अध्याय-3 संख्याओं का खेल

3.1 गुणनखंड (अपवर्तक) (Factor) और गुणज (अपवर्त्य) (Multiple)

आइए देखें संख्या 4 किन-किन संख्याओं से पूरी तरह विभाजित होती है, इसे भाग देकर देखें।

1) 4 (4 −4 0	2) 4 (2 −4 0	3) 4 (1 −3 1	4) 4 (1 −4 0
भागफल = 4 शेष = 0	भागफल = 2 शेष = 0	भागफल = 1 शेष = 1	भागफल = 1 शेष = 0

हम संख्या 4 को गुणा के रूप में भी लिख सकते हैं–

4 = 1 x 4; 4 = 2 x 2; 4 = 4 x 1;

इस प्रकार हम पाते हैं कि 1, 2 और 4 संख्या 4 के पूरे-पूरे विभाजक हैं। अतः ये संख्याएँ 4 के गुणनखंड (factor) हैं। इसी प्रकार आप बताएँ कि संख्या 8 के विभाजक कौने-कौन हैं?

किसी संख्या का गुणनखंड उसका पूरा-पूरा विभाजक होता है।

1, 2 और 4 के पहाड़े में 4 आता है। अतः संख्या 4, संख्या 1, 2 और 4 प्रत्येक का गुणज (multiple) है।

गतिविधि 1

हम वर्ग के बच्चों के संख्यानुसार कार्ड लेते हैं जिस पर 1, 2, 3, 4, 5 .... आदि संख्याएँ लिखी हों और प्रत्येक संख्या कार्ड में एक धागा बाँध देते हैं, जिसे गले से आसानी से लटकाया जा सके। कार्डों को प्रत्येक बच्चों के बीच बाँटकर उसे गले में पहनने को कहें और

फिर उन्हें एक वृत्ताकार गोल घेरे में खड़ा होने के लिए कहें। अब एक बच्चे को बीच में बुलाएँ। माना कि 18 नम्बर की कार्ड वाला बच्चा बीच में आया। फिर बच्चों से कहेंगे कि वे बच्चे भी बीच में आएँ जिनका नम्बर कार्ड इस नम्बर कार्ड को पूरी-पूरी विभाजित करता है, बच्चों के नम्बर कार्डों से बीच में आए नम्बर को विभाजित करने वाली संख्या को श्यामपट्ट पर नोट करवाएँ। इस प्रकार संख्या 18 को पूर्ण रूप से विभाजित करने वाली संख्या होगी – 1, 2, 3, 6, 9 और 18। ये सारी संख्याएँ 18 की गुणनखंड हैं। अब तालिका बनवाएँ–

संख्या	गुणनखण्ड
18	1, 2, 3, 6, 9, 18
12	
25	

- सोचिए और बताइए ऐसी कौन-सी संख्या है जिस संख्या वाले बच्चे को बीच में बुलाने पर एक भी अन्य बच्चा घेरे के बीच में न आए?

गतिविधि 2

यह खेल दो व्यक्तियों, मान लीजिए A और B द्वारा खेला जा सकता है। आप नीचे दिए गए कार्डों के समान संख्या कार्डों को फर्श या टेबल पर फैला लें।

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49
50						

चरण :

(a) निर्णय लीजिए कि पहले कौन खेलेगा A या B ?

(b) मान लीजिए A पहले खेलता है। वह मेज से एक कार्ड उठाता है और अपने निकट रख लेता है। मान लीजिए इस कार्ड पर 28 लिखा है।

(c) खिलाड़ी B अब वे सभी कार्ड उठाता है जिन पर A के कार्ड पर लिखी संख्या (अर्थात् 28) के गुणनखंड लिखे हैं और उन्हें अपने निकट एक ढेर में रख देता है।

(d) फिर खिलाड़ी B मेज पर रखे कार्डों में से एक कार्ड उठाता है। अब मेज पर बचे कार्डों से A वे सभी कार्ड उठाता है जिन पर B के कार्ड की संख्या के गुणनखंड लिखे हैं।

(e) यह खेल तब तक जारी रहता है, जब तक कि सभी कार्ड न उठा लिए जाएँ।

(f) A अपने पास रखे कार्डों पर लिखी संख्याओं को जोड़ता है और B भी अपने पास रखे कार्डों पर लिखी संख्याओं को जोड़ता है। जिस खिलाड़ी का योग अधिक होगा उसे ही जीता हुआ माना जाएगा। कार्डों की संख्या को बढ़ाकर इस खेल को और अधिक रोचक बनाया जा सकता है।

इस खेल को अपने मित्र के साथ खेलिए। क्या आप इस खेल को जीतने की कोई विधि ज्ञात कर सकते हैं?

स्वयं करके देखिए और निष्कर्ष निकालिए–

8 के कुछ गुणज (multiple) दिए हैं– 8,16,24 .... आगे आप लिखिए।

इसी तरह 6 के 5 गुणज लिखिए।

आप पाते हैं कि किसी संख्या का सबसे छोटा गुणज वह संख्या स्वयं भी होती है।

इसी प्रकार 15 के विभिन्न गुणनखण्ड हैं 3 x 5, 15 x 1

अतः संख्या 1, 3, 5, 15, संख्या 15 के गुणनखण्ड हैं। इसी प्रकार आप 20 के विभिन्न गुणनखण्ड लिखिए।

क्या आप ऊपर दिए गए उदाहरणों के आधार पर कह सकते हैं कि किसी संख्या का सबसे बड़ा गुणनखण्ड वह संख्या स्वयं होती है? हाँ/नहीं

क्या कोई ऐसी संख्या है जो प्रत्येक संख्या के गुणनखण्ड के रूप में आती है।

$6 = 1 \times 6$

$7 = 1 \times 7$

$12 = 1 \times 12$

क्या .हम कह सकते हैं कि 1 प्रत्येक संख्या का गुणनखण्ड है? हाँ/नहीं अन्य संख्याओं के लिए उसे जाँचिए।

जब हम $18 = 2 \times 9$ लिखते हैं, तो हम कहते हैं कि 2 और 9, संख्या 18 के गुणनखण्ड हैं। हम यह भी कहते हैं कि 18, संख्या 2 और 9 का गुणज है $\underbrace{2 \times 9}_{\text{गुणनखण्ड}} = 18 \rightarrow$ गुणज

इसी तरह आप 20 के गुणनखण्ड लिखिए। यह भी बताइए कि 20 किन-किन संख्याओं का गुणज है?

हम यह कह सकते हैं कि एक संख्या अपने प्रत्येक गुणनखण्ड का एक गुणज होती है।

ऊपर दिए गए उदाहरणों के आधार पर निम्न कथनों की जाँच कीजिए–

1. एक संख्या के गुणनखण्डों (Factor) की संख्या निश्चित (परिमित) होती है।

हाँ/नहीं

कारण --

2. किसी संख्या के गुणज (Multiple) की संख्या भी निश्चित (परिमित) होती है।

हाँ/नहीं

कारण --

सम्पूर्ण संख्याएँ (Perfect Number)

जैसे– 6 के सभी गुणनखंड = 1, 2, 3 और 6 हैं।

इनके गुणनखंडों का योगफल = 1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 x 6 अर्थात् 6 के सभी गुणनखंडों का योगफल 6 का दोगुना है।

पुनः 28 के सभी गुणनखंड = 1, 2, 4, 7, 14 और 28 हैं।

इनके गुणनखंडों का योगफल = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2 x 28 अर्थात् 28 के सभी गुणनखंडों का योगफल 28 का दोगुना है।

वह संख्या जिसके सभी गुणनखंडों का योगफल उस संख्या का दोगुना हो, एक सम्पूर्ण संख्या (Perfect number) कहलाती है। यहाँ 6 और 28 सम्पूर्ण संख्याएँ हैं।

स्वयं करें

क्या 12 एक सम्पूर्ण संख्या है?

3.2 भाज्य, (संयुक्त संख्या) और अभाज्य संख्या (रूढ़ सं०)

संख्या	गुणनखंड (अपवर्तक)
1	1
2	1, 2
3	1, 3
4	1, 2, 4
5	1, 5
6	1, 2, 3, 6
7	1, 7
8	1, 2, 4, 8
9	1, 3, 9
...	....

उपर्युक्त सारणी को देखने से पता चलता है कि तीन तरह की संख्याएँ हैं। वे संख्याएँ :

(i) जिनका केवल एक गुणनखण्ड होता है।

(ii) जिनके केवल दो गुणनखण्ड होते हैं।

(iii) जिनके दो से अधिक गुणनखण्ड होते हैं।

निष्कर्ष

- जिनका केवल एक गुणनखंड है वह 1 है।

  यह न तो भाज्य है और न अभाज्य।

- जिनके केवल दो गुणनखंड हैं वे संख्याएँ हैं–

  2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 .... इन संख्याओं को **अभाज्य संख्या (Prime number)** कहते हैं।

- जिनके दो से अधिक गुणनखंड होते हैं वे संख्याएँ हैं : 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16 .... इन संख्याओं को **संयुक्त (Composite) संख्या** कहते हैं।

अभाज्य संख्याओं को छाँटने की एक सरल विधि यूनानी गणितज्ञ इरेटोसथीन्स (Eratosthenes) ने तीसरी शताब्दी ई.पू. ज्ञात की। उसकी यह विधि इरेटोसथीन्स की छलनी (Sieve of Eratosthenes) कहलाती है। पहले हम 1 से 100 तक के धन पूर्णांकों की सारणी बनाते हैं जैसा आगे दिया गया है।

हम 1 को काट देते हैं क्योंकि हम जानते हैं कि 1 न तो भाज्य संख्या है और न अभाज्य। अब हम 2 पर गोला लगाते हैं और 2 के प्रत्येक गुणज अर्थात् 4, 6, 8 .... इत्यादि को काट देते हैं जैसा कि आगे किया जा रहा है–

अगली संख्या जो नहीं काटी गई है, 3 है। अत: 3 के प्रत्येक गुणज अर्थात् 6, 9, 12, 15 .... इत्यादि को काट देते हैं।

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

हम यह क्रिया तब तक जारी रखते हैं, जब तक कि प्रत्येक संख्या या तो कट जाए या उस पर गोला लग जाए।

सारणी में गोले वाली सभी संख्याएँ अभाज्य संख्याएँ हैं। 1 को छोड़कर काट दी गई सभी संख्याएँ संयुक्त संख्याएँ हैं।

3 और 5 के बीच केवल एक भाज्य संख्या 4 है, 5 और 7 के बीच केवल एक भाज्य संख्या 6 है। 11 और 13 के बीच केवल एक भाज्य संख्या है वह है 12। इस प्रकार की अभाज्य संख्याओं के जोड़े को जिनके बीच केवल एक ही भाज्य संख्या हो, अभाज्य युग्म (जुड़वाँ अभाज्य) (Twins prime) कहते हैं।

स्वयं करें

1 और 100 के बीच सभी अभाज्य युग्मों को लिखें।

उदाहरण 1 : 42 के सभी गुणनखंडों को ज्ञात करें।

हल : हम देखते हैं कि

$42 = 1 \times 42$, $42 = 2 \times 21$, $42 = 3 \times 14$, $42 = 6 \times 7$, $42 = 7 \times 6$

यहाँ रुक जाइए, क्योंकि 6 और 7 पहले ही आ चुका है। इस प्रकार 42 के सभी गुणनखंड 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42 हैं।

उदाहरण 2 : 81 के गुणनखंड ज्ञात करें।

हल : $81 = 1 \times 81$, $81 = 3 \times 27$, $81 = 9 \times 9$

क्योंकि दोनों गुणनखंड (9) समान हैं। इस प्रकार वांछित गुणनखंड 1, 3, 9, 27, 81 है।

उदाहरण 3 : क्या 12, 8736 का गुणनखंड है?

हल : यदि 12, संख्या 8736 का एक गुणनखण्ड है तो 8736 में 12 का भाग पूरा-पूरा जाना चाहिए–

```
12) 8736 (728
   -84
   ----
     33
    -24
   ----
     96
    -96
   ----
      0
```

क्योंकि शेष 0 है अर्थात् 8736 संख्या 12 से पूर्णतः विभाजित है। इसलिए 12, संख्या 8736 का एक गुणनखंड है।

प्रश्नावली – 3.1

1. 15 के सभी गुणनखंड लिखें।

2. 64 के सभी गुणनखंड लिखे।

3. निम्न में प्रत्येक के सभी गुणनखंड लिखें–

(i) 36 (ii) 45 (iii) 78 (iv) 125 (v) 144

4. 14 के गुणज लिखें।

5. 18 के गुणज लिखें।

6. निम्न में प्रत्येक के पहले पाँच गुणज लिखें–

(i) 4 (ii) 12 (iii) 30 (iv) 24 (v) 50

7. सबसे छोटी अभाज्य संख्या बताएँ।

8. सम अभाज्य संख्या बताएँ।

9. तीन अभाज्य युग्म का उदाहरण दें।

10. निम्न में कौन-कौन सी अभाज्य संख्या है–

(a) 23 (b) 28 (c) 42 (d) 9 (e) 31

11. सबसे छोटी संयुक्त संख्या बताएँ।

12. 100 से कम 5 क्रमागत संयुक्त संख्याएँ लिखिए जिनके बीच कोई अभाज्य संख्या न हो।

13. किसी संख्या के इकाई स्थान पर 5 है। यदि वह संख्या 150 और 200 के बीच की हो तो वह संयुक्त होगी अथवा अभाज्य?

14. 10 से बड़ी किसी संख्या के अभाज्य होने के लिए उसके इकाई स्थान पर कौन-कौन से अंक हो सकते हैं?

15. क्या कोई ऐसी भी संख्या है, जिसका कोई गुणनखंड न हो?

16. 1 और 100 के बीच सिर्फ दो सम्पूर्ण संख्याएँ हैं, वे कौन-कौन सी हैं?

17. निम्न में प्रत्येक संख्या को दो विषम अभाज्य संख्या के योग के रूप में लिखें–

(i) 32 (ii) 40 (iii) 56 (iv) 80 (v) 100

18. 16 से छोटी सभी अभाज्य और संयुक्त संख्याएँ अलग-अलग लिखिए।

19. क्या 1729 अभाज्य संख्या है?

20. निम्नलिखित में जो सत्य हो उसके आगे (✓) सत्य का चिह्न और जो गलत हो उसके आगे (x) गलत का चिह्न लगाएँ–

(i) वह संख्या जिसका केवल एक अपवर्तक होता है, वह संख्या 1 है।

(ii) सबसे छोटी सम अभाज्य संख्या 2 है।

(iii) सबसे छोटी संयुक्त संख्या 6 है।

(iv) दो अभाज्य संख्याओं का योग सम होता है।

(v) 2 को छोड़कर किन्हीं भी दो अभाज्य संख्या का योगफल सम संख्या होती है।

(vi) सभी सम संख्याएँ संयुक्त संख्या है।

(vii) तीन विषम संख्याओं का योगफल विषम संख्या होती है।

(viii) दो सम संख्याओं का योगफल सदैव सम संख्या होती है।

3.3 विभाज्यता की जाँच

क्या संख्या 54, संख्या 2 से पूर्णतः विभाजित है? आइए 54 में 2 से भाग देकर देखें।

$$
\begin{array}{l}
2\,)\,54\,(27 \\
\underline{-4} \\
\;\;14 \\
\underline{-14} \\
\;\;\;0
\end{array}
$$

क्या 9876548, संख्या 2 से विभाजित है? आइए भाग देकर देखें।

$$
\begin{array}{r}
4938274 \\
2\overline{)9876548} \\
-8 \\
\hline
18 \\
-18 \\
\hline
07 \\
6 \\
\hline
16 \\
-16 \\
\hline
05 \\
-4 \\
\hline
14 \\
-14 \\
\hline
08 \\
-8 \\
\hline
0 \\
\hline
\end{array}
$$

अतः संख्या 9876548 संख्या 2 से पूर्णतः विभाजित है।

परन्तु उपर्युक्त भाग की क्रिया द्वारा विभाज्यता की जाँच करने में अधिक श्रम एवं समय लगता है और इसकी जाँच के लिए बहुत-सी सरल विधियाँ उपलब्ध हैं, जिनसे शीघ्र जाँच की जा सकती है कि कोई संख्या कुछ अन्य संख्याओं से पूर्णतः विभाज्य है या नहीं। केवल संख्या के अंकों की जाँच करके हम निश्चित रूप से कह सकते हैं कि वह संख्या इनमें से किस संख्या से विभाज्य है। आइए जाँच के इन नियमों का यहाँ संक्षेप में जिक्र करते हैं–

1. **2 से विभाज्यता–** 10, 12, 14, 16, 18 इन संख्याओं को देखिए, ये दो से पूर्णतः विभाजित हैं, इनके इकाई के अंक 0, 2, 4, 6 और 8 हैं। अतः जिस संख्या का इकाई का अंक 0, 2, 4, 6 और 8 हो, वे संख्याएँ 2 से पूर्णतः विभाजित होती हैं।

2. 3 से विभाज्यता– दी गई संख्या के अंकों का योगफल 3 से पूर्णतः विभाजित है तो दी गई संख्या भी 3 से पूर्णतः विभाजित होगी। जैसे– संख्या 8745 संख्या 3 से विभाज्य है, क्योंकि 8 + 7 + 4 + 5 = 24, 3 से पूर्णतः विभाज्य है।

3. 4 से विभाज्यता– संख्या के दहाई और इकाई के अंकों से बनी संख्या यदि 4 से पूर्णतः विभाज्य है तो दी गई संख्या भी 4 से पूर्णतः विभाजित होगी। जैसे – संख्या 5832, संख्या 4 से पूर्णतः विभाज्य है, क्योंकि इस संख्या के दहाई और इकाई से बनी संख्या 32 है, जो 4 से विभाज्य है। दी गई संख्या के दहाई और इकाई का अंक शून्य हो तो वह भी 4 से विभाज्य है। जैसे– 4100 आदि।

4. 5 से विभाज्यता– दी गई संख्या के इकाई का अंक यदि 0 या 5 हो, तो दी गई संख्या 5 से पूर्णतः विभाज्य होगी। जैसे– 10, 105 आदि।

5. 6 से विभाज्यता– 6 का अभाज्य गुणनखंड = 2 x 3 है। अतः दी गई संख्या यदि 2 और 3 दोनों से विभाज्य है तो दी गई संख्या 6 से भी पूर्णतः विभाज्य होगी। जैसे– संख्या 8556, संख्या 2 और 3 दोनों से विभाज्य है।

6. 8 से विभाज्यता – दी गई संख्या के सैकड़ा, दहाई और इकाई के अंक यदि शून्य हो अथवा सैकड़ा, दहाई और इकाई के अंकों से बनी संख्या 8 से विभाज्य हो तो दी गई संख्या भी 8 से विभाज्य होगी। जैसे–

58000, 8 से विभाज्य है क्योंकि सैकड़ा, दहाई और इकाई के अंक शून्य है। 58928 यह संख्या 8 से विभाज्य है, क्योंकि सैकड़ा, दहाई और इकाई से बनी संख्या 928 है, जो 8 से विभाज्य है।

7. 9 से विभाज्यता – दी गई संख्या के अंकों का योगफल यदि 9 से विभाजित हो तो दी गई संख्या भी 9 से पूर्णतः विभाज्य होगी। जैसे– 549, 9 से विभाज्य है, क्योंकि 5 + 4 + 9 = 18 जो 9 से पूर्णतः विभाज्य है।

8. **10 से विभाज्यता** – दी गई संख्या के इकाई का अंक शून्य हो, तो वह 10 से विभाज्य है। जैसे– 100, 5000, 8530 आदि।

9. **11 से विभाज्यता**– यदि दी गई संख्या के दाएं से विषम स्थानों पर के अंकों का योगफल और सम स्थानों पर के अंकों का योगफल का अंतर यदि शून्य अथवा 11 के गुणज हो, तो दी गई संख्या 11 से विभाज्य होगी। जैसे – 4653 संख्या के

सम स्थान के अंकों का योगफल	= 4 + 5 = 9
विषम स्थान के अंकों का योगफल	= 6 + 3 = 9
	अन्तर = 0

अतः 4653, 11 से पूर्णतः विभाज्य है। पुनः संख्या 8293846

विषम स्थान यानी पहला, तीसरा, पाँचवाँ, सातवाँ आदि के अंकों का योगफल 8 + 9 + 8 + 6 = 31

सम स्थानों के अंकों का योगफल	2 + 3 + 4 = 9
	अन्तर = 22

यहाँ 22, 11 के गुणज है अतः 8293846, 11 से विभाज्य है।

3.4 विभाज्यता के कुछ सामान्य गुण

गुण 1 – हम जानते हैं कि 84 विभाज्य है 12 से, क्योंकि 84 = 12 x 7 तथा 12 = 3 x 4 इसलिए 84, 3 से भी विभाज्य होना चाहिए और है भी, क्योंकि 84 = 3 x 28 इसी प्रकार 84, 4 से भी विभाज्य होना चाहिए और है भी, क्योंकि 84 = 4 x 21, यह बात सभी संख्याओं के लिए सत्य है। अतः यदि एक संख्या दूसरी से विभाज्य है, तो वह दूसरी संख्या के सभी गुणनखंडों से भी विभाज्य होती है।

गुण 2 – हम जानते हैं कि

2 गुणनखंड है 36 का, क्योंकि 36 = 2 x 18

3 गुणनखंड है 36 का, क्योंकि 36 = 3 x 12

2 x 3, अर्थात् 6 गुणनखंड है 36 का, क्योंकि 36 = 6 x 6 । इसकी जाँच अन्य उदाहरण से भी कर सकते हैं और सत्य हैं।

अतः यदि कोई संख्या दो या अधिक सह-अभाज्य (Co-prime numbers) संख्याओं में प्रत्येक से विभाज्य हो तो वह संख्या, उनके गुणनफल से भी विभाज्य है।

टिप्पणी – वैसी दो संख्याएँ, जिनका सार्वगुणनखंड सिर्फ 1 हो तो वे दोनों युग्म संख्याएँ **सह-अभाज्य संख्या (Co-prime numbers)** कहलाती हैं। जैसे–

4 और 17 सह-अभाज्य है, क्योंकि

4 का गुणनखंड = 1, 2, 4

17 का गुणनखंड = 1, 17

सार्वगुणनखंड (Common factor) = 1

गुण – 3

24 और 12, 6 से विभाज्य है, क्योंकि 24 = 6 x 4

12 = 6 x 2

तो 24 + 12 = 36 संख्या 6 से विभाज्य है, क्योंकि 36 = 6 x 6 एक और उदाहरण देखें 42 और 49, 7 से विभाज्य है, क्योंकि

42 = 7 x 6 और 49 = 7 x 7

तो 42 + 49 = 91 भी 7 से विभाज्य है, क्योंकि

91 = 7 x 13

निष्कर्ष – यदि दी हुई दो संख्याएँ किसी संख्या से विभाज्य हों, तो इन संख्याओं का योग भी उस संख्या से विभाज्य होगा।

गुण 4 – अब इन उदाहरण को देखें –

60 और 45, 15 से विभाज्य हैं, क्योंकि

60 = 15 x 4

45 = 15 x 3

अब इन संख्याओं का अन्तर 60-45 = 15, जो 15 से विभाज्य है, यह अन्य के लिए भी सत्य है।

अतः यदि दी हुई दो संख्याएँ किसी संख्या से विभाज्य हों तो इन संख्याओं का अन्तर भी उस संख्या से विभाज्य है।

3.5 सार्वगुणनखंड (Common factor) और सार्वगुणज (Common multiple)

(a) आइए हम एक उदाहरण लेते हैं –

12 और 24 के गुणनखंड क्या हैं?

12 के गुणनखंड = 1, 2, 3, 4, 6, और 12

24 के गुणंनखंड = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 और 24

संख्या 12 और 24 दोनों में मिलने वाले गुणनखंड = 1, 2, 3, 4, 6 और 12 हैं। इन गुणखंडों को **उभयनिष्ठ** या **सार्वगुणनखंड** कहते हैं।

पुनः एक और उदाहरण लेते हैं–

(b) 32, 12 और 16 के गुणनखंडों पर विचार करते हैं।

32 के गुणनखंड = 1, 2, 4, 8, 16 और 32

12 के गुणनखंड = 1, 2, 3, 4, 6 और 12

16 के गुणनखंड = 1, 2, 4, 8 और 16

32, 12, और 16 तीनों संख्याओं में मिलने वाले गुणनखंड हैं– 1, 2 और 4

अतः 32, 12 और 16 के सार्वगुणनखंड = 1, 2 और 4 हैं।

(c) 8 और 15 के सार्वगुणनखंड पर विचार करें–

8 के गुणनखंड = 1, 2, 4 और 8

15 के गुणनखंड = 1, 3, 5 और 15

8 और 15 के सार्वगुणनखंड = 1

ऐसे बहुत से जोड़े हैं जिनका सार्वगुणनखंड केवल 1 होता है, इस प्रकार के युग्म संख्या को **सह-अभाज्य (Co-prime) संख्या** कहते हैं, जैसे– 3 और 5, 4 और 9 आदि।

आइए अब संख्याओं के सार्वगुणज को देखें।

(a) 4 और 5 के गुणजों को गौर से देखें।

4 का गुणज = 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40 ....

5 का गुणज = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 ....

संख्या 4 और 5 के वैसे गुणज जो दोनों में मिलते हैं – 20, 40 ....

अतः संख्या 4 और 5 के सार्वगुणज 20, 40 .... हैं।

(b) 3, 4 और 9 के गुणजों पर विचार करें।

3 के गुणज = 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36 ....

4 के गुणज = 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40 ....

9 के गुणज = 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72 ....

3, 4 और 9 के वैसे गुणज हैं जो तीनों में हैं– 36 ....

अतः 3, 4 और 9 के सार्वगुणज = 36, 72 ....

स्वयं करके देखिए

1. निम्न का सार्वगुणनखंड ज्ञात करें –

(a) 8, 12 (b) 9, 27 और 12

2. निम्न का सार्वगुणज ज्ञात करें –

(a) 4, 16 (b) 12, 16 और 18

3. सहभाज्य संख्याओं का तीन उदाहरण दें।

हम गुणनखंड तथा अभाज्य संख्याओं के बारे में पहले से ही जानते हैं। आइए हम 24 के गुणनखंडों पर विचार करें।

24	= 2 x 12	24	= 3 x 8	24	= 4 x 6
	= 2 x 2 x 6		= 3 x 2 x 4		= 2 x 2 x 2 x 3
	= 2 x 2 x 2 x 3		= 3 x 2 x 2 x 2		

24 के उपर्युक्त सभी गुणनखंडों में अंत में हम एक ही गुणनखंडन 2 x 2 x 2 x 3 पर पहुँचते हैं। इन गुणनखंडन में सिर्फ 2 और 3 ही गुणनखण्ड हैं और ये अभाज्य संख्याएँ हैं। किसी संख्या का इस प्रकार का गुणनखंडन **अभाज्य गुणनखंडन (Prime factorisation)** कहलाता है। दूसरे शब्दों में कोई गुणनखंडन अभाज्य होता है, यदि उसके सभी गुणनखंड अभाज्य हों।

उदाहरण : 360 अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात करें।

हल :

2	360
2	180
2	90
3	45
3	15
5	5
	1

360 का अभाज्य गुणनखंडन = 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 5 हैं।

(अतः विभाज्यता का नियम लगाकर हम किसी भी संख्या का अभाज्य गुणनखंडन आसानी से प्राप्त कर लेते हैं।)

प्रश्नावली – 3.2

1. विभाज्यता की जाँच के नियमों का प्रयोग करते हुए पता कीजिए कि निम्नलिखित संख्याओं में से कौन-सी संख्याएँ 2 से, 3 से, 4 से, 5 से, 6 से, 8 से, 9 से, 10 से और 11 से विभाज्य हैं? सिर्फ हाँ या नहीं में जवाब दें।

संख्या	विभाज्य हैं								
	2 से	3 से	4 से	5 से	6 से	8 से	9 से	10 से	11 से
124									
286									
546									
15864									
428428									
333333									
429714									
54685									
45600									

2. विभाज्यता की जाँच के नियमों के प्रयोग द्वारा ज्ञात करें कि निम्नलिखित संख्याओं में कौन-सी संख्या 2 से, 3 से, 5 से और 9 से विभाजित हैं?

(i) 126 (ii) 672 (iii) 990

(iv) 2050 (v) 2856 (vi) 406839

3. विभाज्यता की जाँच के नियमों के प्रयोग द्वारा बताएँ कौन-सी संख्याएँ 4 से और 8 से विभाज्य हैं?

(i) 512 (ii) 12159 (iii) 4096

(iv) 14540 (v) 21084 (vi) 31795012

4. निम्न संख्याओं की 6 से विभाज्यता की जाँच करें–

(i) 12583 (ii) 639210 (iii) 546534

5. निम्न में कौन-सा कथन सत्य है–

(i) यदि कोई संख्या 3 से विभाज्य है तो वह 9 से भी विभाज्य होगी।

(ii) यदि कोई संख्या 9 से विभाज्य है तो वह 3 से भी विभाज्य होगी।

(iii) सभी संख्याएँ जो 18 से विभाज्य होती है वह 3 और 6 दोनों से विभाज्य होगी।

(iv) सभी संख्याएँ जो 8 से विभाज्य है 4 से भी विभाज्य होती है।

(v) जो संख्या 9 और 10 दोनों से विभाज्य है वह 90 से भी विभाज्य होती है।

(vi) यदि कोई संख्या दी हुई दो संख्याओं के योग को पूर्ण विभाजित करती है तो वह उन दोनों संख्याओं को अलग-अलग भी पूर्ण विभाजित करती है।

(vii) दो सह-अभाज्य संख्याओं में कम-से-कम एक अभाज्य संख्या होनी चाहिए।

(viii) दो क्रमागत विषम संख्याओं का योग सदैव 4 से विभाज्य होता है।

6. 8, 24 व 32 का अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात करें।

7. निम्नलिखित का सार्वगुणनखंड बताएँ–

(a) 4, 32 (b) 8, 32, 42 (c) 14, 56, 28

8. निम्न का गुणज निकालें–

(a) 8, 10 (b) 4, 12 (c) 3, 5, 8

9. निम्न का सार्वगुणज बताएँ–

(a) 4, 14 (b) 8, 24 (c) 6, 21 और 27

10. निम्नलिखित का अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात करें–

(a) 540 (b) 440 (c) 420

3.6 महत्तम समापवर्तक (म.स.) (Highest common factor) या (HCF) –

इसे महत्तम सार्वभाजक (Greatest common divisor) या (GCD) भी कहा जाता है। आइए हम सबसे पहले अपवर्तक विधि द्वारा 18 और 24 का म.स. (HCF) ज्ञात करें।

18 के अपवर्तक = 1, 2, 3, 6, 9 और 18

24 के अपवर्तक = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

18 और 24 में उभयनिष्ठ (सार्व) अपवर्तक = 1, 2, 3, 6

इसमें सबसे बड़ा उभयनिष्ठ अपवर्तक 6 है। अतः महत्तम समापवर्तक = 6

स्वयं करके देखिए

निम्न का म.स. ज्ञात करें –

(i) 28, 30 (ii) 9, 24, 36 (iii) 12, 15, 18 (iv) 50, 60, 80

इस प्रकार, दो या अधिक संख्याओं का म.स. उन संख्याओं का महत्तम (सबसे बड़ी) उभयनिष्ठ अपवर्तक होता है।

अब अभाज्य गुणनखंडन विधि से दी हुई संख्याओं का महत्तम समापवर्तक ज्ञात करेंगे।

विधि – सबसे पहले हम दी हुई संख्याओं का अभाज्य गुणनखंडन करते हैं। तब प्रत्येक उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखंड का गुणनफल ज्ञात कर लेते हैं, जो म० स० कहलाता है।

इस उदाहरण को देखें–

24 और 36 का म.स. अभाज्य गुणनखंडन द्वारा इस प्रकार ज्ञात करते हैं।

24 और 28 का अभाज्य गुणनखंडन–

इस प्रकार $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$28 = 2 \times 2 \times 7$

24 और 28 का सार्वगुणनखंड = 2, 2

अतः 24 और 28 का म.स. = 2 x 2 = 4 है

.... और उदाहरण देखें–

24, 32 और 36 का म.स. अभाज्य गुणनखंड विधि से ज्ञात करते हैं।

इस प्रकार, $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 24 \\ \hline 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 32 \\ \hline 2 & 16 \\ \hline 2 & 8 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

24, 32 और 36 में सार्व अभाज्य गुणनखंड = 2, 2

महत्तम समापवर्तक = 2 x 2 = 4

टिप्पणी : सह-अभाज्य संख्या जैसे– 8 और 15 का म.स.

8 का अभाज्य गुणनखंड = 2 x 2 x 2

15 का अभाज्य गुणनखंड = 3 x 5, चूँकि इन गुणनखंडों में 1 को छोड़कर कोई अन्य सार्वगुणनखंड नहीं है, इसलिए 8 और 15 का म.स. 1 होगा।

प्रश्नावली – 3.3

1. निम्नलिखित संख्याओं के म.स. (अभाज्य गुणनखंड द्वारा) ज्ञात करें –

(a) 24, 36 (b) 40, 60 (c) 20, 50

(d) 4, 12 (e) 12, 72, 84 (f) 70, 105, 175

(g) 91, 112, 49

2. निम्न का म.स. क्या है?

(a) दो क्रमागत संख्याएँ (b) दो क्रमागत सम संख्याएँ

(c) दो क्रमागत विषम संख्याएँ

3. निम्न का म.स. (अभाज्य गुणनखंड द्वारा) ज्ञात करें –

(a) 4 और 15 (b) 8 और 9 (c) 4 और 13

3.7 महत्तम समापवर्तक (भाग विधि द्वारा)

उदाहरण–1. 12 और 32 का म.स. भाग विधि द्वारा इस प्रकार करते हैं–

```
12 | 32 | 2
   | -24|
   ------
      8 | 12 | 1
        | -8 |
        -----
          4 | 8 | 2
            | -8|
            ----
              0
```

म.स. = 4

(अंतिम विभाजक जिससे भाज्य पूर्णतः विभाजित हो जाता है, दी गई संख्याओं का महत्तम समापवर्तक होता है।)

कार्य विधि

सबसे पहले दो संख्याओं के बीच भाग करते हैं, बड़ी संख्या में छोटी संख्या से भाग करते हैं, इस प्रकार जो शेष प्राप्त होता है, उससे फिर पहले विभाजक को भाग करते हैं और दूसरा शेष प्राप्त करते हैं, पुनः दूसरे विभाजक को दूसरे शेष से भाग करते हैं। यह क्रिया उस समय तक दुहराते हैं जब तक अंतिम शेष शून्य प्राप्त न हो जाए। इस क्रिया का अंतिम विभाजक दी हुई संख्याओं का म.स. होता है। जैसा कि ऊपर दिखाया जा चुका है।

उदाहरण–2 : 120, 380, 160 का म.स. भाग विधि द्वारा निकालें –

हल :

```
120 | 380  | 3
    | -360 |
    --------------
      20   | 120  | 6
           | - 120|
           --------
           | 0    |
```

अब 20 और 160 का म.स. निकालें

20) 160 (8

–160

0

अतः म.स. = 20

अतः तीन संख्याओं का म.स. ज्ञात करने की विधि इस प्रकार है–

(i) उनमें से पहले किसी दो का म.स. प्राप्त करते हैं।

(ii) फिर (i) में प्राप्त म.स. तथा तीसरी संख्या का म.स. ज्ञात करते हैं।

(iii) (ii) में प्राप्त म.स. तीनों दी हुई संख्याओं का अभीष्ट म.स. है। जैसा कि उदाहरण द्वारा बताया जा चुका है।

उदाहरण– 3 : वह बड़ी-से-बड़ी संख्या ज्ञात करें, जिससे यदि 280 और 1245 को भाग करें तो क्रमशः 4 और 3 शेष बचेंगे।

हल : जब कोई संख्या 280 को विभाजित करती है तो 4 शेष बचता है। अतः (280–4) = 276 उस संख्या से पूर्णतया विभाजित होगी। इसी प्रकार (1445-3) = 1442 भी उस संख्या से पूर्णतया विभाजित होगी।

अतः अभीष्ट संख्या 276 तथा 1442 का म.स. होगा।

```
276 | 1242  | 4
    | -1104 |
    ---------------
      138   | 276 | 2
            | 276 |
            -------
            | 0   |
```

म.स. = 138

अतः अभीष्ट संख्या = 138

उदाहरण 4 : एक गोष्ठी में हिन्दी, अंग्रेजी तथा गणित में भाग लेने वालों की संख्या क्रमशः 60, 84 और 108 है। उनके बैठने के लिए कम-से-कम कितने कमरे चाहिए यदि प्रत्येक कमरे में एक ही विषय के व्यक्ति बैठें और उनकी संख्या भी समान हो?

हल : प्रत्येक कमरे में बैठने वाले व्यक्तियों की संख्या 60, 84 और 108 का म.स. होगी।

60, 84 और 108 का म.स. = 12 है।

अतः प्रत्येक कमरे में बैठने वालों की अधिकतम संख्या 12 है।

कमरों की संख्या जिनकी आवश्यकता पड़ेगी $= \frac{60+84+108}{12} = 21$

प्रश्नावली – 3.4

1. निम्न का म.स. अभाज्य गुणनखंडन विधि से ज्ञात करें–

(i)	81, 117	(ii)	18, 48	(iii)	27, 63
(iv)	36, 84	(v)	70, 140, 210	(vi)	12, 45, 75
(vii)	120, 144, 204	(viii)	106, 159, 265	(ix)	625, 3125, 15625

2. निम्न का म.स. भाग विधि से ज्ञात करें–

(i)	300, 450	(ii)	442, 1261	(iii)	252, 576
(iv)	935, 1320	(v)	1624, 522, 1276	(vi)	2241, 8217, 747

3. 65610 विभाज्य है 27 से, 65610 की दो निकटतम संख्याएँ ज्ञात करें जो 27 से विभाज्य हों।

4. किन्हीं दो क्रमागत-संख्याओं का म.स. क्या होगा?

5. दो छोटे टैंकरों में क्रमश : 85 और 68 लीटर पेट्रोल आता है। उस मापने वाले बर्तन की अधिकतम धारिता ज्ञात करें जिससे प्रत्येक टैंकर का पेट्रोल पूरा पूरा मापा जा सके।

6. वह बड़ी-से-बड़ी संख्या ज्ञात करें जिससे 389, 436 और 542 को भाग देने पर क्रमशः 4, 7 और 3 शेष बचे।

7. एक विद्यालय की कक्षा 6, 7, 8 में क्रमशः 220, 116 और 132 छात्र हैं। इनके बराबर-बराबर बच्चे के समूह में अधिक-से-अधिक कितने छात्र होंगे?

8. एक आयताकार फर्श की लम्बाई 20 मी 16 सेमी और चौड़ाई 15 मी 60 सेमी है। इसको समान वर्गाकार टाइलें लगाकर पक्का करना है। ज्ञात करें कि इसके लिए कम-से-कम कितनी टाइलें चाहिए?

लघुतम समापवर्त्य (ल.स.) (Lowest common multiple) (LCM)

हम जानते हैं कि **दो या अधिक संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य (ल.स.) वह छोटी-से-छोटी संख्या है, जो दी हुई प्रत्येक संख्या का गुणज है।**

अपवर्त्य विधि

12 का अपवर्त्य (गुणज) = 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96 ....

9 का अपवर्त्य (गुणज) = 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72 ....

12 और 9 का सम अपवर्त्य (सार्वगुणज) = 36, 72 ....

12 और 9 के गुणजों में सबसे छोटा (लघुतम) समापवर्त्य 36, अतः 12 और 9 का लघुतम समापवर्त्य = 36

स्वयं करके देखिए

उदाहरण–1 : निम्न का ल.स. अपवर्त्य (गुणज) विधि से करें–

(a) 8, 16 (b) 12, 18, 24

(c) 20, 30, 40, 50 (d) 15, 24, 32, 36

अब हम लोग अभाज्य गुणनखंडन द्वारा दो या अधिक संख्याओं का ल.स. पर विचार करें।

उदाहरण–2 : 12, 18 और 24 का ल.स. ज्ञात करें।

सर्वप्रथम हम प्रत्येक संख्या का अभाज्य गुणनखंडन करते हैं, जो इस प्रकार है–

24 = 2 x 2 x 2 x 3 →2 तीन बार, 3 एक बार

12 = 2 x 2 x 3 →2 दो बार, 3 एक बार

18 = 2 x 3 x 3 →2 एक बार, 3 दो बार

ल.स. = 2 x 2 x 2 x 3 x 3 = 72

इन संख्याओं में अधिक बार आए अभाज्य गुणनखंडों का गुणनफल ही उनका अभीष्ट ल.स. होता है। स्पष्ट है कि दो या अधिक संख्याओं का अभाज्य गुणनखंड विधि से ल.स. (LCM) ज्ञात करने के लिए पहले हम प्रत्येक संख्या का अभाज्य गुणनखंडन करते हैं। तब हम उन सब विभिन्न अभाज्य गुणन को उतनी बार लेकर जितनी बार वह उनमें से किसी संख्या के अभाज्य गुणनखंडन में अधिक-से-अधिक सम्मिलित है, गुणा कर लेते हैं।

उदाहरण–3 : 16, 24, 36 का ल.स. ज्ञात करें।

हल : 16 = 2 x 2 x 2 x 2 2 चार बार

24 = 2 x 2 x 2 x 3 2 तीन बार, 3 एक बार

36 = 2 x 2 x 3 x 3 2 दो बार, 3 दो बार

ल.स. = इनमें सबसे अधिक बार आए अभाज्य गुणनखंडों का गुणनफल

= 2 x 2 x 2 x 2 x 3 x 3 = 144

प्रश्नावली – 3.5

1. निम्नलिखित का ल.स. अभाज्य गुणनखंडन विधि से करें–

(a)	16, 36	(b)	14, 28	(c)	32, 36
(d)	50, 60	(e)	160, 120	(f)	32, 42
(g)	15, 18, 21	(h)	24, 32, 36	(i)	9, 12, 18
(j)	9, 12, 18, 21	(k)	12, 16, 24, 30		

आइए ल.स. निकालने की एक अन्य विधि पर विचार करते हैं, जिसे भाग विधि कहते हैं।

उदाहरण–1

16, 24 और 36 का ल.स. भाग विधि से ज्ञात करें।

हल :

2	16, 24, 36
2	8, 12, 18
2	4, 6, 9
3	2, 3, 9
	2, 1, 3

ल.स. = 2 x 2 x 2 x 3 x 2 x 3 = 144

प्रक्रिया

1. सर्वप्रथम इन संख्याओं में सबसे छोटी अभाज्य संख्या से भाग करते हैं और हम यह भी देखते हैं कि दी गई संख्याओं में कम-से-कम दो संख्याओं में भाग लगे अन्यथा अन्य दूसरी वांछित अभाज्य संख्या से भाग करेंगे, जो संख्या उस वांछित संख्या से पूरी-पूरी विभाजित होती है, उसका भागफल उसके नीचे लिखते जाते हैं और जो संख्या उस वांछित संख्या से विभाजित नहीं होती है, उस संख्या को उसी के नीचे ही वैसा-का-वैसा रख दिया जाता है।
2. यह तब तक जारी रखते हैं जब तक कि कम-से-कम दो संख्या उससे कटती रहें।
3. जब उस वांछित अभाज्य संख्या से भाग नहीं लगे तब दूसरी वांछित अभाज्य संख्या लेते हैं और ऊपर की तरह की प्रक्रिया अपनाते हैं, यही क्रिया तब तक करते रहते हैं, जब तक कि संख्या पूरी तरह विभाज्य न हो जाय। जब हम आश्वस्त हो जाएँ कि

अब संख्याएँ किसी भी वांछित अभाज्य संख्या से विभाज्य नहीं होती है तब अंत में सभी वांछित अभाज्य संख्याओं का गुणनफल प्राप्त करते हैं और यही गुणनफल उन संख्याओं का अभीष्ट ल.स. होता है।

उदाहरण 2 :

वह छोटी-से-छोटी संख्या ज्ञात करें जिसे 15, 18, 24, 36 से भाग देने पर प्रत्येक दशा में 4 शेष बचे।

हल :

2	15, 18, 24, 36
2	15, 9, 12, 18
3	15, 9, 6, 9
3	5, 3, 2, 3
5	5, 1, 2, 1
2	1, 1, 2, 1
	1, 1, 1, 1

ल.स. = 2 x 2 x 3 x 3 x 5 x 2 = 360

अतः अभीष्ट सं. = 360 + 4 = 364

म.स. (HCF) तथा ल.स. (LCM) के गुण

1. दी हुई संख्याओं का म.स. उन संख्याओं में किसी से भी बड़ा नहीं होता।
2. दी हुई संख्याओं का ल.स. उनमें से किसी भी संख्या से छोटा नहीं होता।
3. दो सह-अभाज्य (Co-prime numbers) संख्याओं का म.स. 1 होता है।
4. स्पष्टतया, दो या अधिक सह-अभाज्य संख्याओं का ल.स. उन सब का गुणनफल होता है।
5. यदि कोई संख्या मान लें a किसी दूसरी संख्या, मान ले b का गुणनखंड है तो a और b का म.स. a तथा उनका ल.स. b होता है।
6. दो या अधिक संख्याओं का म.स. उन संख्याओं में प्रत्येक को पूर्ण विभाजित करता है और प्रत्येक दी हुई संख्या अपने ल.स. को पूर्ण विभाजित करती है। इसलिए इनका म.स. उनके ल.स. का गुणनखंड होता है।

म.स. और ल.स. में संबंध

एक उदाहरण लेते हैं– हम दो संख्याएँ 48 और 60 लें और उसका म.स. और ल.स. निकालें।

48 और 60 का म.स. = 12

48 और 60 का ल.स. = 240

म.स. और ल.स. का गुणनफल = 12 x 240 = 2880

दी हुई संख्याओं 48 और 60 का गुणनफल = 48 x 60 = 2880

अब एक और संख्या युग्म 24 और 36 पर विचार करें।

24 और 36 का म.स. = 12

24 और 36 का ल.स. = 72

म.स. और ल.स. का गुणनफल = 12 x 72 = 864

संख्याएँ 24 और 36 का गुणनफल = 24 x 36 = 864

प्रत्येक दशा में हम देखते हैं कि म.स. और ल.स. का गुणनफल दोनों संख्याओं के गुणनफल के बराबर है अर्थात् **म.स. x ल.स. = पहली संख्या x दूसरी संख्या**

इससे निकले सूत्र नीचे दिए जाते हैं : –

$$\text{म.स.} = \frac{\text{पहली संख्या} \times \text{दूसरी संख्या}}{\text{ल.स.}}$$

$$\text{ल.स.} = \frac{\text{पहली संख्या} \times \text{दूसरी संख्या}}{\text{म.स.}}$$

$$\text{पहली संख्या} = \frac{\text{म.स.} \times \text{ल.स.}}{\text{दूसरी संख्या}}$$

$$\text{दूसरी संख्या} = \frac{\text{म.स.} \times \text{ल.स.}}{\text{पहली संख्या}}$$

उदाहरण–1 : दो संख्याओं का ल.स. 72 और म.स. 12 है तथा एक संख्या 36 है तो दूसरी संख्या बताएँ।

हल : म.स. x ल.स. = पहली संख्या x दूसरी संख्या

12 x 72 = 36 x दूसरी संख्या

$$\text{दूसरी संख्या} = \frac{{}^{2}\cancel{72}\times 12}{\cancel{36}} = 2 \times 12 = 24$$

उदाहरण–2 : किसी दिन, दिल्ली से मेरठ की बसें 40 मिनट के अन्तराल से और मेरठ से दिल्ली की बसें 45 मिनट के अन्तराल से चलती हैं। यदि विपरीत दिशा से आने वाली दो बसें किसी विशेष पुल से 10:15 सुबह में गुजरती हों तो वह जल्दी-से-जल्दी उसके बाद उस पुल से किस समय गुजरेंगी।

हल : जल्दी-से-जल्दी जिस समय वे बसें मिलेंगी वह 40 और 45 का ल.स. (मिनटों में) 10:15 सुबह में जोड़ने पर प्राप्त होंगे।

40 और 45 का ल.स. = 360

इसलिए, दोनों बसें उस पुल से दोबारा 360 मिनट बाद एक साथ गुजरेंगी अर्थात् 10:15 सुबह के 6 घंटे बाद।

अतः दोनों बसें फिर एक साथ उस पुल से 4:15 शाम में गुजरेंगी।

प्रश्नावली – 3.6

1. निम्न संख्याओं का ल.स. भाग विधि द्वारा ज्ञात करें–

(i)	18, 28	(ii)	32, 40	(iii)	24, 36
(iv)	12, 36, 48	(v)	25, 20, 15, 45	(vi)	8, 5
(vii)	6, 15, 18, 30, 36	(viii)	180, 384, 144		
(ix)	112, 168, 266	(x)	240, 420, 660		

2. नीचे दिए गये प्रत्येक संख्या युग्म के लिए सिद्ध करें कि उनका गुणनफल उनके म.स. और ल.स. के गुणनफल के समान (बराबर) है–

(i) 24, 34 (ii) 36, 42 (iii) 25, 40 (iv) 15, 45

3. दो संख्याओं का म.स. 6 और ल.स. 36 तथा एक संख्या 18 तो दूसरी संख्या ज्ञात करें।

4. दो संख्याओं का म.स. 16 और उनका गुणनफल 6400 है। उसका ल.स. ज्ञात करें।

5. दो संख्याओं का म.स. और ल.स. क्रमशः 13 और 1989 है। यदि उनमें से एक संख्या 117 हो तो दूसरी संख्या ज्ञात करें।

6. वह छोटी-से-छोटी संख्या ज्ञात करें जिसको 25, 40 और 60 से भाग करने पर 7 शेष बचे।

7. तीन व्यक्ति एक सुबह सैर को निकले। उनकी पग दूरी क्रमशः 80 से.मी. 85 से.मी. तथा 90 से.मी. है। ज्ञात करें कि चलने के स्थान से कितनी दूरी पर उनके पग फिर एक साथ पड़ेंगे।

8. 10000 के निकटतम वह संख्या ज्ञात करें जो 2, 3, 4, 5, 6 और 7 से पूरी-पूरी विभाजित हो सके।

9. 100000 के निकटतम उससे बड़ी संख्या ज्ञात करें जो 8, 15 और 21 से पूरी-पूरी विभाजित हो सके।

10. एक सड़क के साथ-साथ तार के खम्भे 220 मीटर की दूरी पर लगे हैं और उसी सड़क के साथ-साथ पत्थर के ढेर 300 मीटर की समान दूरी पर लगे हैं। यदि पहले ढेर पहले खम्भे के साथ ही है तो उससे कितनी दूरी पर दूसरी ढेर और खम्भे के एक साथ लगी होगी?

टिप्पणी : 1729 एक ऐसी लघुतम संख्या है, जिन्हें दो घनों के योग के रूप में दो विभिन्न ढंगों से व्यक्त कर सकते हैं। जैसे एक 12^3+1^3 और दूसरा $10^3 + 9^3$। इस संख्या (1729) का पता हमारे गणितज्ञ रामानुजन ने किया था, जिसे रामानुजन संख्या कहते हैं।