के स्थान के लिए संख्या से (दहाई × (दहाई+1) की गणना कर खाली स्थान भरें।

$[4 \times (4+1)] = 4 \times 5 = 20$ | 2 | 0 | | |

अतः गुणनफल होगा | 2 | 0 | 2 | 5 | या 2025

45 × 45 की गणना कर पुष्टि करें।

क्या यह शॉर्टकट 5 इकाई वाली सभी संख्याओं पर लागू होगा?

स्वयं जाँच करें

$25 \times 25 =$ ------------------

$35 \times 35 =$ ------------------

$55 \times 55 =$ ------------------

$85 \times 85 =$ ------------------

$105 \times 105 =$ ----------------

$125 \times 125 =$ ----------------

------------------ आदि

2. गुणनफल दो संख्याओं का जिनके दहाई के अंक बराबर हैं और इकाई के अंकों का जोड़ 10 है।

उदाहरण : 26×24

चरण–1 : उत्तर की इकाई और दहाई में दोनों इकाई अंकों का गुणनफल होगा

$6 \times 4 = 24$

अतः गुणनफल होगा $\boxed{}\boxed{}\boxed{2}\boxed{4}$

चरण–2 : सैंकड़े और उससे आगे के स्थानों के लिए संख्या से (दहाई × (दहाई + 1))

$(2 \times (2+1)) = 2 \times 3 = 6$

गुणनफल होगा $\boxed{}\boxed{6}\boxed{2}\boxed{4}$ या 624

26×24 गणना कर पुष्टि करें। क्या यह शॉर्टकट ऐसे सब संख्याओं के जोड़ों पर लागू होगा जिनकी इकाइयों का जोड़ 10 है और दहाई अंक समान है।

निम्न गुणनफल से इस शॉर्टकट की जाँच कीजिए–

$14 \times 16 =$ ------------------

$38 \times 32 =$ ------------------

$53 \times 57 =$ ------------------

$102 \times 108 =$ ------------------

$317 \times 313 =$ ----------------

$1033 \times 1037 =$ ----------------

------------------ आदि

3. गुणनफल दो संख्याएँ जिनकी दहाई के अंकों का योग 10 है और इकाई अंक बराबर है– जैसे 74 × 34

चरण–1 : इकाई अंक का स्वयं से गुणा कर उत्तर के इकाई और दहाई स्थान पर लिखें।

4 × 4 = 16 तो गुणनफल होगा

		1	6

चरण–2 : सैंकड़े और अधिक स्थान के लिए दहाई अंकों को गुणा कर उसमें इकाई अंक को जोड़ें।

$(7 \times 3) + 4 = 21 + 4 = 25$

गुणनफल होगा $\boxed{2|5|1|6}$ या 2516

74 × 34 की गणना कर उत्तर की पुष्टि करें। निम्न गुणनफल से इस शॉर्टकट की जाँच कीजिए:

$$2 \times 2 = 04$$
$$(8 \times 2) + 2 = 18$$

$82 \times 22 = \boxed{1|8|0|4}$

$97 \times 17 =$ ------------------

$46 \times 66 =$ ------------------

------------------ आदि

गणना के ऐसे शॉर्टकट नियम ढूंढ़ना एक रोचक बौद्धिक अभ्यास है। ऐसे शॉर्टकट नियम ढूंढ़ने और सिद्ध करने में बीजगणित सहायक होता है जो आप आगे सीखेंगे।