

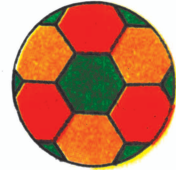
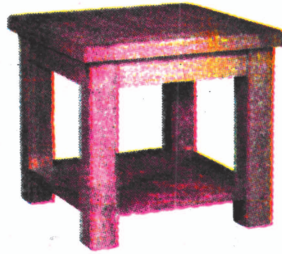
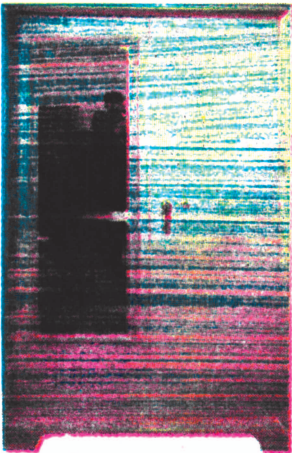
अध्याय-5

आधारभूत ज्यामितीय जानकारीयों

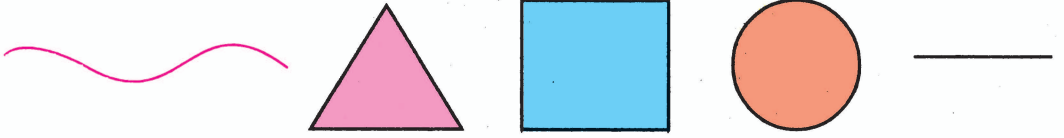
भूमिका

प्राचीनकाल से ही हमारे ऋषि-मुनियों ने विभिन्न आकृतियों के यज्ञ कुण्डों का निर्माण किया। आर्यभट्ट, युक्लिड तथा उमर खैय्याम आदि गणितज्ञों ने भी रैखिक आकृतियों के गुण, आकार तथा एक दूसरे के साथ संबंधों का अध्ययन किया है। ज्यामिति शब्द की उत्पत्ति यूनानी शब्द जिओमीट्रोन से हुई है, जियो (Geo) का अर्थ है 'भूमि' और मीट्रोन का अर्थ है 'मापना'। अतः इसका अर्थ हुआ 'भूमि का मापन'। आज कला, वास्तुकला, इंजीनियरिंग, मापन, कपड़ों के डिजाइन आदि में ज्यामिति के ज्ञान का प्रभाव देखा जा सकता है। वस्तुओं के आकार में, चीजों के डिजाइन में और ढाँचों में ज्यामितीय आकारों को देखा जा सकता है।

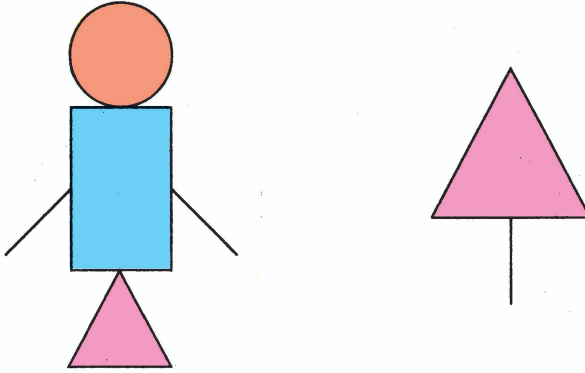
नीचे दी गई वस्तुओं के चित्र को देखिए और इनमें आयत, वर्ग, वृत्त, त्रिभुज आदि जैसे ज्यामितीय आकारों को ढूँढ़िए।



कुछ करें

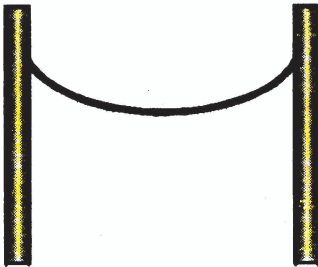


इन आकृतियों की सहायता से कुछ चित्र बनाइए। जैसे—

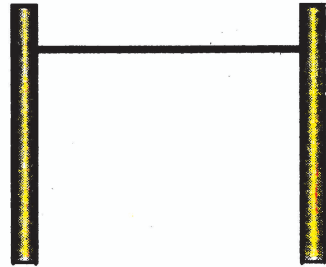


प्रकृति में दिखाई देने वाली विभिन्न प्रकार की वस्तुओं का जब हम रेखाचित्र बनाते हैं तो इसमें हमें सीधी एवं घुमावदार रेखाओं का प्रयोग करना पड़ता है। इन आकृतियों को हम **रैखिक आकृति** कहते हैं।

नीचे के चित्र को ध्यान से देखिए तथा बताइए कि कौन-सी रेखा आपको घुमावदार रेखा लगती है तथा कौन-सी सीधी रेखा?



चित्र 1



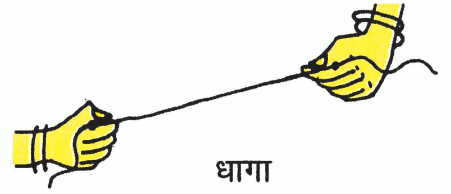
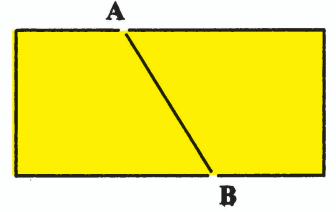
चित्र 2



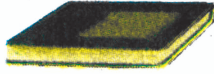
यदि आपको वृत्त और चौकोर का रेखाचित्र खींचने को कहा जाए तो आप वृत्त कैसी रेखा से बनाएँगे? इसी प्रकार एक चौकोर या वर्ग बनाने के लिए आप कैसी रेखा का इस्तेमाल करेंगे? सीधी रेखा को सरल रेखा तथा घुमावदार रेखा को वक्र रेखा कहते हैं।

5.1 रेखाखंड (Line Segment)

अपनी कॉपी का कागज लीजिए तथा उसको मोड़िए और फिर उसे खोल लीजिए। आपको कागज के टुकड़े पर जो निशान दिखाई देता है वह आपको एक रेखाखंड का एहसास कराता है। इसके दो अंत बिन्दु A और B है। इसी प्रकार पुस्तक का किनारा रेखाखंड को निरूपित करता है।



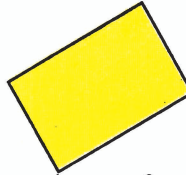
रेखाखंड के कुछ उदाहरण इन चित्रों में हैं—



पुस्तक



ट्यूबलाइट



पोस्टकार्ड

स्वयं कीजिए

1. आप अपने आस-पास से रेखाखंड के कुछ उदाहरण ढूँढ़िए तथा उनके नाम लिखिए।
2. चित्र को ध्यान से देखिए। बिन्दु A पर एक चूहा है तथा बिन्दु B पर रोटी का एक टुकड़ा। चूहा चार रास्तों से उस रोटी तक पहुँच सकता है। आपको यह बताना है कि चूहा किस रास्ते से सबसे पहले रोटी तक पहुँचेगा और क्यों?



आपने देखा कि तीसरे रास्ते से चूहा सबसे पहले रोटी तक पहुँचेगा। यह AB के बीच सबसे छोटी दूरी है। हम कह सकते हैं कि दो बिन्दु A और B के बीच की सबसे छोटी दूरी AB रेखाखंड को दर्शाती है। इसे \overline{AB} या \overline{BA} से व्यक्त किया जाता है। बिन्दु A तथा B इस रेखाखंड के अंत बिन्दु हैं।

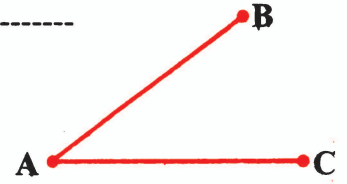
कुछ करें

- (1) रेखाखंडों के नाम लिखिए—

X _____ Y

M _____ N

- (2) दी गई आकृति में रेखाखंडों के नाम बताएँ। क्या A प्रत्येक रेखाखंड का एक अंत बिंदु है?

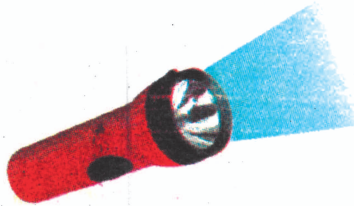


किरण (Ray)

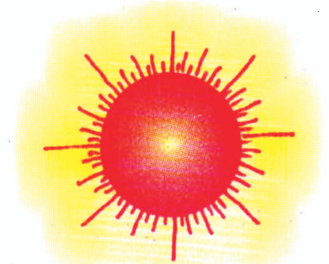
कल्पना कीजिए कि AB रेखाखंड को B बिन्दु से आगे एक दिशा में बिना किसी अंत के आगे बढ़ाया गया है। यह एक किरण है। किरण के कुछ उदाहरण निम्न हो सकते हैं—



मोमबत्ती से निकली किरणें



टार्च से निकली प्रकाश की किरणें

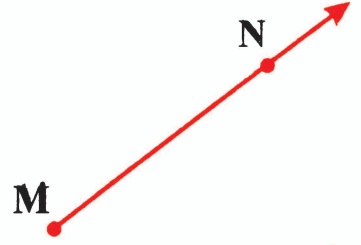


सूर्य की किरणें

किरण एक बिन्दु से आरम्भ होती है तथा एक दिशा में ही बिना किसी अंत के बढ़ती जाती है। किरण जिस बिन्दु से आरम्भ होती है, वह उसका 'प्रारम्भिक बिन्दु' कहलाता है।



दाईं ओर किरण की आकृति दी हुई है। इसका प्रारम्भिक बिन्दु M है। N इस किरण पर स्थित कोई अन्य बिन्दु है। इस किरण को हम \overrightarrow{MN} से व्यक्त करते हैं।



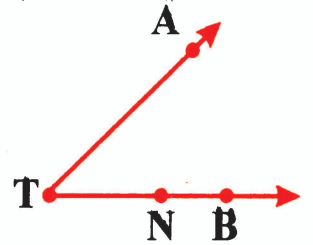
सोचें और बताएँ

यदि \overrightarrow{AB} एक किरण है तो

- (क) इसका प्रारम्भिक बिन्दु क्या है?
- (ख) क्या बिन्दु B इसी किरण पर स्थित है?
- (ग) क्या हम कह सकते हैं कि B इस किरण का प्रारम्भिक बिन्दु है?

कुछ करें

- (1) आकृति में दी गई किरणों के नाम लिखिए।
- (2) क्या T आरम्भिक बिन्दु है?
- (3) क्या N आरम्भिक बिन्दु है?



रेखा (Line)

जब रेखाखंड \overline{MN} को N से आगे तथा दूसरी ओर M से आगे बिना किसी अंत के लगातार बढ़ाते जाएँ तो क्या होगा?

ऐसा करने पर नयी आकृति का न तो कोई प्रारम्भ होगा न अंत। इससे हमें एक रेखा का उदाहरण प्राप्त होगा। रेखा का न तो कोई आद्य (प्रारम्भिक) बिन्दु होता है और न ही कोई अन्त बिन्दु। इस पर असंख्य बिन्दु होते हैं, परंतु रेखा की स्थिति और झुकाव निश्चित करने हेतु हमें कम-से-कम दो बिन्दुओं का निर्धारण करना पड़ता है जो उस रेखा के गमन की दिशा का निर्धारण करते हैं। रेखा को अंग्रेजी में छोटे अक्षरों से भी व्यक्त करते हैं जैसे— रेखा \overline{MN} को l से व्यक्त किया जा सकता है।



\overleftrightarrow{MN} - MN रेखा है, जो दोनों तरफ बढ़ती है।

\overrightarrow{MN} - MN किरण है जो N दिशा की ओर बढ़ती है।

\overline{MN} - MN रेखाखंड है जिसका एक सिरा M और दूसरा N है

क्या आप कह सकते हैं कि किरण रेखा का ही एक भाग है?

कुछ करें

सही पर (✓) का निशान लगाएँ-

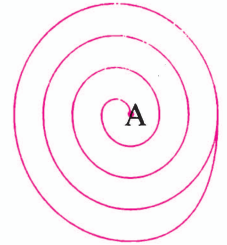
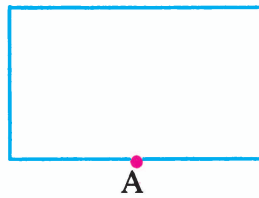
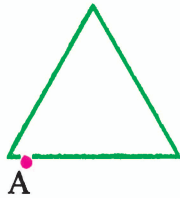
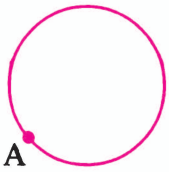
एक रेखा में अंत बिन्दु होते हैं : एक/दो/कोई नहीं

एक रेखाखंड में अंत बिन्दु होते हैं : एक/दो/कोई नहीं

एक किरण में अंत बिन्दु होते हैं : एक/दो/कोई नहीं

5.2 खुली एवं बंद आकृति

आप अपनी कॉपी पर निम्न आकृतियाँ बनाएँ-

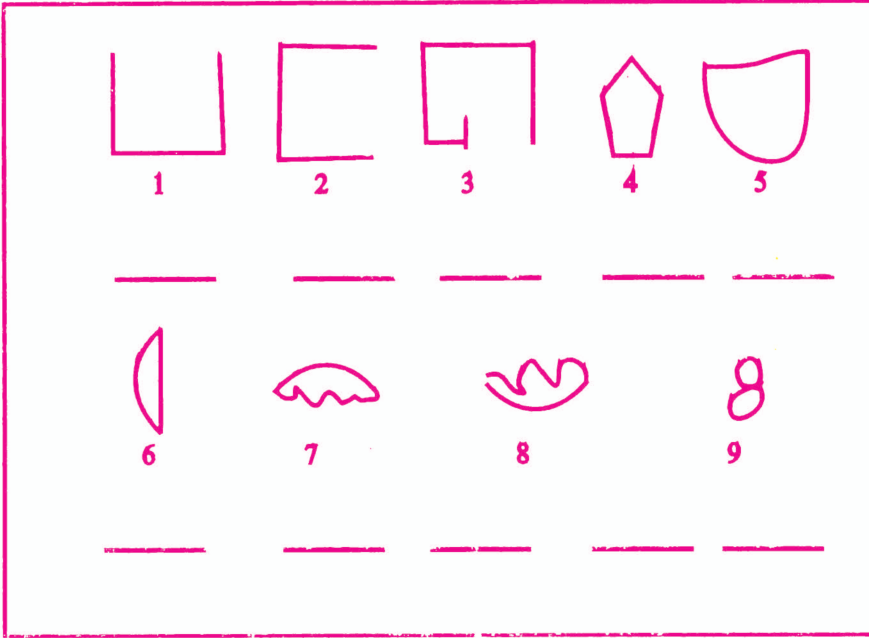


ऊपर दी हुई आकृतियों में बिन्दु A पर अपनी पेंसिल रख आकृति की रेखा के सहारे चलना आरम्भ करें। जिन आकृतियों में जिस बिंदु से आरम्भ किया पुनः उसी बिन्दु पर पहुँच जाएँ ऐसी आकृतियाँ बंद आकृतियाँ हैं। जिन आकृतियों को बनाते समय प्रारंभिक बिन्दु और अंतिम बिन्दु अलग थे, वे आकृतियाँ खुली आकृतियाँ कहलाती हैं। जैसे- पहली तीन आकृतियों में किसी भी बिन्दु से प्रारम्भ करने पर अंत में आप किसी भी बिन्दु पर दोबारा चलें तो क्या पुनः प्रारंभिक बिन्दु पर पहुँच जाते हैं? इसकी जाँच कीजिए।



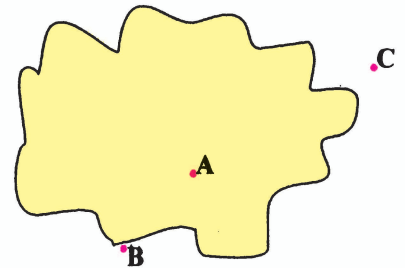
सोचें और बताएँ

कौन-सी आकृति बंद है और कौन खुली?



5.3 एक आकृति में स्थितियाँ

वक्र रेखा की सहायता से एक बंद आकृति बनाएँ तथा उस आकृति के अंदर एक बिन्दु A, वक्र रेखा की परिसीमा पर एक बिन्दु B तथा बंद आकृति के बाहर एक बिन्दु C लें।

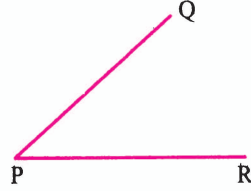


आपके द्वारा बनाई गई आकृति का एक नमूना दाईं ओर दिखाया गया है। यहाँ बिन्दु A वक्र अभ्यंतर में यानी अंदर के भाग में, बिन्दु B वक्र की परिसीमा यानी वक्र के सतह पर तथा C बिन्दु वक्र के बहिर्भाग यानी बाहर के भाग में स्थित है। वक्र के अभ्यंतर तथा उसकी परिसीमा को मिलाकर वक्र का क्षेत्र कहा जाता है।



प्रश्नावली - 5.1

(1) नीचे दिए गए रेखाखंड का नाम बताइए-

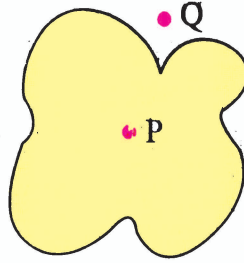


(2) किरण के स्रोतों के उदाहरण बताइए।

(3) निम्नलिखित को अक्षर संकेत में दर्शाइए-

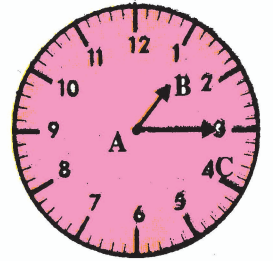
रेखाखंड, किरण, रेखा

(4) बिन्दु P और Q की स्थिति बताइए कि ये किस भाग में हैं?



5.4 कोण

जब दो सरल रेखाएँ अथवा किरणें एक बिन्दु पर मिलती अथवा काटती हैं तो उन रेखाओं के बीच के घुमाव अथवा झुकाव को कोण कहते हैं।



उदाहरण के लिए हम घड़ी के घंटा एवं मिनट की सुइयों को

दो किरण \overrightarrow{AB} तथा \overrightarrow{AC} मानें, तो हम देखते हैं कि इन दोनों किरणों में एक उभयनिष्ठ बिन्दु A है तथा किरण \overrightarrow{AB} एवं \overrightarrow{AC} एक कोण बना रही है। A इस कोण का प्रारम्भिक बिन्दु है जिसे हम कोण का शीर्ष कहते हैं तथा \overrightarrow{AB} एवं \overrightarrow{AC} इस कोण को बनाने वाली भुजाएँ हैं। इस प्रकार एक प्रारम्भिक/आद्य बिन्दु से खींची गई दो किरणों से बनने वाली आकृति कोण है।

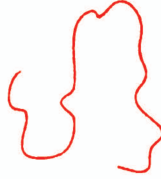


कुछ करें

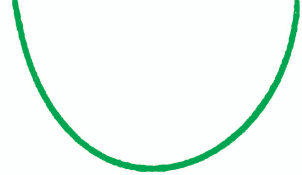
(1) बताइए किस चित्र में कोण दिख रहा है?



1



2

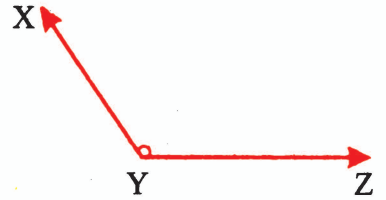


3

(2) चित्र देखकर नाम बताइए—

शीर्ष _____

कोण बनाने वाली भुजाएँ _____



कोण का नाम पढ़ते समय शीर्ष का स्थान ठीक बीच में रखते हैं। यहाँ दिए गए कोण का नाम कोण AOB या कोण BOA है।

दोनों नामों में शीर्ष 'O' बीच में है। इसमें OA की दिशा से OB की दिशा जाने में कितना घुमाव हुआ है यह कोण AOB बताता है।

कोण को संकेत में \angle लिखते हैं जब केवल एक ही कोण हो तब $\angle AOB$ या $\angle BOA$ के लिए $\angle O$ भी उपयोग में लाया जा सकता है। अतः केवल शीर्ष द्वारा भी दर्शाया जा सकता है।

संलग्न आकृति को देखिए। इस कोण का क्या नाम है? क्या हम इसे $\angle P$ कहेंगे?

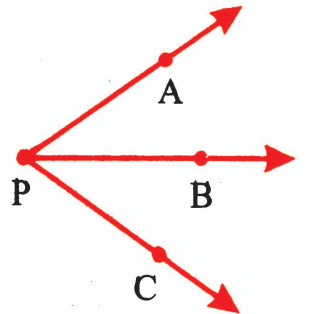
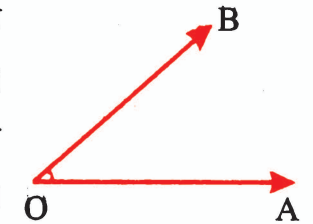
$\angle P$ से हमारा क्या तात्पर्य होगा? इसे $\angle P$ कहने से क्या भ्रम हो सकता है?

क्या यहाँ पर एक कोण को केवल उसके शीर्ष द्वारा नामांकित करना सहायक होगा? क्यों?

$\angle P$ का अर्थ यहाँ $\angle APB$ या $\angle CPB$ या $\angle APC$ हो सकता है।

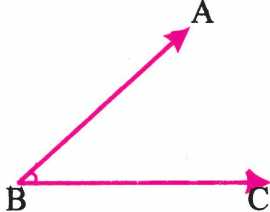
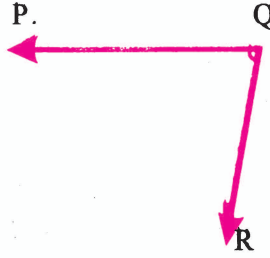
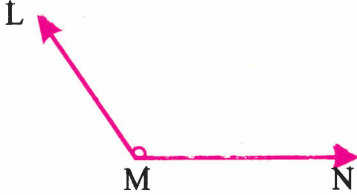
इसलिए यहाँ और अधिक सूचना की आवश्यकता है। ध्यान दीजिए कि कोण

को लिखते समय उसके शीर्ष के अक्षर को सदैव बीच में लिखा जाता है।



प्रश्नावली - 5.2

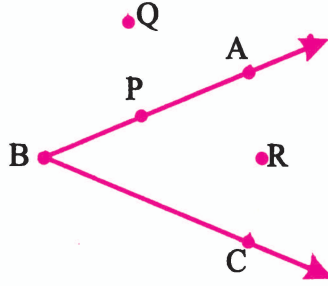
1. नीचे दी गई तालिका को पूरा कीजिए-

| कोण | शीर्ष | कोण बनाने वाली भुजाएँ | कोण का नाम |
|---|-------|-----------------------|------------|
|  | | | |
|  | | | |
|  | | | |

2 नीचे की आकृतियों में बनने वाले कोणों की संख्या बताइए-



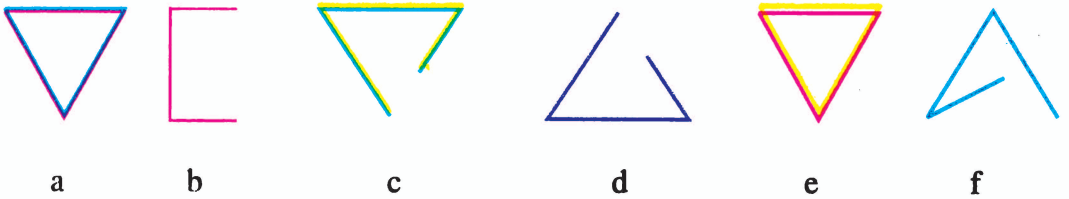
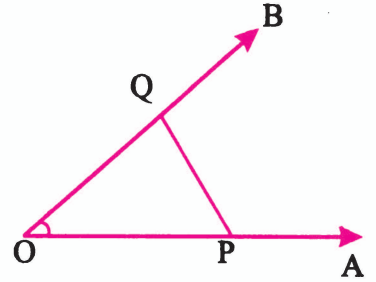
3. चित्र देखकर बताइए कि बिन्दु P, Q तथा R कोण के किस भाग में स्थित हैं?



5.5 त्रिभुज

क्रियाकलाप-2 : एक कोण AOB की रचना कीजिए। अब इस कोण को बनाने वाली भुजा OA पर एक बिन्दु P तथा दूसरी भुजा OB पर एक बिन्दु Q लीजिए। बिन्दु P और Q को स्केल से मिलाइए। बताइए कि बनने वाली आकृति बंद आकृति है या खुली? इस आकृति में कुल कितनी भुजाएँ हैं?

स्पष्टतः आपका उत्तर होगा बनने वाली आकृति OPQ एक बंद आकृति है तथा इसमें कुल तीन भुजाएँ OP, PQ तथा QO हैं। आइए कुछ आकृतियों पर विचार करें।



ये सभी आकृतियाँ तीन भुजाओं से बनी हैं तथा आकृति a एवं e बंद आकृतियाँ हैं। ये तीन रेखाखण्डों से बनी बंद आकृतियाँ हैं। अतः इन्हें त्रिभुज कहते हैं।

क्रियाकलाप-3 : आगे प्रत्येक चित्र में तीन-तीन बिन्दु दिए गए हैं। क्या इन तीन बिन्दुओं को रेखाखंड द्वारा मिलाकर आप त्रिभुज बना सकते हैं?





चित्र-1



चित्र-2



चित्र-3

आप चित्र-1 और चित्र-2 के बिन्दुओं को आपस में मिलाकर त्रिभुज तो बना लेते हैं परन्तु चित्र-3 में तीनों बिन्दु एक सरल रेखा में है जिन्हें जोड़ा जाए तो एक सरल रेखा हमें प्राप्त होती है। अतः तीन असंरेखीय बिन्दुओं को एक दूसरे से मिलाने पर जो बंद आकृति बनती है वही त्रिभुज है।

5.5.1 त्रिभुज के भाग

त्रिभुज ABC में कुल कितने कोण शीर्ष और भुजाएँ हैं? नाम बताइए।

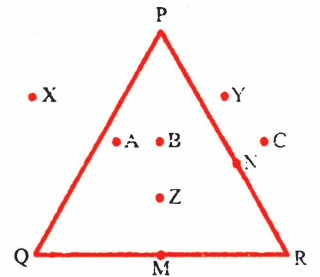
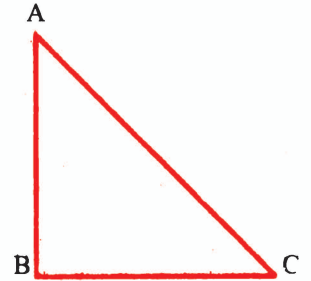
यहाँ कुल 3 कोण हैं $\angle ABC$, $\angle BCA$ तथा $\angle CAB$ और शीर्ष भी तीन B, C तथा A हैं।

और AB, BC, CA त्रिभुज ABC की तीन भुजाएँ होंगी। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि एक त्रिभुज में -

- 3 शीर्ष होते हैं।
- 3 भुजाएँ होती हैं।
- 3 कोण होते हैं।

5.5.2 त्रिभुज का अन्तःभाग तथा बहिर्भाग

किसी तल पर बने त्रिभुज में बिन्दु तीन भागों में रखे जा सकते हैं। पहला भाग जो त्रिभुज के भीतर है, त्रिभुज का अन्तःभाग। दूसरा भाग जो त्रिभुज पर है परिसीमा भाग और तीसरा जो त्रिभुज के बाहर स्थित है, त्रिभुज का बहिर्भाग कहा जाता है। यहाँ A, B तथा Z त्रिभुज के अन्तःभाग में हैं, M, N बिन्दु त्रिभुज पर हैं तथा बिन्दु X, Y तथा C त्रिभुज के बहिर्भाग में स्थित हैं।

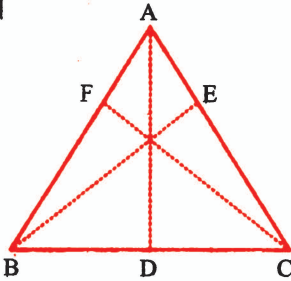


कुछ करें

- (1) त्रिभुज ABC बनाकर उसके अन्तःभाग को छायांकित करें।
- (2) बिन्दु P और Q को इस प्रकार दर्शाएँ कि वे उसके बहिर्भाग में रहें।
- (3) बिन्दु M को त्रिभुज पर दर्शाइए।

5.5.3 त्रिभुज के शीर्ष लंब एवं माध्यिका

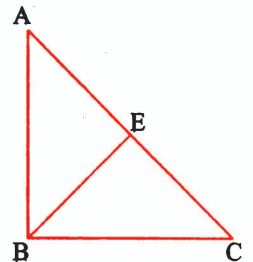
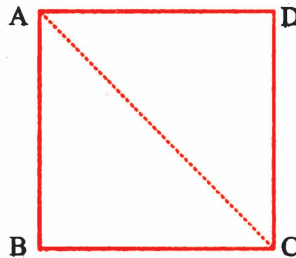
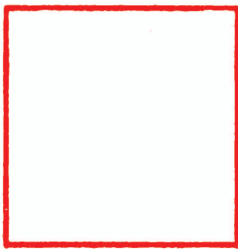
ABC एक त्रिभुज है जिसमें शीर्ष A से सामने की भुजा BC पर डाला गया लम्ब AD है। AD को शीर्षलम्ब भी कहते हैं। इसी प्रकार शीर्ष B से AC पर तथा शीर्ष C से AB पर शीर्ष लम्ब डाला गया है। यह तीनों त्रिभुज के शीर्ष लंब है। इनकी लम्बाई हर त्रिभुज में समान नहीं होती।



त्रिभुज में 3 शीर्ष लंब होते हैं जो एक ही बिन्दु पर गुजरते हैं, यह बिन्दु त्रिभुज का लम्ब केन्द्र कहलाता है।

क्रियाकलाप-4

कागज का वर्गाकार टुकड़ा लीजिए तथा उसके एक कोण को उसके सामने के कोण पर रखकर मोड़िए। इस मुड़ी हुए जगह से कागज को फाड़िए। अब आपको दो त्रिभुज प्राप्त होते हैं। कागज के बने त्रिभुज के शीर्षों को A, B, C और A, C, D नाम दीजिए। अब त्रिभुज के तीन शीर्षों में से एक शीर्ष C को उठाकर दूसरे शीर्ष A के ऊपर रखकर कागज को मोड़िए। इस प्रकार त्रिभुज की एक भुजा दो समान भागों में बँट जाएगी।



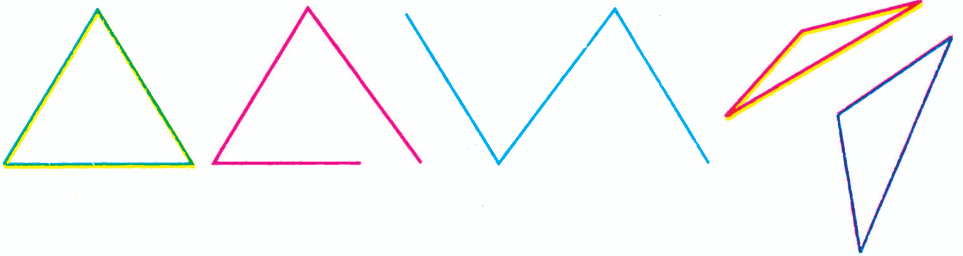
जो बिन्दु भुजा को दो भागों में बाँटता है उसे त्रिभुज के तीसरे शीर्ष B से जोड़ दें। इस प्रकार प्राप्त रेखा BE त्रिभुज ABC की माध्यिका कहलाती है। यह हम त्रिभुज की तीनों भुजाओं के साथ कर सकते हैं।

त्रिभुज की तीनों माध्यिकाएँ एक ही बिन्दु से गुजरती हैं तथा यह बिन्दु त्रिभुज का केन्द्रक कहलाता है।

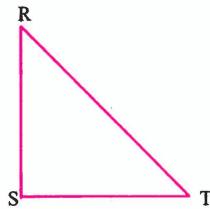
अब आप अलग-अलग आकार के त्रिभुज बनाइए तथा तीनों भुजाओं की माध्यिका बनाकर केन्द्रक चिह्नित कीजिए।

प्रश्नावली - 5.3

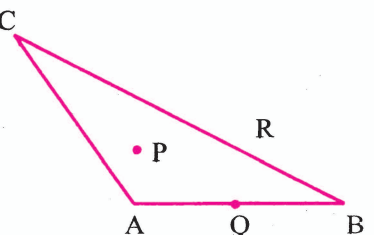
(1) दिए गए चित्र में कौन त्रिभुज है और क्यों?



- (2) त्रिभुज में कितने शीर्ष, कितनी भुजाएँ एवं कितने कोण होते हैं?
 (3) त्रिभुज RST में शीर्ष, कोण और भुजा के नाम लिखिए।



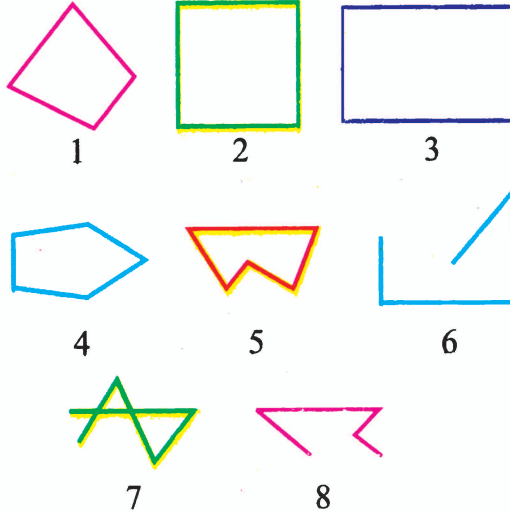
- (4) आकृति में त्रिभुज CAB के अन्तःभाग, बहिर्भाग और त्रिभुज पर स्थित बिन्दु बताइए।



- (5) (i) त्रिभुज के शीर्ष से भुजा पर डाला गया लंब त्रिभुज की _____ कहलाती है।
- (ii) त्रिभुज के शीर्ष से भुजा के मध्य बिन्दु को मिलाने वाली रेखा त्रिभुज की _____ कहलाती है।
- (iii) त्रिभुज में माध्यिकाएँ जिस बिन्दु पर काटती हैं उसे _____ कहते हैं।

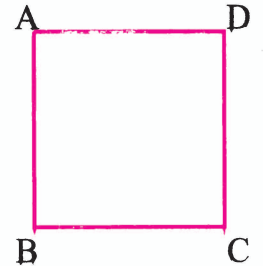
5.6 चतुर्भुज

अपने आस-पास हम बहुत सारी चौकोर आकृतियाँ जैसे पुस्तक-कॉपी का एक पेज, खेल मैदान, पतंग आदि देखते हैं। नीचे बनी आकृतियों में से ऐसी ही चौकोर आकृतियों को छाँटिए—



आपके द्वारा छाँटी गई आकृतियाँ 1, 2 और 3 चतुर्भुज हैं क्योंकि ये चार भुजाओं से बनी बंद आकृति हैं। चतुर्भुज चार भुजाओं से घिरी एक बंद आकृति है।

चतुर्भुज ABCD को देखिए। इसमें चार कोण हैं— $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle DAB$ तथा $\angle CDA$ । इसमें B, C, D तथा A चार शीर्ष हैं तथा चार भुजाएँ AB, BC, CD तथा DA हैं।

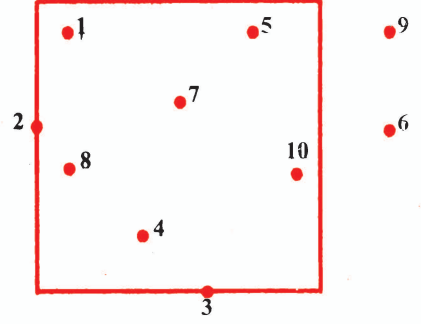


क्रियाकलाप-5

एक चतुर्भुजाकार खेल के मैदान में कुछ खिलाड़ी खेल रहे हैं। यहाँ खिलाड़ियों को बिन्दुओं से दिखाया गया है। आपको बताना है—



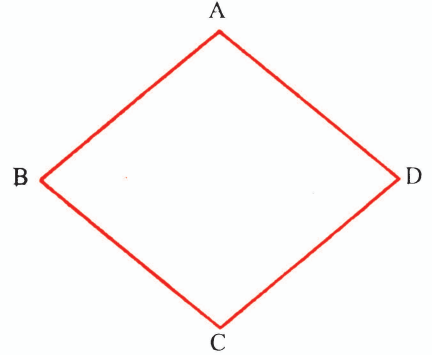
- (क) कौन-कौन से खिलाड़ी मैदान के अंदर हैं?
- (ख) कौन-कौन से खिलाड़ी मैदान के बाहर हैं?
- (ग) कौन-कौन से खिलाड़ी मैदान की सीमा रेखा पर हैं?



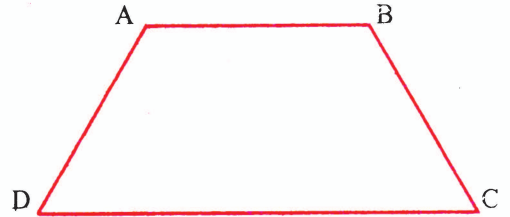
यहाँ खिलाड़ी संख्या 1, 4, 5, 7, 8, 10 अन्तःभाग में तथा खिलाड़ी संख्या 6, 9 बहिर्भाग में और खिलाड़ी संख्या 2, 3 मैदान की सीमा पर हैं।

5.6.1 चतुर्भुज की भुजाएँ

चतुर्भुज की भुजा AB तथा BC दिए गए चतुर्भुज की दो संलग्न भुजाएँ हैं। यह दोनों भुजाएँ बिन्दु B पर मिलती हैं। ये चतुर्भुज की आसन्न भुजाएँ हैं। आसन्न भुजाएँ एक शीर्ष पर एक दूसरे को काटती हैं। चतुर्भुज ABCD की शेष आसन्न भुजाओं के नाम BC एवं CD, CD एवं DA तथा DA एवं AB हैं।

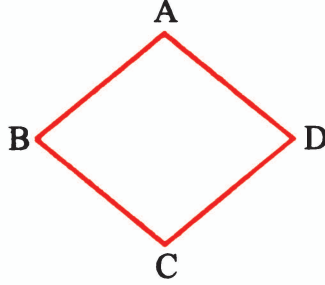


जब चतुर्भुज की भुजाएँ एक दूसरे को किसी बिन्दु पर नहीं काटें या एक दूसरे से नहीं मिलें तब वे सम्मुख भुजाएँ कहलाती हैं। यहाँ AB और CD सम्मुख भुजाएँ हैं। सोचें एक चतुर्भुज में सम्मुख भुजाओं के कितने जोड़े होंगे?

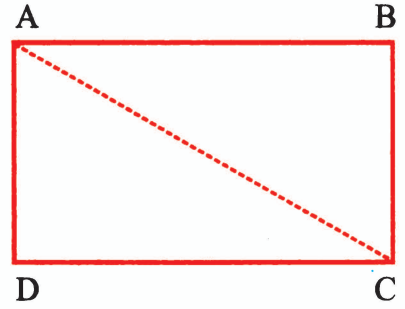
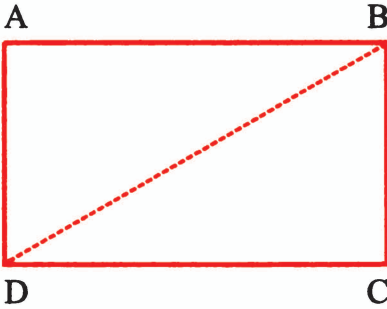


कुछ करें

दिए गए चतुर्भुज में आसन्न भुजाओं और सम्मुख भुजाओं के युग्म बताइए—



5.6.2 चतुर्भुज के विकर्ण



एक चतुर्भुज को दो त्रिभुजों में बाँटने के लिए B बिन्दु को D बिन्दु से या A बिन्दु को C बिन्दु मिलाते हैं। अर्थात् दो सम्मुख शीर्षों को एक रेखाखंड से मिलाने पर चतुर्भुज दो त्रिभुज में बँट जाता है। ये रेखाखंड चतुर्भुज के विकर्ण कहलाते हैं। अतः चतुर्भुज ABCD में दो विकर्ण AC तथा BD हैं।



प्रश्नावली - 5.4

- (1) एक चतुर्भुज बनाइए और उसमें भुजा, कोण एवं शीर्षों के नाम बताइए।
- (2) दिए गए चतुर्भुज में बिन्दु M बहिर्भाग में, बिन्दु N अन्तःभाग में तथा बिन्दु P को चतुर्भुज पर दशाईए।



- (3) दिए गए चतुर्भुज में आसन्न भुजाओं एवं सम्मुख भुजाओं के युग्म बताइए।



- (4) स्वयं से एक चतुर्भुज बनाइए और उसके विकर्ण खींचिए।

