अध्याय सत्रह

सांख्यिकी (Statistics)

7BFDDL

भूमिका

शाला में कक्षा सजावट का कार्यक्रम आयोजित होना था। कक्षा 7वीं के विद्यार्थी यह तय नहीं कर पा रहे थे कि कक्षा के अंदर दीवारों की पुताई किस रंग से कराई जाये। उनकी शाला में हल्का पीला, गुलाबी, हल्का हरा एवं आसमानी मात्र चार रंग ही उपलब्ध थे। कक्षा नायक के कहने पर सभी विद्यार्थियों ने अपना नाम एवं पसंदीदा रंग एक पन्ने पर लिख दिया। जो निम्नांकित सारणी में प्रदर्शित है:–

सारणी–1

क्र.	विद्यार्थी का नाम	रंग
1.	राजेश	हल्का पीला
2.	रूचि	गुलाबी
3.	मीना	हल्का पीला
4.	रहीम	आसमानी
5.	हमीदा	हल्का पीला
6.	जुली	हल्का हरा
7.	अनिता	हल्का हरा
8.	फ्रांसिस	आसमानी
9.	केशव	हल्का पीला
10.	बसंत	आसमानी
11.	शेखर	हल्का हरा
12.	रीता	गुलाबी
13.	सुनील	हल्का पीला
14.	अनामिका	हल्का पीला
15.	बलवन्त	गुलाबी
16.	रघु	हल्का पीला

इन सूचनाओं के आधार पर क्या आप यह निर्णय ले सकते हैं कि दीवार पर कौन–से रंग से पुताई करानी है? तभी रीता को एक तरीका सूझा। उसने बोर्ड पर रंगों के नाम लिखे तथा प्रत्येक रंग को पसंद करने वाले विद्यार्थी को अपनी पसन्द के रंग के सामने अपना नाम लिखने को कहा।

अब सूची इस प्रकार बनी:–

चित्र–17.1

सारणी–2

रंग	विद्यार्थियों के नाम
गुलाबी	रूचि, रीता, बलवन्त
हल्का पीला	राजेश, मीना, हमीदा, केशव, सुनील, अनामिका, रघु
हल्का हरा	जूली, अनिता, शेखर
आसमानी	रहीम, बसंत, फ्रांसिस

चूंकि हल्का पीला रंग पसंद करने वाले विद्यार्थियों की संख्या अधिक थी, इस कारण इसी रंग से पुताई कराने का निर्णय लिया गया।

दैनिक जीवन में क्या आपने निर्णय लेने के लिए कभी यह तरीका अपनाया है?

आप, अपनी कक्षा में त्रैमासिक परीक्षा में प्रत्येक विषय में 34% से अधिक और 34% से कम अंक प्राप्त करने वालों की सूची बनाइए। क्या इस आधार पर आप बता सकते हैं कि किस विषय का परीक्षाफल सबसे अच्छा है और किस विषय का सबसे खराब?

आँकड़े (Data)

कोई भी निर्णय लेते समय आपको कुछ न कुछ जानकारियों की आवश्यकता होती है। इन आवश्यक संख्यात्मक जानकारियों को ही आँकड़े कहते हैं।

माना, आपको अपनी कक्षा के विद्यार्थियों के पढ़ने के लिए एक समाचार पत्र खरीदना है। आप कौनसा समाचार पत्र खरीदेंगे, जिसे अधिक से अधिक विद्यार्थी पढ़ना पसंद करें? यह निर्णय आप कैसे लेंगे?

सभी विद्यार्थियों ने एक सारणी तैयार की जिसमें पसंद के समाचार पत्र के सामने सभी ने अपना–अपना नाम लिखा। फिर जिस समाचार पत्र को पसन्द करने वालों की संख्या सर्वाधिक है, उसे ही खरीदने का निर्णय लिया गया।

जूली सारणियों को बार–बार देख रही थी और सोच रही थी कि इन सारणियों में नाम लिखने का कोई मतलब ही नहीं है। हमें तो मात्र यह गिनना है कि चाही गई जानकारी के पक्ष में कितने छात्र हैं। नाम न लिखकर उसके स्थान पर किसी संकेत का भी उपयोग किया जा सकता है।

क्या आप जूली की सोच से सहमत हैं? क्या ऐसा कोई तरीका सोच सकते हैं जिसमें नाम के स्थान पर केवल संकेत चिन्ह का उपयोग करके ही गणना की जा सके?

बसंत ने एक सुझाव दिया कि क्यों न प्रत्येक नाम के स्थान पर एक–एक खड़ी लकीर का उपयोग किया जाए और अन्त में सभी खड़ी लकीरों की गिनती कर ली जाए। सभी विद्यार्थी इससे सहमत थे।

अनिता ने कहा ''चलो हम खेलों की लोकप्रियता का क्रम पता लगावें।'' अनिता ने बोर्ड में 4 खेलों के नाम लिखे और अपने–अपने पसंद के खेल के सामने प्रत्येक विद्यार्थी को एक खड़ी लकीर खींचने को कहा।

सारणी कुछ इस प्रकार बनी:–

सारणी–3

खेल का नाम	टेली चिन्ह (खड़ी लकीर)	विद्यार्थियों की संख्या
फुटबाल	|||	3
क्रिकेट	|||||||	7
वॉलीबाल	|	1
कबड्डी	|||||	5

परन्तु इस प्रकार की सारणी में ज्यादा खड़ी लकीरों को गिनने में असुविधा होती है, इसलिए जिस प्रकार से आपने छोटी कक्षाओं में गिनती सीखते वक्त दस–दस के बण्डल बनाए थे उसी प्रकार यदि पाँच–पाँच के बण्डल बना लें तो आपको गिनने में आसानी रहेगी। हम चार खड़ी लकीर खींचकर पाँचवे के लिए इन चारों लकीरों को काटते हुए एक तिरछी लकीर (दर्शाये अनुसार) खींचते हैं। जैसे 5 के लिए–

5 के लिए : 卌

19 के लिए : 卌 卌 卌 IIII

इससे गिनने में सरलता होती है।

उपरोक्त तालिका के अनुसार क्रिकेट पसंद करने वाले विद्यार्थियों की संख्या 卌 II अर्थात् 7 हैं। इसे ही **बारम्बारता** (Frequency) कहते हैं। प्रत्येक मान के लिए एक खड़ी लकीर खींचने की प्रक्रिया को **टैली** (Tally) लगाना कहते हैं तथा इस विधि को **टैली विधि** (Tally method) द्वारा **आंकड़ों का संकलन** (Collection of Data) कहते हैं एवं इससे प्राप्त सारणी को **बारम्बारता सारणी** (Frequency Table) कहते हैं।

आप भी इस विधि का उपयोग कर अपने आसपास के आंकड़ों को एकत्रित करने का प्रयास कीजिए।

उदाहरण–1 एक गांव के 20 घरों में बच्चों की संख्या इस प्रकार है:–

सारणी–4

मकान नं.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
बच्चों की संख्या	2	3	2	1	3	2	0	1	3	4	2	2	1	1
मकान नं.	15	16	17	18	19	20								
बच्चों की संख्या	2	4	3	2	0	3								

इन आँकड़ों के द्वारा टैली विधि का प्रयोग कर उपयुक्त बारम्बारता सारणी का निर्माण कीजिए?

हल प्रत्येक घर में बच्चों की संख्या, उनके लिए टेली चिन्ह तथा बारम्बारता के लिए कॉलम बनाते हैं तथा प्रत्येक मान के लिए उसके सामने टैली चिन्ह लगाते हैं। पाँचवे चिन्ह को सुविधा के लिए प्रारंभिक चार चिन्हों को काटते हुए तिरछा लगाते हैं।

सारणी – 5

बच्चों की संख्या	टैली चिन्ह	बारम्बारता
0	II	2
1	IIII	4
2	卌 II	7
3	卌	5
4	II	2

इस सारणी में आपने बच्चों की संख्या के लिए केवल शून्य से चार तक के अंकों को ही क्यों लिखा है ?

यदि इसे 1 से शुरू किया जाता तो क्या होता ?

यदि सारणी में बच्चों की संख्या 0,1,2,3,4,5,6,7 तक लिखते तो क्या होता ?

प्रश्नावली 17.1

1. किसी कक्षा में 20 छात्रों ने गणित की जाँच परीक्षा में 5 में से निम्न अंक प्राप्त किए–

   3 2 5 4 0 1 2 3 5 2 2 3 5

   4 1 0 3 2 3 4

   इन प्राप्तांकों को टैली विधि से सारणीबद्ध कीजिए।

2. 1 अप्रेल 2005 से 15 अप्रेल 2005 तक किसी शहर का अधिकतम दैनिक तापमान डिग्री सेल्सियस में इस प्रकार रहा 37.8, 37.8, 37.9, 38.0, 37.9, 37.9, 38.0, 38.1, 38.1, 38.2, 38.3, 38.3, 38.2, 38.1, 38.2

   प्रत्येक दिन के तापमान को टैली विधि से सारणीबद्ध कीजिए।

3. नीचे दिए गए सारणी में कक्षा 6वीं के छात्रों के परीक्षाफल श्रेणीवार दिए गए हैं। इनका अवलोकन कर, दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए:–

श्रेणी	**छात्रों की संख्या**
प्रथम श्रेणी	12
द्वितीय श्रेणी	14
तृतीय श्रेणी	10
अनुत्तीर्ण	04

(क) किस श्रेणी के छात्रों की संख्या सबसे अधिक है?

(ख) परीक्षा में बैठे छात्रों की कुल संख्या कितनी थी?

(ग) कुल कितने छात्र उत्तीर्ण हुए?

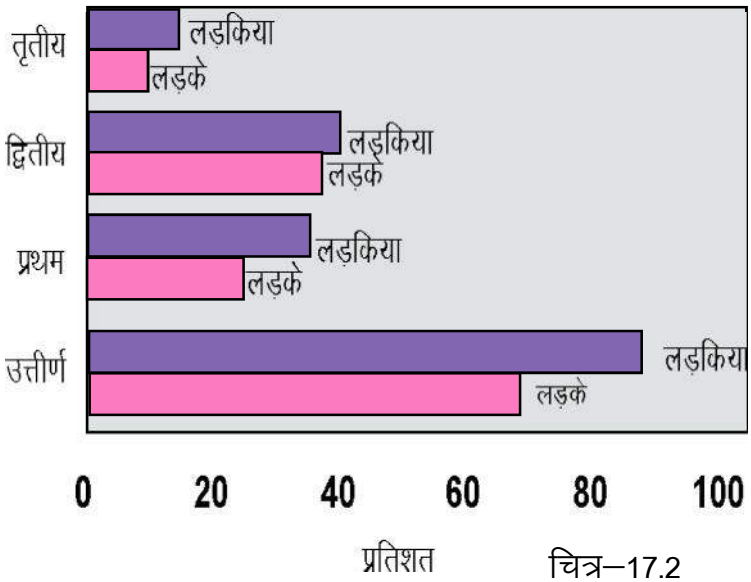
आँकड़ों का चित्रात्मक प्रदर्शन

राजेश आज का समाचार पत्र पढ़ रहा था, जिसमें लिखा था:–

''लड़कियों ने लड़कों से बाजी मारी''

इस वर्ष की 8वीं बोर्ड की परीक्षा में लड़कियाँ सभी क्षेत्रों में लड़कों से आगे रहीं।

राजेश चित्रों को देखकर सोचने लगा– ''यह तो आंकड़ों के प्रदर्शन का अच्छा तरीका है। इन चित्रों को देखकर बड़े आसानी से यह समझा जा सकता है कि छात्राओं का परीक्षाफल छात्रों से सभी प्रकार से अच्छा है।'' ऐसा ही कुछ हम जब प्रार्थना में लाइन बनाकर खड़े होते



चित्र–17.2

हैं, तब देखने को मिलता है। लाइनों की लम्बाई की सहायता से कक्षा के छात्र संख्या की तुलना की जा सकती है? राजेश ने अपने साथियों से कहा– ''क्यों न सारणी–3 में एकत्रित आँकड़ों की मदद से खेलों की लोकप्रियता को चित्र रूप में प्रदर्शित किया जाए?''

सारणी–3 में कुल विद्यार्थियों की संख्या 16 थी। इनमें से फुटबाल का खेल पसंद करने वाले 3, क्रिकेट पसंद करने वाले 7, वॉलीबॉल पसंद करने वाले 1, कबड्डी पसंद करने वाले 5, विद्यार्थी थे। इन्हें चित्र रूप में किस प्रकार प्रदर्शित किया जा सकता है?

जूली ने कहा, ''यदि हम प्रत्येक छात्र के लिए एक चित्र बनाएं, तो फुटबाल के आगे 3 चित्र, क्रिकेट के आगे 7 चित्र, वॉलीबॉल के आगे 1 और कबड्डी के आगे 5 चित्र बनेंगे–

फुटबाल

क्रिकेट

वॉलीबॉल

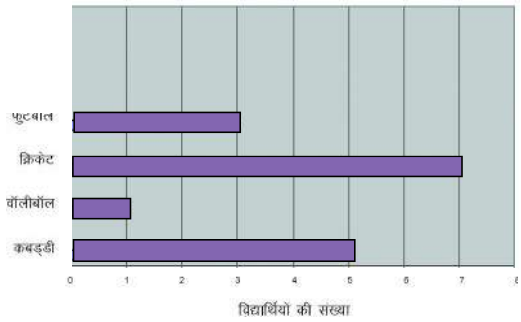
कबड्डी चित्र–17.3

इसी प्रकार चित्रों के द्वारा प्रदर्शन को **चित्र आरेख (pictograph)** कहा जाता है। यह आसानी से समझने योग्य होता है एवं चित्रों को देखकर निष्कर्ष निकाला जा सकता है।

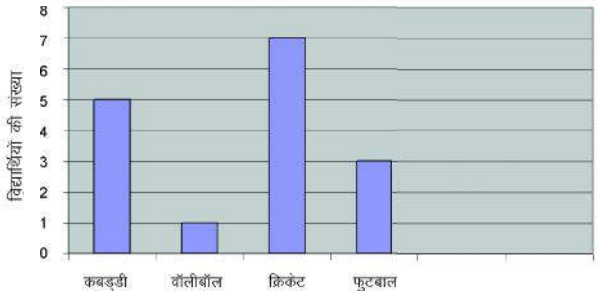
दण्ड आरेख

चित्र आरेख विधि से प्रदर्शन में हमें बहुत से चित्रों को बनाने की आवश्यकता होती है जो कभी–कभी अव्यावहारिक हो जाती है। किन्तु यदि हम प्रत्येक छात्र के लिए 1 सेमी लम्बाई लेकर यदि दण्ड बनाएं तब आंकड़ों के प्रदर्शन में और सरलता होगी तथा इन दण्डों को क्षैतिज अथवा उर्ध्वाधर दोनों तरीकों से बनाया जा सकता है।

क्षैतिज दण्ड आरेख
(Horizontal Bar Graph)



उर्ध्वाधर दण्ड आरेख
(Vertical Bar Graph)



चित्र–17.4

इन आरेखों में दण्डों की चौड़ाई समान रखी गयी है। इन दण्ड आलेखों को देखकर इन खेलों की लोकप्रियता का अन्दाजा आसानी से लगाया जा सकता है। उक्त निरूपण में विद्यार्थियों की संख्या कम थी अतः प्रत्येक विद्यार्थी के लिए दण्ड की लम्बाई 1 सेमी लेकर उसे कॉपी में आसानी से दर्शाया जा सकता है।

किन्तु यदि विद्यार्थियों की संख्या अधिक हो तो ऐसी स्थिति में उसे कॉपी पर कैसे दर्शाएंगे? ऐसी स्थिति में दण्डों की ऊँचाई का निर्धारण करना मुख्य समस्या है।

आइए, इस पर विचार करें–

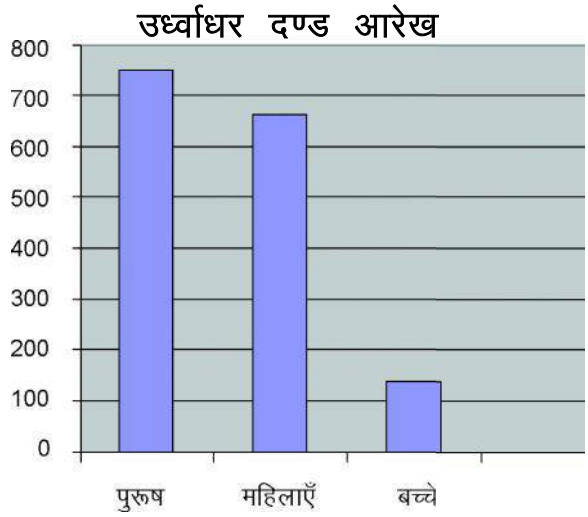
राजेश जिस मोहल्ले में रहता है वहां 750 पुरुष, 660 महिलाएं एवं 140 बच्चे हैं। हमें इसे आरेख के द्वारा प्रदर्शित करना है।

इन आँकड़ों के दण्ड के रूप में प्रदर्शित करने के लिए दण्डों की ऊँचाई क्या होनी चाहिए?

यदि हम प्रत्येक व्यक्ति के लिए 1 सेमी की ऊँचाई लें तो पुरुषों के लिए 750 सेमी, महिलाओं के लिए 660 सेमी एवं बच्चों के लिए 140 सेमी का दण्ड बनाना होगा। किन्तु इसे अपने कॉपी में बनाना संभव नहीं है।

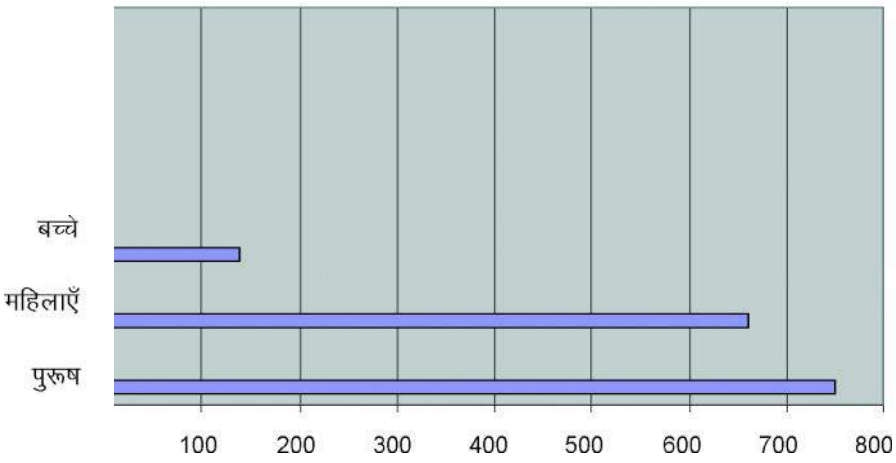
यदि हम प्रति 10 व्यक्तियों के लिए 1 सेमी. का दण्ड लें तब ये दण्ड क्रमशः 75 सेमी, 66 सेमी एवं 14 सेमी के दण्ड बनेंगे, किन्तु इसे भी हम अपनी कॉपी में प्रदर्शित नहीं कर सकेंगे।

यदि हम प्रति 100 व्यक्तियों के लिए 1 सेमी का दण्ड लें तब दण्ड की लम्बाईयाँ क्रमशः 7.5 सेमी, 6.6 सेमी एवं 1.4 सेमी होगी। जो कि आसानी से हमारी कॉपी में बनाई जा सकती है। तो आइए, देखते हैं कि इसे किस प्रकार से हम एक दण्ड चित्र के माध्यम से दर्शाएंगे–



चित्र–17.5

इन आंकड़ों को प्रदर्शित करने में दण्ड को उर्ध्वाधर बनाया गया है इसे **उर्ध्वाधर दण्ड आरेख (Vertical Bar Graph)** कहते हैं। दण्डों को हम क्षैतिज रूप में भी प्रदर्शित कर सकते हैं।



चित्र–17.6

यदि हम दण्डों को क्षैतिज रूप में प्रदर्शित करें तो उसे **क्षैतिज दण्ड आरेख (Horizontal Bar Graph)** कहेंगे। (चित्र–17.6)

अनिता के मन में एक प्रश्न उठ रहा था कि दण्ड आरेख की क्या उपयोगिता है? क्योंकि बारम्बारता सारणी के अवलोकन से भी हमें वही जानकारी मिल जाती है जो दण्ड आरेख से मिलती है।

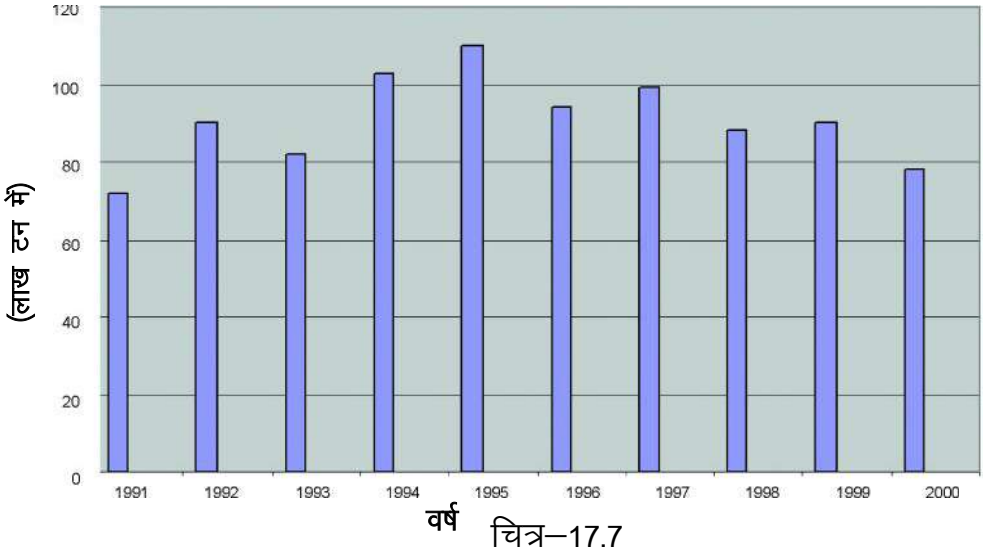
आइये अनिता के इस प्रश्न का हल ढूंढें।

नीचे वर्ष 1991 से वर्ष 2000 तक गेहूँ के उत्पादन के आंकड़े दिए गए हैं:–

सारणी–6

वर्ष	गेहूँ का उत्पादन (लाख टन में)
1991	72
1992	90
1993	82
1994	103
1995	110
1996	94
1997	99
1998	88
1999	90
2000	78

इन आंकड़ों को दण्ड–आरेख द्वारा इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं :–



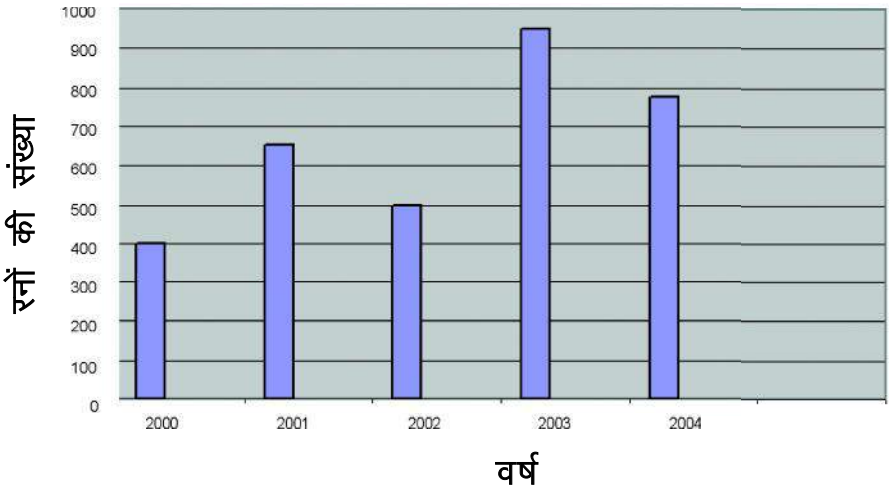
चित्र–17.7

इस दण्ड आरेख को देखकर क्या आप बता सकते हैं कि किस वर्ष में गेहूँ का उत्पादन सबसे कम और किस वर्ष में सबसे अधिक हुआ? इससे और क्या–क्या जानकारियां आपको मिल सकती है? लिखिए।

आप पायेंगे कि वर्ष 1995 में सबसे अधिक तथा वर्ष 1991 में सबसे कम गेहूँ का उत्पादन हुआ है। यह भी पाते हें कि 1992 एवं 1999 दोनों वर्षों में गेहूं उत्पादन एक समान हुआ है। क्या बारम्बारता सारणी को केवल देखकर ऐसा ही निष्कर्ष निकाल पायेंगे?

यह स्पष्ट है कि सिर्फ आंकड़ों को देखकर किसी निष्कर्ष में पहुंचना कठिन होता है। इसके लिए सभी दिये गए आंकड़ों का सूक्ष्म अध्ययन जरूरी है जबकि दण्ड आरेख को केवल देखकर ही कह सकते हैं कि किस वर्ष उत्पादन सबसे अधिक और किस वर्ष सबसे कम हुआ है। अतः दण्ड आरेख का मुख्य लाभ यह है कि इसे एक बार देखकर ही समझ में आ जाता है तथा अन्य आँकड़ों से तुलना बड़ी आसानी से की जा सकता है।

उदाहरण–2 नीचे दिए गए दण्ड आलेख में अरूण के द्वारा वर्ष 2000 से 2004 तक बनाए गए रनों की संख्या दी गई है। इन आरेखों का अवलोकन कर, दिए गए प्रश्नों का उत्तर दीजिए:–



चित्र–17.8

(i) इस दंड आरेख से क्या जानकारी मिलती है?

(ii) वह वर्ष बताइए जिसमें अरूण द्वारा बनाये गये रनों की संख्या न्यूनतम है?

(iii) किस वर्ष में अरूण ने सर्वाधिक रन बनाए?

(iv) क्या अरूण हर वर्ष पिछले वर्ष से अच्छा खेलता है?

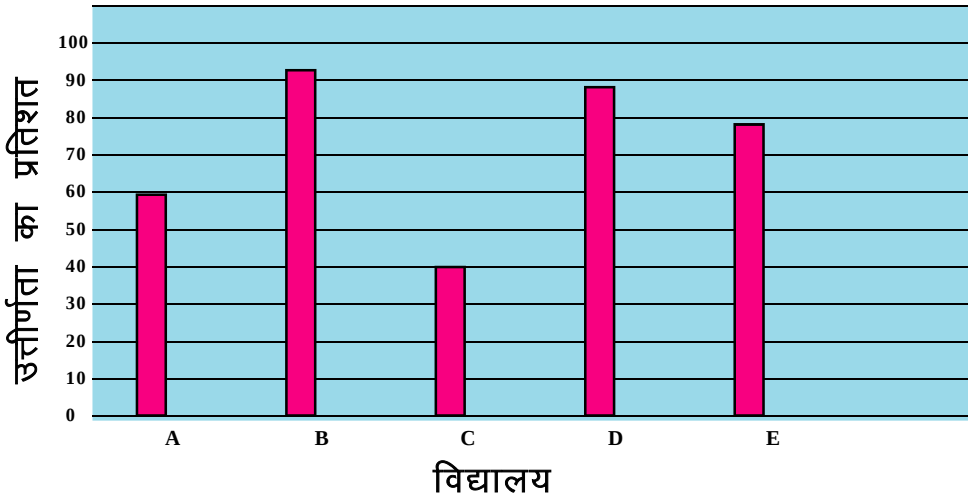
हल (i) दिए गए दण्ड आरेख वर्ष 2000 से 2004 तक में अरूण द्वारा बनाए गए रनों की संख्या को प्रदर्शित करता है।

(ii) चूंकि वर्ष 2000 के संगत दण्ड की ऊँचाई सबसे कम है, अतः वर्ष 2000 में बनाये गये रनों की संख्या न्यूनतम हैं।

(iii) चूंकि वर्ष 2003 के संगत दण्ड सबसे अधिक ऊँची हैं, इसलिए इसी वर्ष सबसे अधिक रन बनाये गये।

(iv) नहीं, क्योंकि अरूण ने 2002 में 2001 से कम रन बनाए उसी प्रकार 2004 में भी 2003 से कम रन बनाए।

उदाहरण–3 नीचे दिये दण्ड आरेख में विद्यालयों A, B, C, D, E के उत्तीर्ण विद्यार्थियों का प्रतिशत दिया गया है इनका अवलोकन कर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए–



चित्र–17.9

(i) किस विद्यालय में उत्तीर्ण छात्रों का प्रतिशत सबसे कम रहा?

(ii) किस विद्यालय में 90 प्रतिशत से अधिक विद्यार्थी उत्तीर्ण हुए?

(iii) किस विद्यालय में सबसे कम प्रतिशत विद्यार्थी अनुत्तीर्ण हुए?

(iv) कितने विद्यालयों में उत्तीर्ण प्रतिशतता 60 या इससे अधिक रही?

हल (i) विद्यालय C में सबसे कम (40%) छात्र उत्तीर्ण हुए।

(ii) विद्यालय B में 90% में अधिक (95%) विद्यार्थी उत्तीर्ण हुए।

(iii) विद्यालय B में सबसे कम प्रतिशत छात्र अनुत्तीर्ण हुए क्योंकि यहाँ उत्तीर्ण प्रतिशतता सबसे अधिक है।

(iv) विद्यालय A, B, D एवं E में उत्तीर्ण छात्रों की प्रतिशतता 60% या उससे अधिक रही।

प्रश्नावली 17.2

1. नीचे दी गई सारणी में किसी कंपनी की 5 वर्षो की वार्षिक आय दी गई है। आंकड़ों को दंड आरेख द्वारा दर्शाइए–

वर्ष	1996	1997	1998	1999	2000
वार्षिक आय (100000 रुपयों में)	10	20	15	12	22

2. निम्न सारणी अलग–अलग टी.वी. सेट के खरीददारों की सूचना देती है। इन आंकड़ों को दंड आरेख का रूप दीजिए।

ब्रांड	% खरीददार
p	25
q	30
r	15
S	10
T	10
अन्य	10

3. निम्न सारणी एक विद्यालय की वार्षिक परीक्षा में छात्रों के औसत प्राप्तांकों को दर्शाती है। आंकड़ों को दंड आरेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

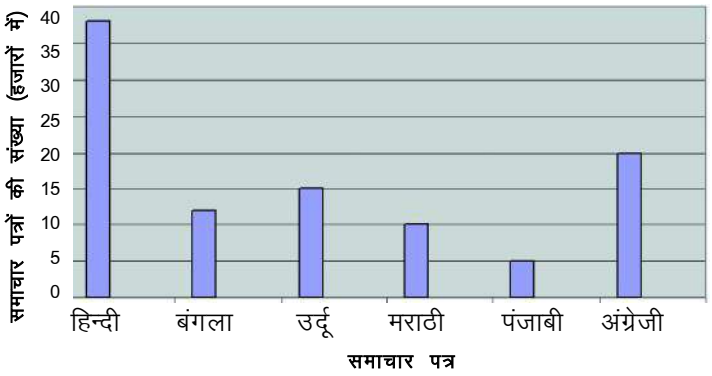
विषय	छात्रों के औसत प्राप्तांक (%)
अंग्रेजी	55
गणित	60
विज्ञान	65
सामाजिक विज्ञान	90
हिन्दी	70

4. शुभम् द्वारा एक सप्ताह (प्रातः 11 बजे) के एकत्रित तापमान इस प्रकार है।

दिन	सोम	मंगल	बुध	गुरू	शुक्र	शनि	रवि
तापमान °C	50	45	40	45	35	40	48

इन आंकड़ों को दण्ड़ आरेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

5. निम्न दंड आरेख में इन आंकडों को दण्ड आरेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए। एक शहर में छः भाषाओं में छपे (दैनिक) समाचार पत्रों की बिक्री की संख्या को निरूपित किया गया है।



आँकड़े निकटतम हजार में है। आरेख का अध्ययन कीजिए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए:–

1. हिन्दी, बंगला, उर्दु, मराठी, पंजाबी और अंग्रेज़ी पढ़े–जाने वाले प्रत्येक प्रकार के समाचार पत्रों की संख्या बताइये।
2. पंजाबी की तुलना में मराठी में कितने अधिक समाचार पत्र पढ़े जाते हैं?
3. वह भाषा बताइये जिसमें पढ़े जाने वाले समाचार पत्रों की संख्या न्यूनतम है।
4. विभिन्न भाषाओं में पढ़े जाने वाले समाचार पत्रों की संख्याओं को बढ़ते क्रम में लिखिए।

समान्तर माध्य [MEAN]

जानवरों को पानी पिलाने में राधा बहुत आनन्द अनुभव करती है। वह रोज़ एक बड़े टंकी में जानवरों के लिए पानी रख देती है और हिसाब भी रखती है कि प्रत्येक दिन कितने जानवर पानी पी रहे है। उसके द्वारा लिखे गए पिछले हफ्ते का हिसाब कुछ इस प्रकार है :–

7BP9F9

चित्र–17.10

सोमवार	–	12,	मंगलवार	–	15,	बुधवार	–	13,
बृहस्पतिवार	–	11,	शुक्रवार	–	13,	शनिवार	–	13
रविवार	–	14						

क्या आप बता सकते हैं कि राधा प्रतिदिन औसतन कितने जानवरों को पानी पिलाती है।

क्रिकेट खिलाड़ी A ने अपनी दस पारियों में 60, 70, 15, 90, 72, 45, 11, 77, 125, 200 रन बनाये। इसी तरह B खिलाड़ी ने अपनी छः पारियों में 220, 110, 70, 37, 15, 07 रन बनाये। क्या आप बता सकते है कि किस खिलाड़ी का प्रदर्शन अच्छा रहा?

इस तरह की तुलना हम औसत निकाल कर आसानी से कर सकते है।

इसी प्रकार दैनिक जीवन में हम कई स्थानों पर औसत का उपयोग करते हैं। जैसे –

(1) आपकी कक्षा में पढ़ने वाले विद्यार्थियों की औसत आयु 14 वर्ष है।

(2) आपके रात में सोने का औसत समय 8 घंटे है।

(3) दैनिक समाचार पत्रों का औसत मूल्य 2.50 रुपये है।

(4) कक्षा में विद्यार्थियों की औसत उपस्थिति 45 है।

(5) इस वर्ष रायपुर में औसत से कम वर्षा हुई।

उपरोक्त उदाहरणों में आप देख रहे है कि कक्षा के विद्यार्थियों की औसत आयु 14 वर्ष है। रात में सोने का औसत समय 8 घंटे है। इनसे तात्पर्य यह नहीं है कि कक्षा के प्रत्येक छात्र का आयु 14 वर्ष है या रोज़ रात में आप 8 घंटे सोते हैं। न ही यह अधिकतम व न्यूनतम है।

वास्तव में, औसत दिए गए प्रेक्षणों (आँकड़ों) के योग में प्रेक्षणों (आँकड़ों) की संख्या का भाग देने से प्राप्त होता है। इसे समान्तर माध्य भी कहते हैं। इसे संकेत M द्वारा दर्शाते हैं।

अतः औसत या समान्तर माध्य (Mean) (M) = $\dfrac{\text{प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$

अब हम आसानी से ज्ञात कर सकते हैं कि राधा प्रतिदिन औसतन कितने जानवरों को पानी पिलाती है।

औसत $= \dfrac{12+15+13+11+13+13+14}{7} = \dfrac{91}{7} = 13$

अतः राधा औसतन 13 जानवरों को प्रतिदिन पानी पिलाती है।

अब आप स्वयं खिलाड़ी A व B की पारियों का समान्तर माध्य ज्ञात कर बताइए कि किस खिलाड़ी का प्रदर्शन अच्छा रहा।

क्रियाकलाप 2.

आप अपने परिवार के सदस्यों की औसत आयु निकालिए।

क्रियाकलाप 3.

अर्द्धवार्षिक परीक्षा में सभी विषयों के प्राप्तांकों का औसत निकालिए।

उदाहरण 4. एक फल की दुकान पर पांच टोकरियों में 46 किग्रा, 21 किग्रा, 18 किग्रा, 25 किग्रा. तथा 35 किग्रा. सेब रखें हैं। इनका समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल: समान्तर माध्य (M) =

समान्तर माध्य (M) = $\dfrac{46+21+18+25+35}{5} = \dfrac{145}{5} = 29$ किग्रा.

उदाहरण 5. प्रथम 10 प्राकृत संख्याओं का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल: प्रथम दस प्राकृत संख्याएँ निम्नांकित हैं –

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

$$\text{समान्तर माध्य (M)} = \frac{\text{प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$$

$$\text{समान्तर माध्य (M)} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10}{10}$$

$$= \frac{55}{10} = 5.5 \text{ किग्रा.}$$

बहुलक [MODE]

विद्यालय द्वारा कक्षा आठवीं के छात्रों को दीपावली अवकाश में किसी दर्शनीय स्थल का भ्रमण कराने का निश्चय किया गया। प्रधानाध्यापक ने सिरपुर, रतनपुर, जगदलपुर तथा अम्बिकापुर में से एक स्थान का चुनाव करने का निर्देश दिया। कुछ छात्र सिरपुर तो कुछ छात्र जगदलपुर जाना चाहते हैं। स्थान तय नहीं होने के कारण, कक्षाध्यापक ने चारों स्थानों के नाम श्यामपट्ट पर लिखकर बच्चों से हाथ खड़े करवाकर टैली/गणना चिह्न द्वारा बारम्बारता सारणी बनाई जो निम्नानुसार थी–

सारणी 7

दर्शनीय स्थल	टैली चिह्न	विद्यार्थियों की संख्या
सिरपुर	卌 ||	7
जगदलपुर	卌 卌 |||	13
रतनपुर	卌	5
अम्बिकापुर	卌	5

सारणी देखकर कक्षाध्यापक ने कहा सर्वाधिक 13 विद्यार्थी जगदलपुर जाना चाहते हैं, अतः हमें जगदलपुर जाना चाहिए।

दैनिक जीवन में भी ऐसी कई घटनाएं होती हैं जिनका चयन इसी प्रकार करते हैं। जैसे– रेडिमेड कपड़े की दुकान में हमें 38 या 40 नम्बर की ही शर्ट मिलती हैं। 39 नम्बर की शर्ट मांगने पर हमें नहीं मिलती है, क्योंकि उसकी मांग कम है। कम्पनी उसी नम्बर का शर्ट अधिक बनाती है जिसकी मांग बाजार में अधिक है।

चयन का यह आधार ही बहुलक है। अर्थात् **बहुलक दिए गये प्रेक्षणों का वह मान है जो सर्वाधिक बार दोहराया गया हो।** इसे संकेत M_0 द्वारा दर्शाते हैं।

उदाहरण 6. दिए गये आंकड़ों से बहुलक ज्ञात कीजिए।

21, 23, 28, 25, 23, 30, 23

हल: दिए गये आंकडों से स्पष्ट है कि यहाँ अंक 23 सबसे अधिक बार (3 बार) आया है, अतः बहुलक 23 होगा अर्थात् $M_0 = 23$

उदाहरण 7. एक फुटबाल टीम के 11 खिलाड़ियों द्वारा पहने गए जूतों के नाप के नम्बर निम्न प्रकार हैं –

6, 4, 5, 6, 7, 7, 6, 5, 6, 7, 8 बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल :– दिए गये नम्बरों को आरोही क्रम में व्यवस्थित कर लिखने पर

4, 5, 5, 6, 6 ,6, 6, 7, 7, 7, 8

स्पष्ट है कि यहाँ 6 नम्बर सबसे अधिक बार (4 बार) आया है।

अतः बहुलक 6 होगा अर्थात् $M_0 = 6$

माध्यिका [MEDIAN]

उदाहरण 8. एक कक्षा के 15 छात्रों के वार्षिक परीक्षा में पूर्णांक 100 में से प्राप्तांक निम्नानुसार हैं–

7BY5GH

(A) 15, 35, 16, 25, 45, 76, 90, 99, 50, 16, 57, 60, 86, 17, 95

बताइये इनमें से कितने छात्रों के अंक आधे से अधिक हैं। यहाँ प्राप्तांकों को देखने से यह स्पष्ट नहीं हो रहा है। आइए, इन्हें हम आरोही (बढ़ते) क्रम में व्यवस्थित करके देखें –

(B) 15, 16, 16, 17, 25, 35, 45, 50, 57, 60, 76, 86, 90, 95, 99

(अ) प्राप्तांकों (A) के आधार पर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

1. दिए गए प्राप्तांकों (पदों) में मध्य पद है? .....
2. मध्य पद के प्राप्तांक से कम प्राप्तांक वाले कितने पद हैं? .....
3. मध्य पद के प्राप्तांक से अधिक प्राप्तांक वाले कितने पद हैं? .....
4. क्या मध्य पद के प्राप्तांक से कम एवं अधिक प्राप्तांक वाले पदों की संख्या समान (बराबर) है? .....

(ब) व्यवस्थित प्राप्तांकों (B) के आधार पर प्रश्नों के उत्तर दीजिए –

1. व्यवस्थित प्राप्तांकों में मध्य पद के प्राप्तांक क्या हैं ? .....
2. मध्य पद के प्राप्तांक के कम प्राप्तांक वाले कितने पद हैं? .....
3. मध्य पद के प्राप्तांक से अधिक प्राप्तांक वाले कितने पद हैं? .....
4. क्या मध्य पद के प्राप्तांक से कम एवं अधिक प्राप्तांक वाले पदों की संख्या समान हैं? .....

पदों को घटते क्रम या बढ़ते क्रम में रखने पर ही मध्य पद का निर्धारण होता है। इसी मध्य पद को माध्यिका कहते हैं।

अर्थात् **"दिए गए आँकड़ों को घटते या बढ़ते क्रम में व्यवस्थित करने पर उनके बीच वाला मान ही मध्यिका है।"** माध्यिका को संकेत M_d द्वारा दर्शाते हैं।

[A] माध्यिका ज्ञात करना जब आँकड़ों की संख्या N विषम हो

जब दिए गए आँकड़ों की संख्या विषम संख्या में हो, तो सर्वप्रथम उनको आरोही या अवरोही क्रम में लिखकर $M_d = \left(\frac{N+1}{2}\right)$ वाँ पद का मान ज्ञात करते हैं। प्राप्त मान ही माध्यिका है।

उदाहरण 9. 3, 5, 10, 9, 8, 14, 6, 12, 13, 11, 7 की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हल : आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करके लिखने पर–

3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 (यहाँ कुल पदों की संख्या 11 अर्थात विषम है)

$M_d = \left(\frac{N+1}{2}\right)$ वाँ पद का मान $= \left(\frac{11+1}{2}\right)$ वाँ पद का मान $= 6$ वाँ पद का मान

$M_d = 9$

[B] माध्यिका, जब आँकड़ों की संख्या N सम हो

जब दिए गए आँकड़े सम संख्या में हैं तो उन्हें आरोही या अवरोही क्रम में व्यवथित करने पर मध्य में दो संख्याएँ होती हैं। ऐसी स्थिति में हम उन दोनों मध्य संख्याओं का माध्य ज्ञात कर माध्यिका निकालते है।

अर्थात्

$$M_d = \frac{\left[\left(\frac{N}{2}\right) \text{ वाँ पद का मान} + \left(\frac{N}{2}+1\right) \text{ वाँ पद का मान}\right]}{2}$$

उदाहरण 10. बंटन 5, 9, 4, 6, 12, 8 की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हल : दिये गये आंकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थि करने पर

4, 5, 6, 8, 9, 12

यहाँ N = 6 (सम संख्या है)

$$M_d = \frac{\frac{6}{2}\text{वाँ पद का मान} + \left(\frac{6}{2}+1\right)\text{वाँ पद का मान}}{2}$$

$$= \frac{\text{तीसरे पद का मान} + (3+1)\text{वाँ पद का मान}}{2}$$

$$= \frac{\text{तीसरे पद का मान + चौथे पद का मान}}{2}$$

$$M_d = \frac{6+8}{2} = 7$$

$\Rightarrow$ $\boxed{M_d = 7}$

प्रश्नावली 17.3

प्र.1. समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

81, 74, 69, 73, 91, 55, 61

प्र.2. 50 से 70 के मध्य सम संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए।

प्र.3. माध्यिका ज्ञात कीजिए।

4, 5, 10, 6, 7, 14, 9, 15

प्र.4. एक कक्षा के 11 छात्रों का भार (किलोग्राम में) निम्न प्रकार हैं–

25, 27, 29, 32, 30, 28, 26, 31, 35, 41, 34

इनकी माध्यिका ज्ञात करो।

प्र.5. कक्षा आठवीं के छात्रों ने विज्ञान प्रतियोगिता में निम्नानुसार अंक प्राप्त किये–

83, 61, 48, 73, 76, 52, 67, 61, 79

उपरोक्त आंकड़ों से माध्यिका की गणना कीजिए।

प्र.6. दिये गये आँकड़ों से बहुलक प्राप्त कीजिए।

7, 5, 9, 9, 3, 1, 9, 7, 5, 3, 1, 1, 9, 7, 7, 5, 5, 5, 3, 1, 5, 3, 5, 1, 5, 7, 7, 9, 9, 1

प्र.7. निम्न बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए।

5, 3, 2, 2, 4, 5, 3, 3, 4, 3, 5, 3

प्र.8. प्रथम पाँच विषम प्राकृत संख्याओं का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिये।

प्र.9. संख्याएँ 8,5,x,6,10,5 का माध्य 7 हैं। x का मान ज्ञात कीजिए।

ifjorlu'khyrk

परिवर्तन प्रकृति का महत्वपूर्ण घटक है। प्रकृति में निरन्तर कई प्रकार के परिवर्तन होते रहते हैं। इनमें से कुछ एक निश्चित दिशा में होते हैं जैसे – बाल्यावस्था, युवावस्था फिर वृद्धावस्था का आना, बाल्यावस्था में बच्चों की ऊँचाई एवं वजन का बढ़ना, पौधों का बढ़ना आदि। इनसे अलग एक परिवर्तन वे हैं जिनमें निरन्तरता, निश्चितता एवं क्रमिकता होती है जैसे सूर्य का प्रातःकाल उदित होना शाम को अस्त होना, पृथ्वी का सूर्य के चारों ओर चक्कर लगाना, दिन–रात का होना, ऋतुओं का परिवर्तन आदि।

जीवन की इस परिवर्तनशीलता का अनुमान लगाया जा सकता है क्योंकि इन परिवर्तनों में क्रमिक बदलाव होता है। दिन के बाद रात होगी ही पुनः दिन नहीं। गर्मी के बाद वर्षा ऋतु आएगी कोई अन्य ऋतु नहीं।

प्रकृति के कुछ परिवर्तन ऐसे भी हैं जिनमें अनिश्चितता होती है। इन परिवर्तनों के बारे में निश्चित परिणाम नहीं बताया जा सकता है। जैसे– बादल छा जाने पर वर्षा का होना।

इसी प्रकार हमारे आस–पास घटने वाली कुछ घटनाएँ ऐसी हैं जिनके घटने के परिणाम का हम निश्चित अनुमान नहीं लगा सकते, केवल उसकी संभावना ही व्यक्त कर सकते हैं। जैसे किसी सिक्के को उछालने पर उसका चित या पट आना, किसी पासे को उछालने पर कोई निश्चित बिन्दु ऊपरी सतह पर प्राप्त होना, ताश के पत्तों में से एक पत्ता खींचने पर कोई निश्चित पत्ता निकलना, किसी थैले में रखी कई रंगों की गेंदों में से एक गेंद निकालने पर किसी निश्चित रंग की गेंद का निकलना आदि।

इस प्रकार की घटनाओं में परिणाम की मात्र संभावना ही बताई जा सकती है, निश्चित परिणाम नहीं बताया जा सकता साथ ही इस प्रकार की घटनाओं की पुनरावृत्ति होने पर पिछले परिणाम के आधार पर अगले परिणाम को भी नहीं बताया जा सकता। यदि कोई सिक्का पहली उछाल में चित आया है तो अगली उछाल में फिर दोनों संभावनाएँ रहती हैं। वह चित भी आ सकता है पट भी।

इस प्रकार की घटनाओं में किसी घटना के घटित होने पर प्राप्त होने वाले संभावित परिणामों की संख्या घटना की प्रकृति पर निर्भर करती है जैसे –

1. किसी सिक्के को उछालने पर संभावित परिणाम दो में से कोई एक होगा–
   - चित आना
   - पट आना
2. लूडो के पासे को उछालने पर उसकी ऊपरी सतह पर कोई बिन्दु आने के संभावित परिणाम छह में सें कोई एक होगा –
   - 1 बिन्दु आना
   - 2 बिन्दु आना
   - 3 बिन्दु आना
   - 4 बिन्दु आना
   - 5 बिन्दु आना
   - 6 बिन्दु आना

3 किसी थैले में यदि एक लाल, एक हरी, एक सफेद व एक काली गेंदें हों तो एक गेंद निकालने पर परिणाम चार में से कोई एक होगा –

वह गेंद

- लाल होगी
- हरी होगी
- काली होगी
- सफेद होगी

स्पष्ट है कि घटनाओं के आधार पर उनके संभावित परिणामों की संख्या निर्धारित होती है।

fØ;kdyki 4

बताइए निम्न घटनाएं निश्चित हैं या अनिश्चित ?

1. दिन के बाद रात का होना
2. सिक्के को उछालने पर चित आना
3. ग्रीष्म ऋतु के बाद वर्षा ऋतु का आना
4. बादल छा जाने पर वर्षा का होना
5. पासा फैंकने पर उसके ऊपरी फलक पर छह बिन्दु आना

6. छोटे बच्चों में आयु के साथ–साथ ऊँचाई में परिवर्तन
7. किसी व्यक्ति का बीमार पड़ना
8. उम्र का बढ़ना

हमने सीखा

1. चित्र संकेतों द्वारा सांख्यिकीय आंकड़ों का ग्राफीय निरूपण आंकड़ों का चित्र आरेख कहलाता है।

2. दण्ड आरेख बराबर दूरी पर लिए गए एक समान चौड़ाई वाले क्षैतिज या उर्ध्वाधर दण्डों (आयतों) द्वारा संख्यात्मक आंकड़ों का चित्रीय निरूपण होता है।

3. दण्ड आरेख को देखकर बहुत से निष्कर्ष आसानी से निकाले जा सकते हैं।

4. औसत माध्य वह एकमात्र अंक है, जो आंकड़ों के समूहन को प्रदर्शित करता है।

5. $$\text{समान्तर माध्य} = \frac{\text{समस्त आंकडों का योगफल}}{\text{आंकडों की कुल संख्या}}$$

6. माध्यिका ज्ञात करते समय आंकड़ों को घटते या बढ़ते क्रम में रखा जाता है।
7. माध्यिका घटते या बढ़ते क्रम में व्यवस्थित आंकड़ों के समूहन के मध्य का अंक होता है।

8. (i) $M_d = \frac{N+1}{2}$ वां पद (जब N विषम संख्या में हो)

   (ii) $$M_d = \frac{\left[\frac{N}{2}\text{ वाँ पद} + \left(\frac{N}{2}+1\right)\text{ वाँ पद}\right]}{2}$$ (जब N सम संख्या में हो)

9. आंकड़ों में सर्वाधिक बारम्बारता वाला आंकड़ा बहुलक होता है।

10. परिवर्तनशीलता प्रकृति का महत्वपूर्ण घटक है।

11. प्रकृति के कुछ परिवर्तन निरन्तर, निश्चित व क्रमिक होते हैं, जिनका अनुमान लगाया जा सकता है। जबकि कुछ परिवर्तनों का अनुमान नहीं लगाया जा सकता।

12. हमारे आस–पास की कुछ घटनाएं ऐसी होती हैं जिनके घटित होने के परिणाम का अनुमान नहीं लगाया जा सकता मात्र उसकी संभावना व्यक्त की जा सकती है।

13. किसी घटना के संभावित परिणामों की संख्या उसकी प्रकृति पर निर्भर होती है।

❖❖❖