6G4S9B

अध्याय आठ

सर्वांगसमता (Congruence)

भूमिका

स्कूल की छुट्टी के बाद राधा अपने मित्रों के साथ घर लौट रही थी। रात में आंधी तूफान आने से पेड़ के पत्ते पूरे रास्ते में गिरे हुए थे। राधा ने एक पत्ता उठाकर देखा, उसे वह खूब सुन्दर लगा। वह उसी तरह का दूसरा पत्ता ढूँढने लगी। उसने अपने दोस्तों से भी कहा कि चलो हम एक खेल खेलें– एक ही आकार के पत्ते इकट्ठा करें, 100 गिनने तक जो सबसे अधिक एक जैसे आकार के पत्ते इकट्ठे कर लेगा, वही इस खेल का विजेता होगा।

राधा ने गिनती शुरू की और अपने दोस्तों के साथ पत्ते इकट्ठे करने में जुट गई।

राजेश ने तीन, हरि ने चार और अनु ने दो तथा राधा ने तीन पत्ते इकट्ठे किए। अब बारी थी पत्तों की जाँच की। कैसे पता करें कि कोई दो पत्ते एकदम एक ही आकार के हैं? क्या आप कोई तरीका सोच सकते हैं।

अनु ने कहा– मेरे द्वारा एकत्र किए गए दोनों पत्ते एकदम एक जैसे हैं। एक पत्ते के ऊपर दूसरा पत्ता रखकर मैंने मिलान कर लिया है, दोनों पत्ते एक–दूसरे को पूरी तरह से ढंक लेते हैं अर्थात् जिस प्रकार ऊपर वाली पत्ती नीचे वाली पत्ती को पूरी तरह से ढंक लेती है, उसी प्रकार नीचे वाली पत्ती भी ऊपर वाली पत्ती को पूरी तरह ढंक लेती है। अब सभी ने इसी तरीके से अपनी–अपनी पत्तियों का मिलान किया और मिलान करके पाया कि सभी के मात्र 2–2 पत्ते ही ऐसे हैं जो आकार में एकदम एक जैसे हैं।

चित्र–8.1

क्रियाकलाप–1

आप भी अपने आस–पास इसी प्रकार पूर्णतः समान आकार वाली वस्तुओं का पता लगाइए तथा नीचे दी गई समान आकार वाली वस्तुओं की सूची में उन्हें जोड़िए।

जैसे–

1.		2.	
3.		4.	
5.		6.	
7.		8.	
9.		10.	

ऐसी दो समान आकृतियाँ जो एक–दूसरे को पूरी तरह से ढंक ले, वे सर्वांगसम आकृतियां (Congruent) कहलाती हैं। इस गुण को सर्वांगसमता (Congruence) कहते हैं। सर्वांगसमता को] चिह्न से दर्शाते हैं।

क्या आप अपनी कॉपी में दो सर्वांगसम आकृतियाँ बना सकते हैं?

राधा ने एक पत्ती के किनारे–किनारे पेंसिल चलाकर एक ही जैसी दो आकृतियाँ बनाई।

चित्र–8.2

चित्र–8.3

अनु ने एक डाक टिकट के चारों ओर पेंसिल चलाकर निम्नानुसार दो आकृतियां बनाई–

चित्र–8.4

चित्र–8.5

राजेश के पास एक कार्बन था। उसने कॉपी के पेज के नीचे कार्बन लगाया और ऊपर वाले पेज पर एक आकृति बनाई। उसने पाया कि ठीक वही आकृति कार्बन के नीचे वाले पेज पर भी बन गयीं।

हरि ने एक रूपये का सिक्का लिया और उसके बाहरी सीमा पर पेंसिल चलाकर एक ही आकार की दो आकृतियाँ बनायी।

कॉपी में सभी ने दो–दो आकृतियां तो बना ली किन्तु अब प्रश्न यह था कि इनकी तुलना कैसे की जाए। दो पत्तियों या दो नोटों को तो एक–दूसरे के ऊपर रखकर यह देख सकते हैं कि वे सर्वांगसम हैं या नहीं। परन्तु दो आकृतियों की सर्वांगसमता की जांच किस प्रकार की जाए?

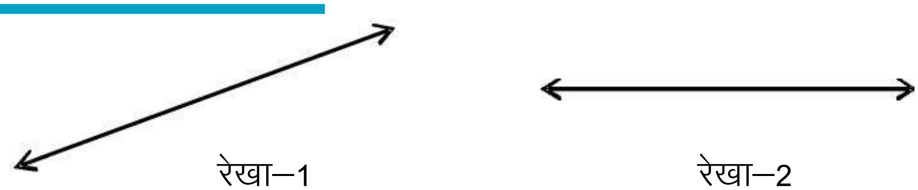
चित्र–8.4 एवं चित्र–8.5 में दी गई आकृतियां सर्वांगसम है अथवा नहीं, इसकी जांच कैसे करेंगे?

ज्यामिति में सर्वांगसमता

जिस प्रकार एक पत्ते को उसके आकार एवं माप में परिवर्तन किए बिना एक स्थान से उठाकर दूसरे स्थान पर रखा जा सकता है, उसी प्रकार से ज्यामिति में भी एक आकृति को उसके माप एवं आकार में परिवर्तन किए बिना एक स्थान से दूसरे स्थान पर ले जाया जा सकता है। इसे ज्यामिति में ''**अध्यारोपण की स्वयं सिद्धि**'' (Axiom of Superposition) कहते हैं।

टीप– दो सरल रेखाएं सदैव सर्वांगसम होती है क्योंकि एक सरल रेखा के ऊपर दूसरी सरल रेखा रखने पर वे एक–दूसरे को पूरी तरह से ढक लेंगी।

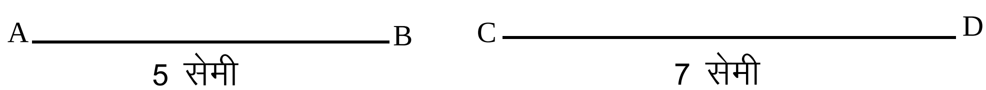
रेखाखण्डों की सर्वांगसमता



चित्र–8.6

क्या दो रेखाखण्ड भी सर्वांगसम होंगे?

जैसे,

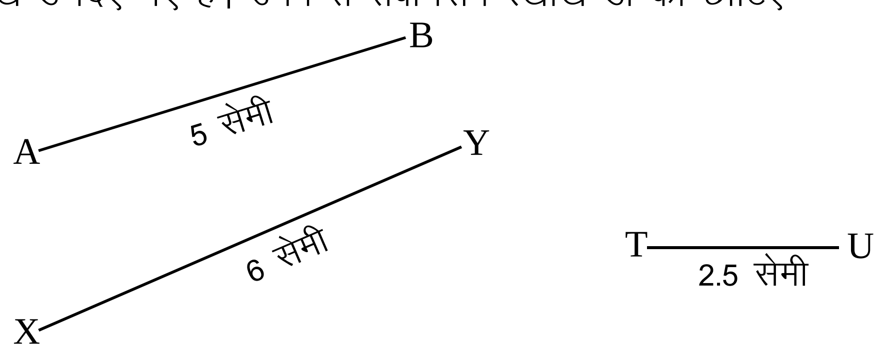


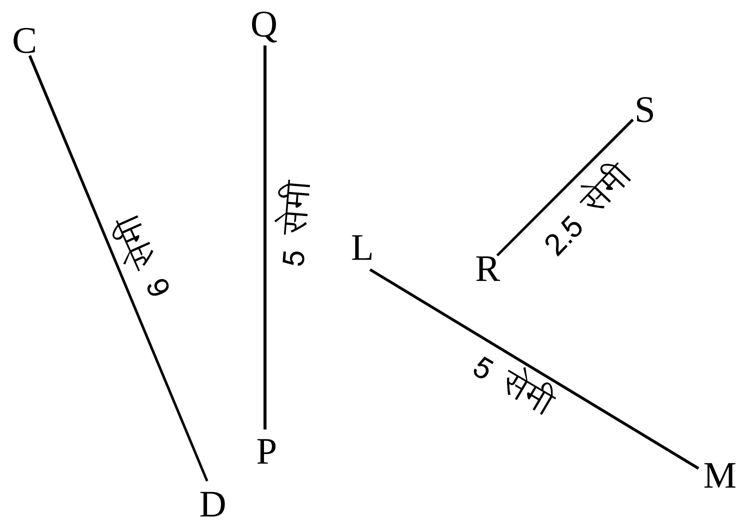
चित्र–8.7

रेखाओं की लम्बाई असीमित होती है, इसलिए किन्हीं भी दो सरल रेखाओं को एक–दूसरे के ऊपर रखने से वे परस्पर ढंक लेंगी, किन्तु रेखाखण्ड की लम्बाई निश्चित होती है, तो फिर एक 5 सेमी लम्बा रेखाखण्ड, 7 सेमी लंबाई वाले रेखाखण्ड को पूरी तरह कैसे ढंक सकती है? **अतः दो रेखाखण्ड तभी सर्वांगसम होंगे जब उनकी लम्बाईयाँ समान हों।**

क्रियाकलाप–2

नीचे कुछ रेखाखण्ड दिए गए हैं। उनमें से सर्वांगसम रेखाखण्डों को छांटिए–



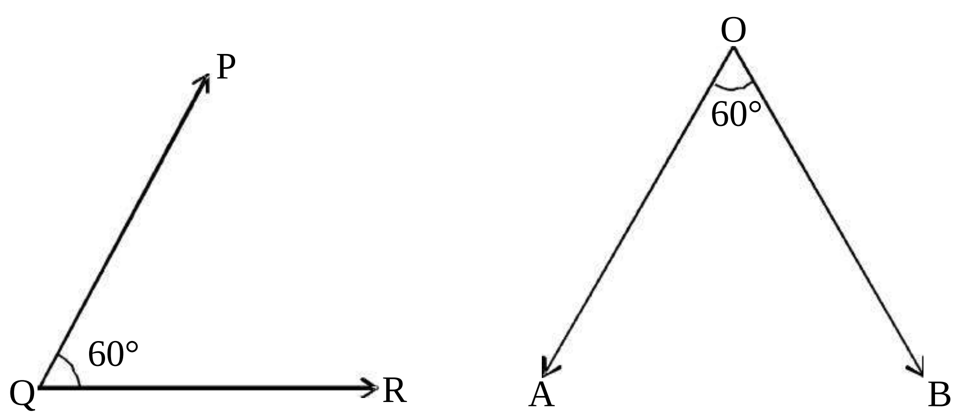


चित्र–8.8

यहां 5 सेमी लंबाई वाले सभी रेखाखण्ड, 2.5 सेमी लम्बाई वाले सभी रेखाखण्ड तथा 6 सेमी लम्बाई वाले सभी रेखाखण्ड परस्पर सर्वांगसम हैं। अर्थात $AB \cong PQ \cong LM$, $CD \cong XY$ और $RS \cong TU$

कोणों में सर्वांगसमता

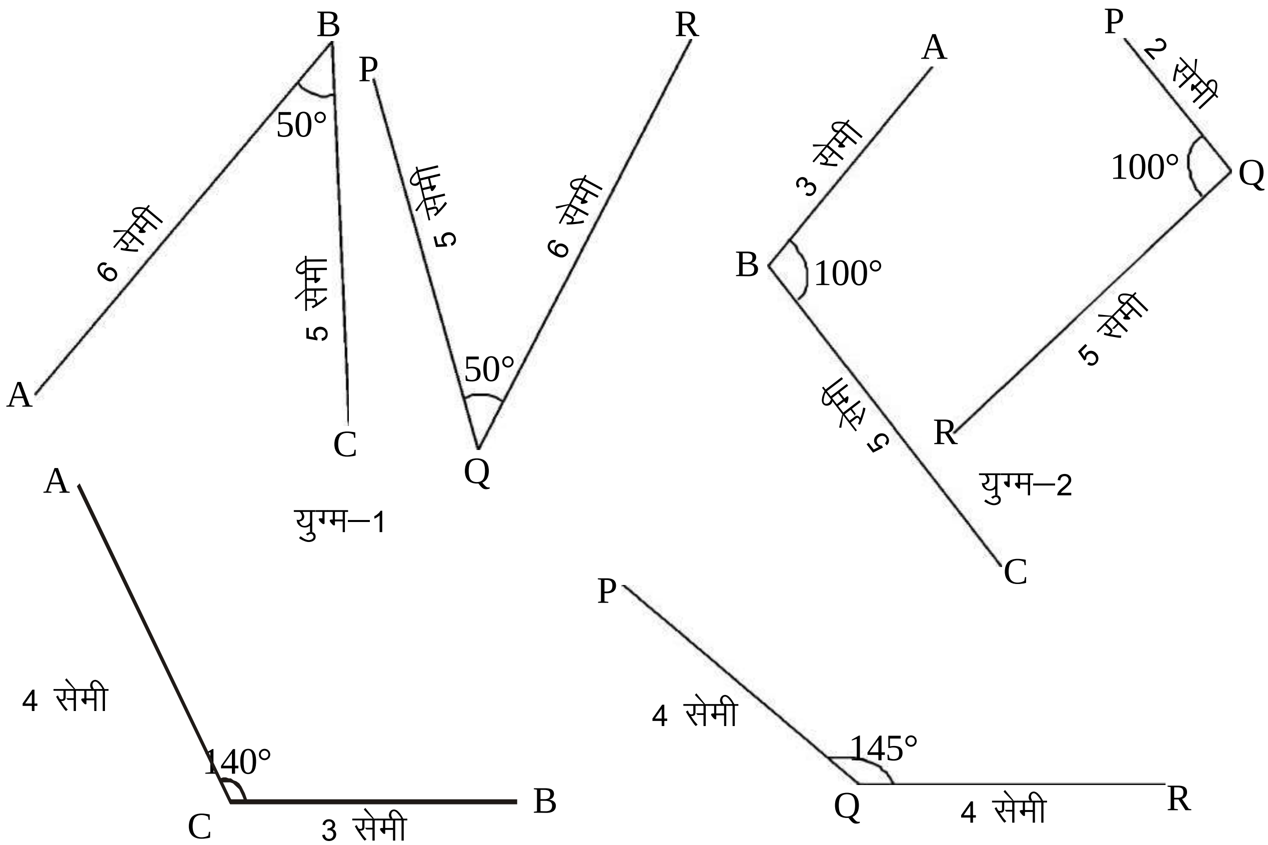
नीचे दो कोण दिये गये हैं। क्या आप बता सकते हैं कि वे सर्वांगसम हैं या नहीं?



चित्र–8.9

ज्यामिति में किसी भी आकृति को उसके माप व आकार को बिना बदले एक स्थान से दूसरे स्थान पर ले जाया जा सकता है यदि $\angle PQR$ को ट्रेस करके $\angle AOB$ के ऊपर रखा जावे तो दोनों एक–दूसरे को पूर्णतः ढक लेंगे। कोण समान होने के कारण किरण $\overrightarrow{OA}$ तथा किरण $\overrightarrow{OB}$ के मध्य झुकाव वही है, जो किरण $\overrightarrow{QP}$ तथा किरण $\overrightarrow{QR}$ के मध्य है। इसलिए $\overrightarrow{OA}$ पर $\overrightarrow{QR}$ एवं $\overrightarrow{OB}$ पर $\overrightarrow{QP}$ किरणें पड़ेंगी। चूंकि $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{QP}$ एवं $\overrightarrow{QR}$ सभी किरणें हैं इसलिए इनका विस्तार भी अपरिमित है, अतः किरणें $\overrightarrow{OA}$ व $\overrightarrow{QR}$ तथा $\overrightarrow{OB}$ व $\overrightarrow{QP}$ अनंत तक एक–दूसरे को ढंके रहेंगी।

नीचे समान कोण वाले सभी चित्रों के कुछ युग्म दिये हुए हैं। इनमें कौन–कौन से युग्मों के कोण सर्वांगसम हैं, लिखिए। (ट्रेस पेपर पर ट्रेस करके देख लेवें।)



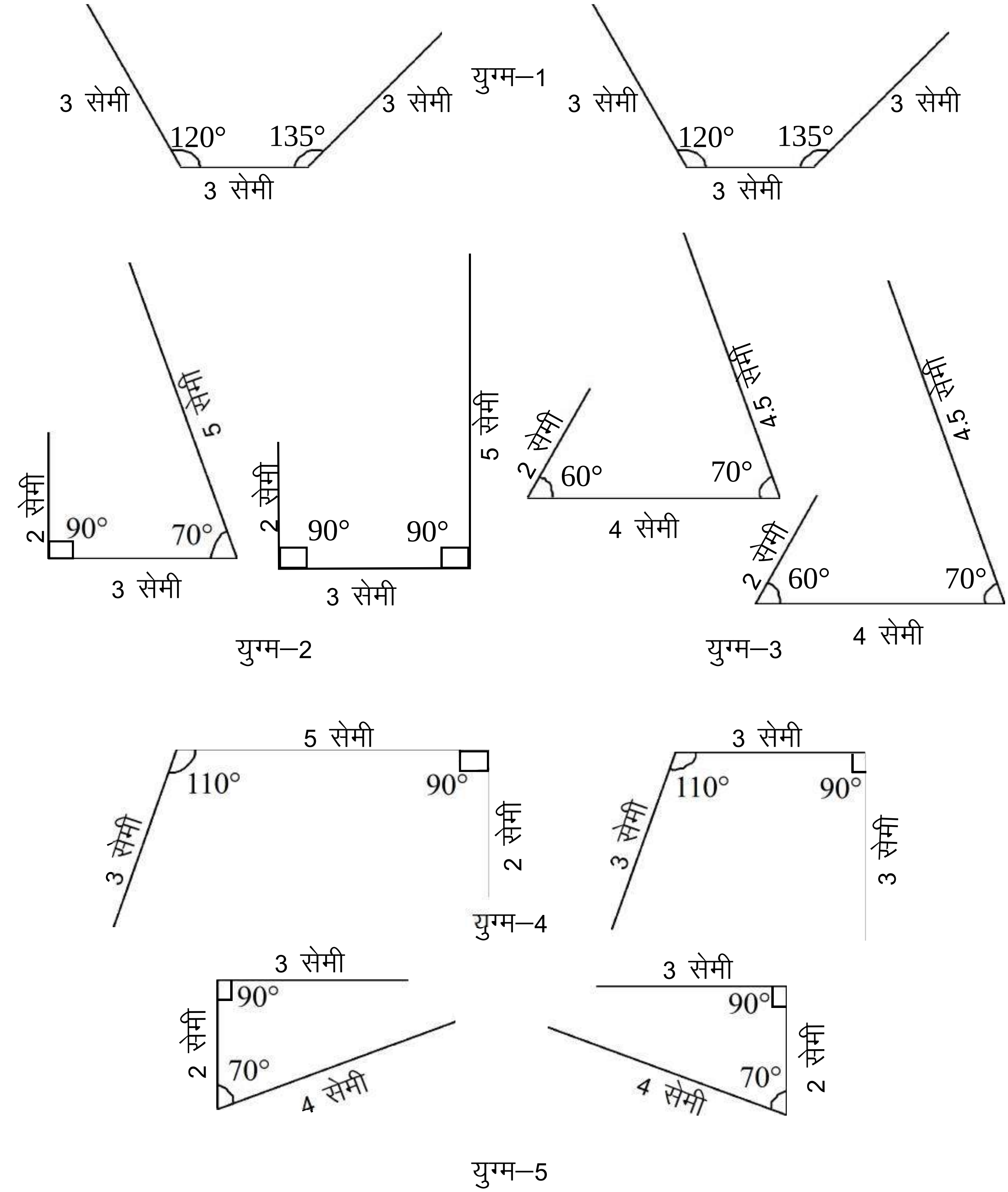
युग्म–3

चित्र–8.10

दो कोण सर्वांगसम होंगे यदि उनके माप समान हो। कोण बनाने वाली भुजाओं के माप अलग–अलग हैं या समान हैं, इससे कोई फर्क नहीं पड़ता।

क्रियाकलाप–3

नीचे दिये गये युग्मों में प्रत्येक में दो–दो आकृतियां दी गई हैं। किन–किन युग्मों की आकृतियां सर्वांगसम हैं? छाँटकर ✓ का चिह्न लगाइए–



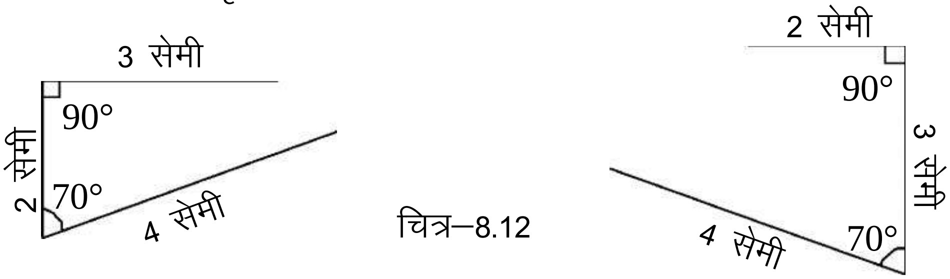
चित्र–8.11

ऊपर के चित्रों में युग्म–1, युग्म 3 एवं युग्म–5 की आकृतियाँ सर्वांगसम है परन्तु युग्म– 2, 4 की आकृतियाँ सर्वांगसम नहीं है। क्या आप बता सकते हैं कि कोई भी दो आकृतियाँ सर्वांगसम कब होंगी?

दो आकृतियों के सर्वांगसम होने का अर्थ यह है कि दोनों आकृतियां माप एवं आकार में समान हैं, सिर्फ उनकी स्थितियाँ अलग–अलग हैं। अर्थात् यदि इन आकृतियों

को एक–दूसरे के ऊपर रखें तो वे परस्पर पूर्णतः ढंक लेंगी। माप समान होने का अर्थ है कि पहली आकृति की प्रत्येक भुजा एवं कोण के माप की संगत भुजा एवं संगत कोण दूसरी आकृति में भी है। संगतता को ↔ चिह्न से दर्शाते हैं। जैसे– युग्म–5 की पहली आकृति के कोण 90° एवं 70° के हैं, दूसरी आकृति में भी कोण 90° व 70° के हैं। दोनों आकृतियों में उभयनिष्ठ भुजा की माप 2 सेमी है और 90° का कोण बनाने वाली भुजाओं की लम्बाई 2 सेमी एवं 3 सेमी है। इसी प्रकार 70° का कोण बनाने वाली भुजाएँ 2 सेमी एवं 4 सेमी है। यदि युग्म–5 की एक आकृति को दूसरी पर रखा जावे तो वे एक दूसरे को पूर्णतः ढंक लेंगी इसलिए दोनों आकृतियाँ सर्वांगसम होंगी।

क्या नीचे दी गई आकृतियां सर्वांगसम हैं? यदि नहीं तो क्यों?

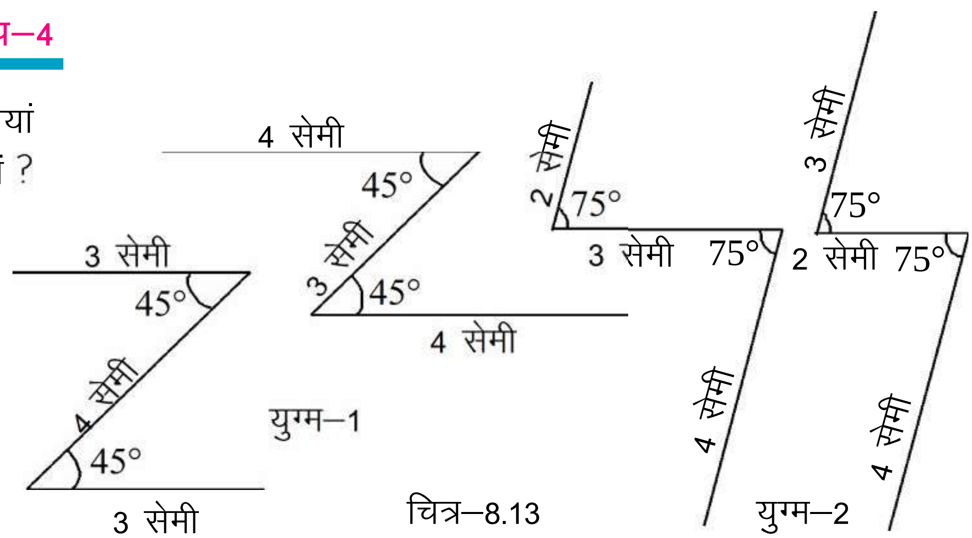


चित्र–8.12

यहां दोनों आकृतियों में कोण तो 90° एवं 70° के हैं किन्तु संगत भुजाएं (जैसे उभयनिष्ठ भुजा) समान माप के नहीं हैं। उसी प्रकार पहली आकृति के 3 सेमी वाली भुजा के संगत दूसरी आकृति की भुजा की माप 2 सेमी है। अतः दोनों आकृतियां सर्वांगसम नहीं हैं।

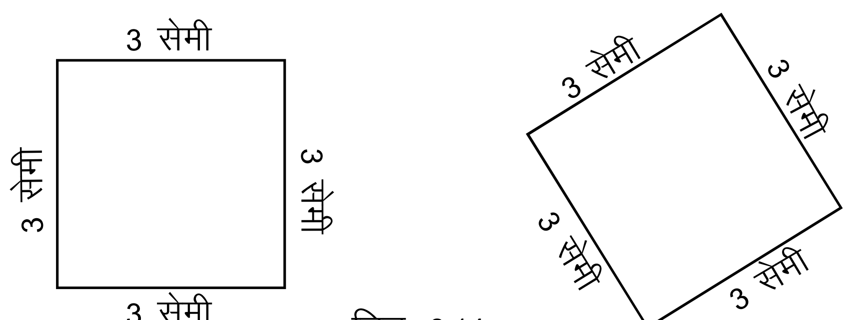
क्रियाकलाप–4

नीचे दी गई आकृतियां सर्वांगसम हैं या नहीं ? कारण बताइए–



चित्र–8.13

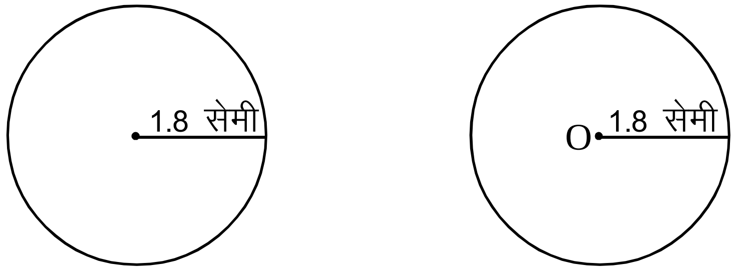
क्या दो वर्ग जिनकी भुजाएं समान माप की हों, सर्वांगसम होते हैं?



चित्र–8.14

वर्ग के सभी कोण 90° के होते है एवं सभी भुजाएं बराबर होती हैं, अतः **दो वर्गों की भुजाएं यदि समान माप की हो तो वर्ग सर्वांगसम होंगे।**

उसी प्रकार, **यदि दो वृत्तों की त्रिज्याएं समान हों, तो वे वृत्त सर्वांगसम होंगें।**



चित्र–8.15

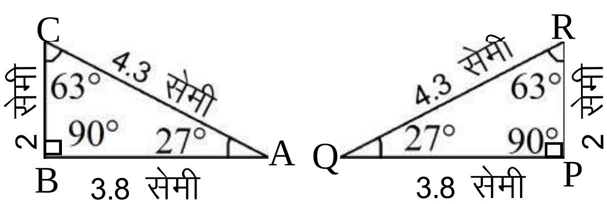
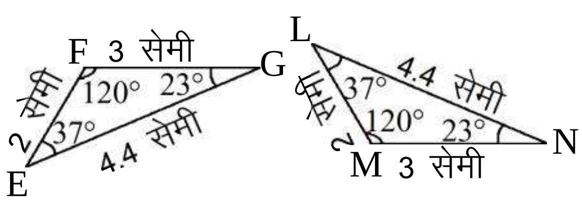
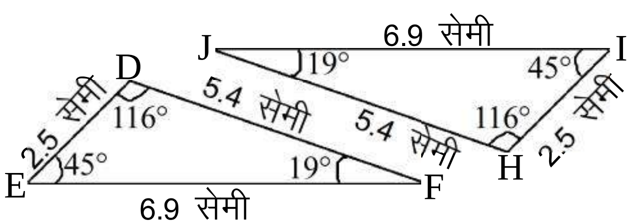
त्रिभुजों की सर्वांगसमता

अब आप समझ ही चुके होंगे कि दो या दो से अधिक रेखाखण्डों से बनी हुई आकृतियाँ तभी सर्वांगसम होंगी, जब पहली आकृति की सभी भुजाएं दूसरी आकृति की संगत भुजाओं के तुल्य हों तथा पहली आकृति के सभी कोण दूसरी आकृति के संगत कोणों के तुल्य हों।

6GDNAY

क्रियाकलाप–5

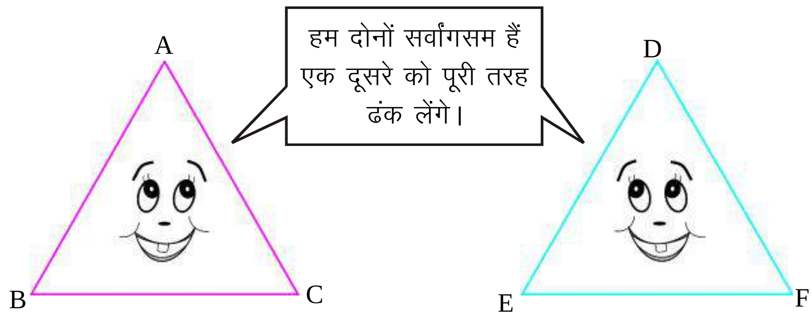
नीचे सर्वांगसम त्रिभुजों के जोड़े दिए गए हैं। उनमें पहले त्रिभुज की कौन–कौन सी भुजाएं एवं कोण, दूसरे त्रिभुज की किस–किस संगत भुजा एवं कोण के तुल्य हैं? लिखिए–

चि.सं.	सर्वांगसम त्रिभुज	समान भुजाएं	समान कोण
8.16		AB = PQ BC = PR CA = RQ	∠CBA = ∠RPQ ∠BCA = ∠PRQ ∠CAB = ∠RQP
8.17			
8.18			

यदि दो सर्वांगसम त्रिभुजों में से एक त्रिभुज को दूसरे त्रिभुज के ऊपर रखें तो पहले त्रिभुज के जो शीर्ष, दूसरे त्रिभुज के जिस शीर्ष को ढंकते हैं वे परस्पर संगत होते हैं तथा पहले त्रिभुज की जो भुजा दूसरे त्रिभुज की जिस भुजा को ढकती है, वह भी संगत होते हैं। इसी प्रकार पहले त्रिभुज के जो कोण दूसरे त्रिभुज के जिस कोण को पूरा–पूरा ढंकते हैं, वे भी संगत होते हैं।

उदाहरण– दो सर्वांगसम त्रिभुजों ABC और DEF को एक–दूसरे के ऊपर रखने पर यदि

शीर्ष A, शीर्ष D पर पड़ता है
शीर्ष B, शीर्ष E पर पड़ता है और
शीर्ष C, शीर्ष F पर पड़ता है



चित्र–8.19

तो हम कहेंगे कि ΔABC सर्वांगसम है ΔDEF के न कि ΔEDF या ΔFDE या ΔFED के। क्योंकि शीर्ष A$\leftrightarrow$ शीर्ष D पर, शीर्ष B$\leftrightarrow$ शीर्ष E पर तथा शीर्ष C$\leftrightarrow$ शीर्ष F पर पड़ती है।

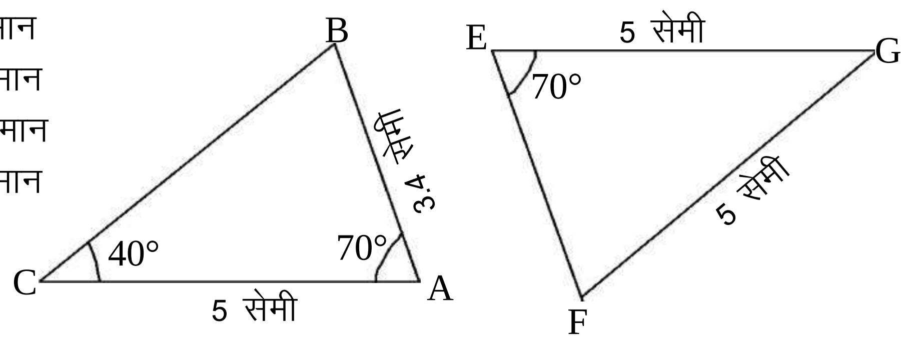
अर्थात् अब हम कह सकते हैं $\Delta BAC \cong \Delta EDF$

अब आप बताइए कि क्या
1) $\Delta CAB \cong \Delta FDE$
2) $\Delta CBA \cong \Delta FED$
3) $\Delta BCA \cong \Delta EFD$
4) $\Delta ACB \cong \Delta DFE$ होगा?

अपने उत्तर का कारण भी दीजिए।

उदाहरण 1. संलग्न चित्र में $\Delta ABC \cong \Delta EFG$ है। निम्न का मान ज्ञात कीजिए–

1) EF का मान
2) BC का मान
3) $\angle G$ का मान
4) $\angle F$ का मान



चित्र–8.20

हल दिया गया है कि $\Delta ABC \cong \Delta EFG$

अतः ΔABC के सभी अवयव ΔEFG के सभी संगत अवयवों के बराबर होंगे।

1) चूंकि $EF \leftrightarrow AB$, y $EF = 3.4$ सेमी

2) चूंकि $BC \leftrightarrow FG$, y $BC = 5$ सेमी

3) चूंकि $\angle G \leftrightarrow \angle C$, $\angle G = 40°$

4) $\angle EFG$ में, $\angle E + \angle F + \angle G = 180°$

$\Rightarrow 70° + \angle F + 40 = 180°$ $(\angle G = 40°)$

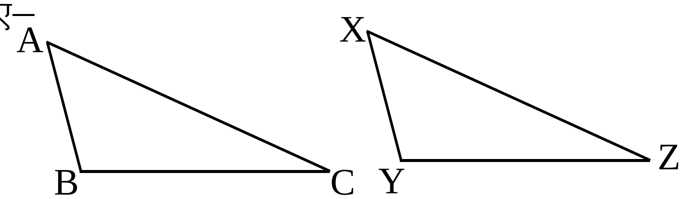
$\Rightarrow \angle F + 110° = 180°$

$\Rightarrow \angle F = 180° - 110°$

y $\angle F = 70°$

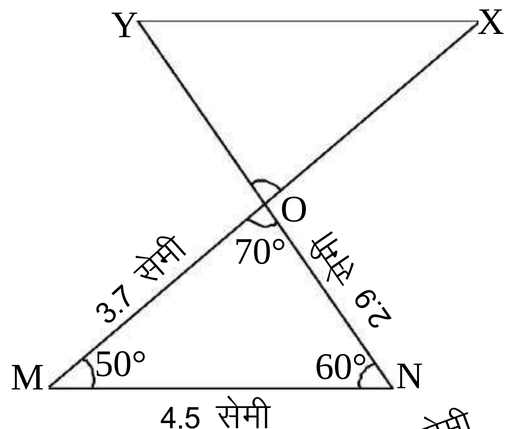
प्रश्नावली 8.1

प्र.1 यदि $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$ हो, तो लिखिए–

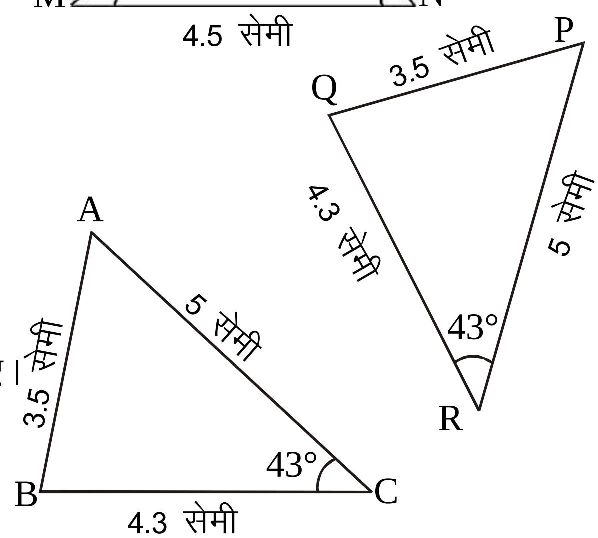


1. $\angle A$ = ...
2. ....= $\angle Y$
3. ....= $\angle Z$
4. AB = ...
5. ....= YZ
6. ....= XZ

प्र.2 यदि $\Delta MON \cong \Delta XOY$ हो, तो ΔXOY की भुजाओं और कोणों की माप बताइए।



प्र.3 यदि $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ हो, तो निम्नांकित में से सत्य एवं असत्य कथनों के लिए बॉक्स में सही (✓) या गलत (×) का चिह्न लगाइए।



1. $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ ☐
2. $\Delta BCA \cong \Delta RPQ$ ☐
3. $\Delta CAB \cong \Delta RPQ$ ☐
4. भुजा AC = भुजा QR ☐
5. $\angle B = \angle Q$ ☐
6. $\Delta PRQ \cong \Delta ACB$ ☐
7. $\angle P = \angle C$ ☐

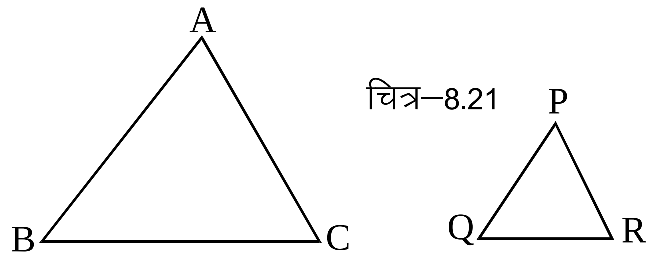
त्रिभुजों में सर्वांगसमता की जाँच के नियम

दो त्रिभुज सर्वांगसम होने पर एक त्रिभुज के सभी कोण दूसरे त्रिभुज के संगत कोणों के बराबर होते हैं, किन्तु क्या एक त्रिभुज के सभी कोण दूसरे त्रिभुज के संगत कोणों के बराबर होने पर दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होंगे?

यहां $\angle A = \angle P$

$\angle B = \angle Q$

$\angle C = \angle R$



चित्र–8.21

ऊपर ΔABC और ΔPQR के संगत कोण आपस में बराबर हैं परन्तु दोनों त्रिभुज सर्वांगसम नहीं है। क्यों?

''एक त्रिभुज के तीनों कोण दूसरे त्रिभुज के तीनों संगत कोणों के बराबर होने मात्र से ही दोनों त्रिभुज सर्वांगसम नहीं होते हैं बल्कि उनकी संगत भुजाएं भी आपस में बराबर होनी चाहिए।'' इस प्रकार दोनों त्रिभुजों के तीनों संगत कोण और तीनों संगत भुजाएं अर्थात् सभी छः संगत अवयवों के माप समान होने चाहिए।

आपने त्रिभुजों की सर्वांगसमता के बारे में पढ़ा है। आप त्रिभुज की रचना करना भी जानते हैं, क्या आप दो सर्वांगसम त्रिभुजों की रचना कर सकते हैं?

सभी विद्यार्थी त्रिभुज की रचना करना जानते थे किन्तु दो सर्वांगसम त्रिभुज की रचना कैसे की जाए? वे सोचने लगे। तभी राजेश ने कहा– ''किसी त्रिभुज की रचना कुछ मापों को लेकर की जाती है। यदि समान मापों को लेकर दो त्रिभुज की भी रचना कर दी जाए तो दोनों त्रिभुजों की सभी भुजाएं एवं कोणों के माप समान होंगे। इस प्रकार बने दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होंगे।''

अनु ने कहा, ''हमने तीन प्रकार से त्रिभुज बनाना सीखा है। **पहला**– जब तीनों भुजाएं दी हुई हों, **दूसरा**– जब दो भुजाएं और उनके बीच का कोण दिया हुआ हो तथा **तीसरा**– जब एक भुजा एवं दो कोण दिए हुए हों। इन तीनों प्रकार से हम एक ही माप की दो–दो त्रिभुजें बनाकर सर्वांगसम त्रिभुज बना सकते हैं। चलो ऐसे ही मापों को लेकर हम दो–दो सर्वांगसम त्रिभुज बनाते हैं।

आप भी त्रिभुजों की रचना सम्बन्धी प्रश्न बनाइए और अपने साथियों को आपके द्वारा दिए गए मापों के सर्वांगसम त्रिभुज की रचना करने को दीजिए।

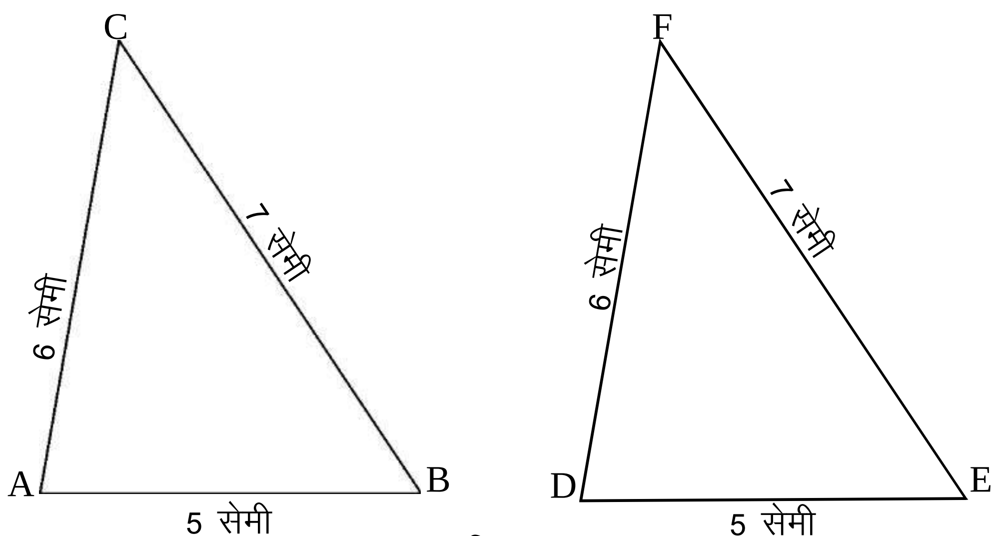
क्रियाकलाप–6

राधा ने प्रश्न बनाया– ''सर्वांगसम त्रिभुजों की रचना कीजिए जिनकी भुजाओं के माप क्रमशः 5 सेमी, 6 सेमी और 7 सेमी हैं।''

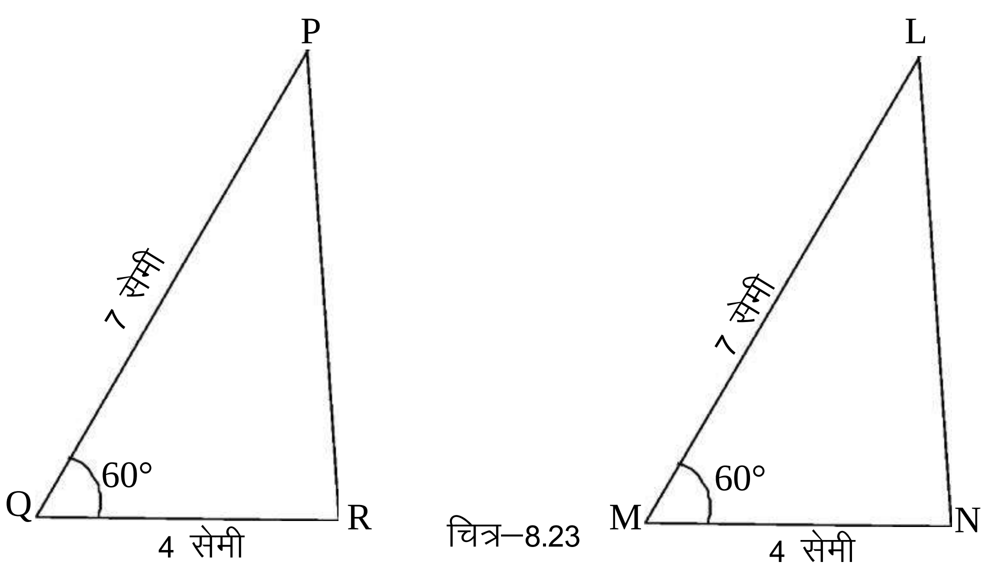
अनु ने प्रश्न बनाया– ''सर्वांगसम त्रिभुजों की रचना कीजिए जिनकी दो भुजाएं क्रमशः 4 सेमी और 7 सेमी है तथा इन भुजाओं के बीच का कोण 60° है।

हरि ने प्रश्न बनाया– ''सर्वांगसम त्रिभुजों की रचना कीजिए जिसकी एक भुजा की माप 7 सेमी तथा उस भुजा पर बने कोण क्रमश 50° और 70° के हैं।

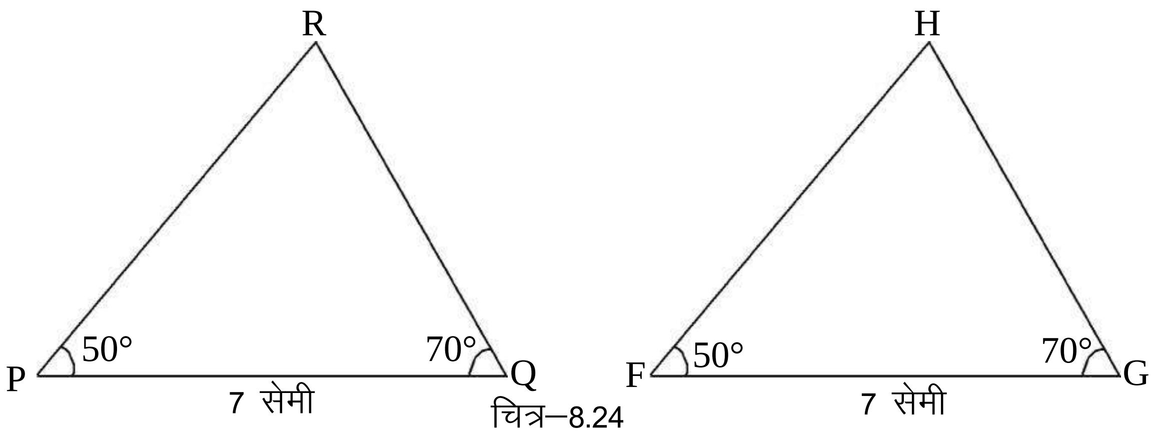
राधा, अनु और हरि द्वारा बनाए गए प्रश्नों के अनुसार दो–दो त्रिभुज नीचे बनाए गए हैं। आप इन त्रिभुजों के सभी अवयवों का माप ज्ञात कर देखिए कि ये सर्वांगसम हैं अथवा नहीं?



चित्र–8.22



चित्र–8.23

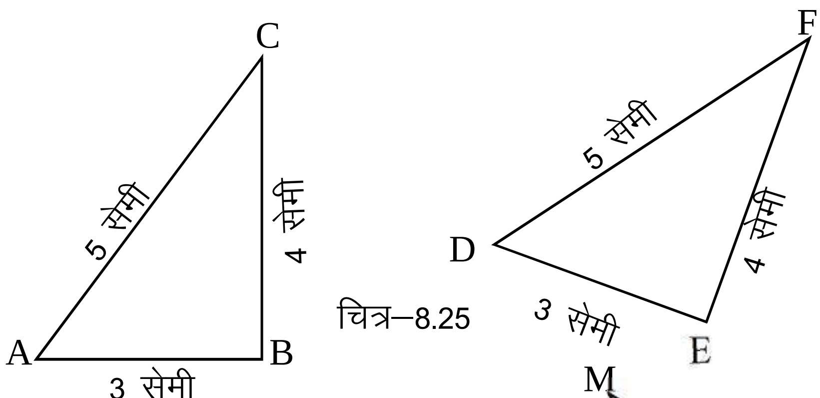


चित्र–8.24

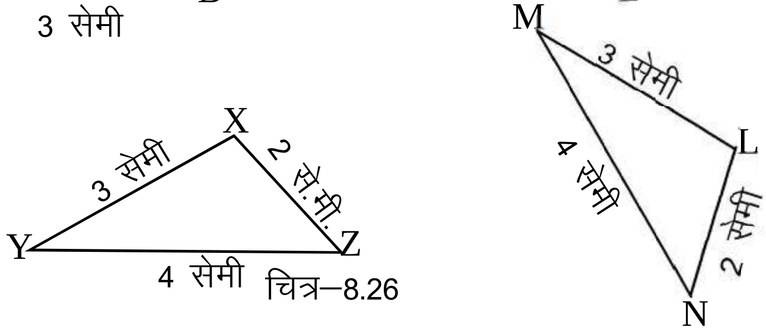
ऊपर चित्र क्रमांक–8.22 में त्रिभुजों की संगत भुजाएं समान माप की हैं और आप पाते हैं कि त्रिभुजों के संगत कोणों की माप भी समान है। अतः दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं। तो क्या हमेशा दो त्रिभुजों की संगत भुजाएं समान होने पर दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होंगे?

इसी प्रकार चित्र क्रमांक–8.23 में दोनों त्रिभुजों की दो भुजा और उनके बीच का कोण बराबर माप की है और आप पाते हैं कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम है तथा चित्र क्रमांक–8.24 में दोनों त्रिभुजों की दो कोण और एक भुजा बराबर माप की है। आप यह भी पायेंगे कि ये दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं। तो क्या हर बार इन गुणों के आधार पर हम कह सकते हैं कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होंगे? आइए, जांच करें–

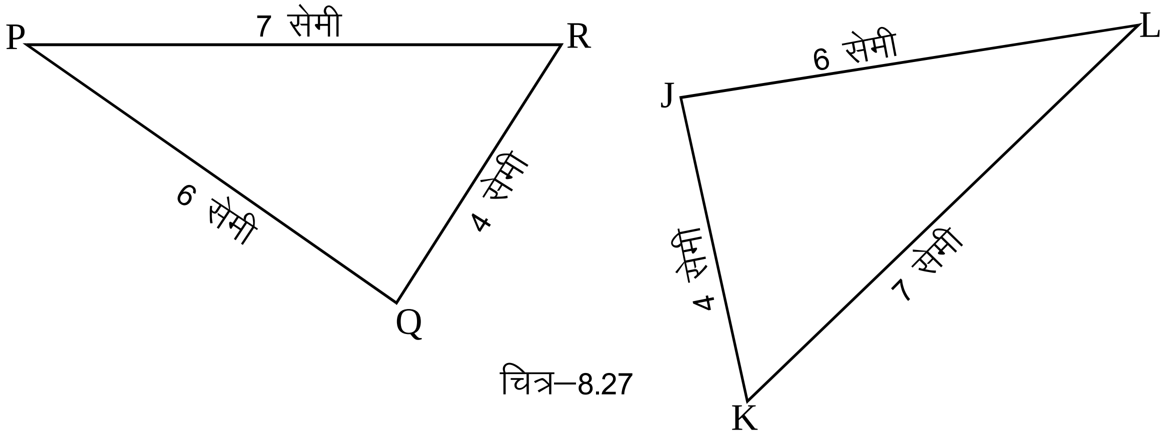
भुजा–भुजा–भुजा (S.S.S.) सर्वांगसमता नियम



चित्र–8.25



चित्र–8.26

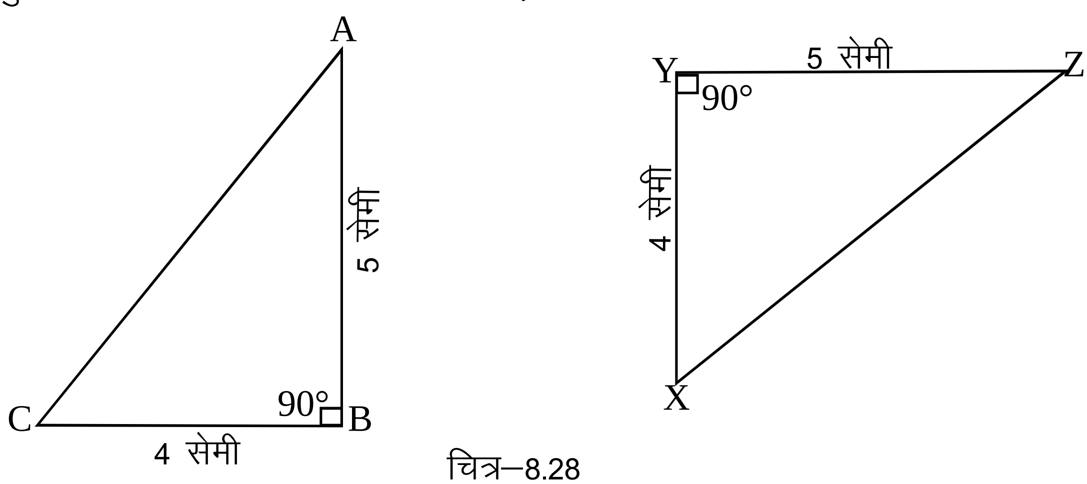


चित्र–8.27

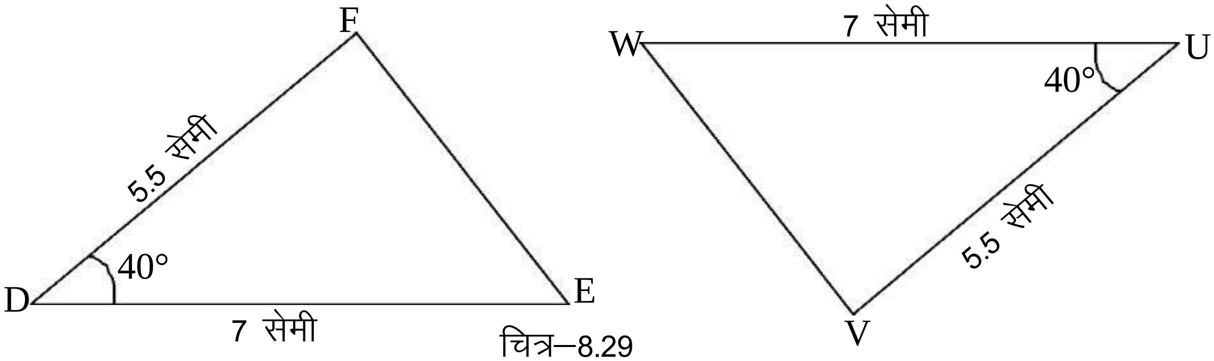
चित्र–8.25, 8.26 एवं 8.27 में दिए गए त्रिभुज सर्वांगसम हैं। अतः किसी त्रिभुज की भुजाएं दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं के बराबर हों तो वे त्रिभुज सर्वांगसम त्रिभुज कहलाते हैं। सर्वांगसम होने के इस गुण को **भुजा–भुजा–भुजा सर्वांगसमता** या संक्षेप में भु–भु–भु सर्वांगसमता **(S.S.S. Congruence)** कहते हैं।

भुजा कोण भुजा (S.A.S.) सर्वांगसमता नियम

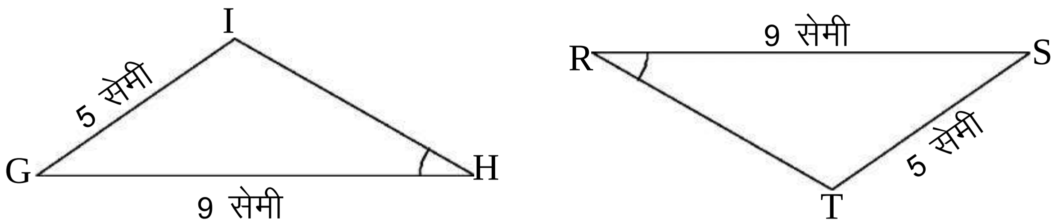
नीचे चित्रों में दो–दो त्रिभुजों का युग्म दिया गया है। प्रत्येक युग्म में पहले त्रिभुज की दो भुजाएं और उनके बीच का कोण दूसरे त्रिभुज की संगत दो भुजाओं और एक कोण के बराबर है। दोनों त्रिभुज सर्वांगसम है या नहीं? जांच कीजिए–



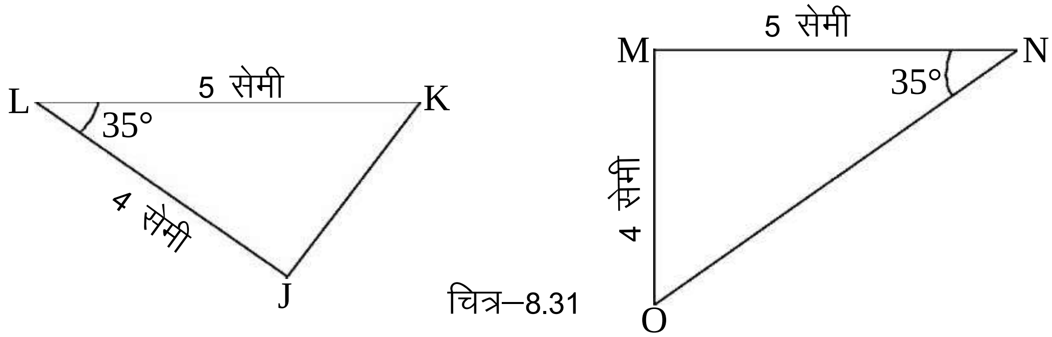
चित्र–8.28



चित्र–8.29



चित्र–8.30



चित्र–8.31

उपरोक्त चित्र–8.28, 8.29 एवं 8.30 में दिए गए त्रिभुज सर्वांगसम हैं किन्तु चित्र–8.31 में दिए गए त्रिभुज सर्वांगसम नहीं है। क्यों? सोचकर कारण अपनी कॉपी में लिखिए।

चित्र–8.31 में संगत भुजाएं तो समान माप की है किन्तु संगत दोनों कोणों की माप समान नहीं हैं क्योंकि पहले त्रिभुज में 35° का कोण 4 सेमी और 5 सेमी माप की भुजाओं के मध्य बना है परन्तु दूसरे त्रिभुज में 35° का कोण 5 सेमी माप की भुजा और तीसरी भुजा के मध्य बना है। इस कारण पहले त्रिभुज के सभी छः अवयव दूसरे त्रिभुज के सभी छः संगत अवयवों के समान नहीं हो रहे हैं। अतः त्रिभुज सर्वांगसम नहीं है।

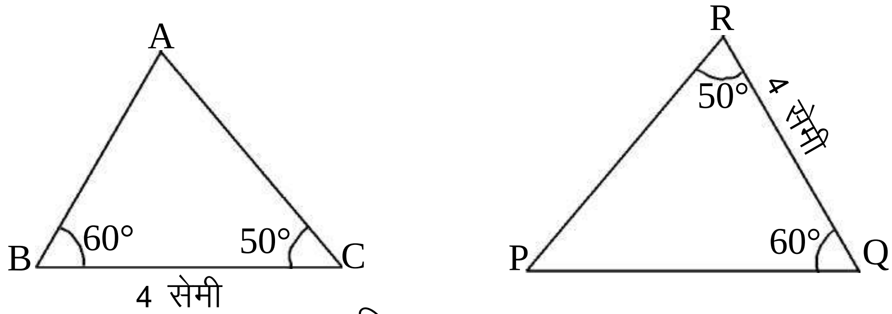
यदि पहले त्रिभुज की दो भुजाएं एवं उनके बीच का कोण, दूसरे त्रिभुज की संगत दो भुजाओं एवं उनके बीच कोण के बराबर हो, तो वे दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं तथा इस सर्वांगसमता को **''भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता''** या संक्षेप में भु–को–भु सर्वांगसमता **(SAS Congruence)** कहते हैं।

कोण भुजा कोण (A.S.A.) सर्वांगसमता नियम

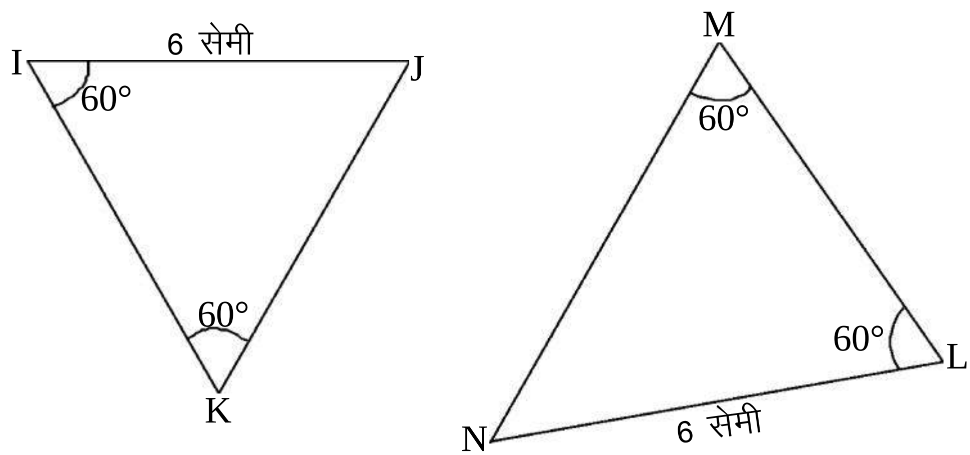
पहले त्रिभुज की एक भुजा दूसरे त्रिभुज की संगत भुजा के समान हो तथा पहले त्रिभुज के दो कोण दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों के समान हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। सर्वांगसमता के इस गुण को कोण–भुजा–कोण सर्वांगसमता या संक्षेप में ''को–भु–को'' सर्वांगसमता (ASA Congruence) कहते हैं।

क्रियाकलाप–7

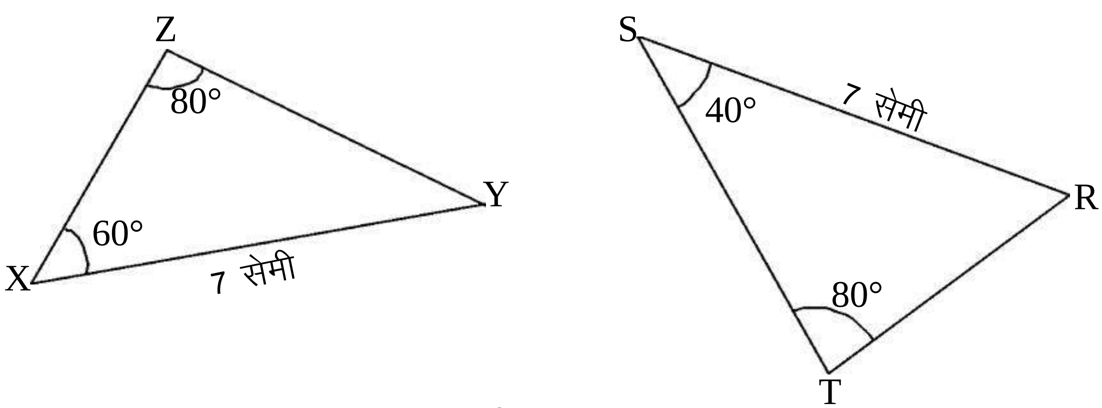
नीचे चित्रों में दो–दो त्रिभुजों के युग्म दिए गए हैं। प्रत्येक युग्म में पहले त्रिभुज की एक भुजा और दो कोण, दूसरे त्रिभुज की संगत भुजा और दो कोण के बराबर है। प्रत्येक युग्म के दोनों त्रिभुजों के सभी भुजा और कोणों को माप कर जाँच कीजिए कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं अथवा नहीं। यदि नहीं तो क्यों?



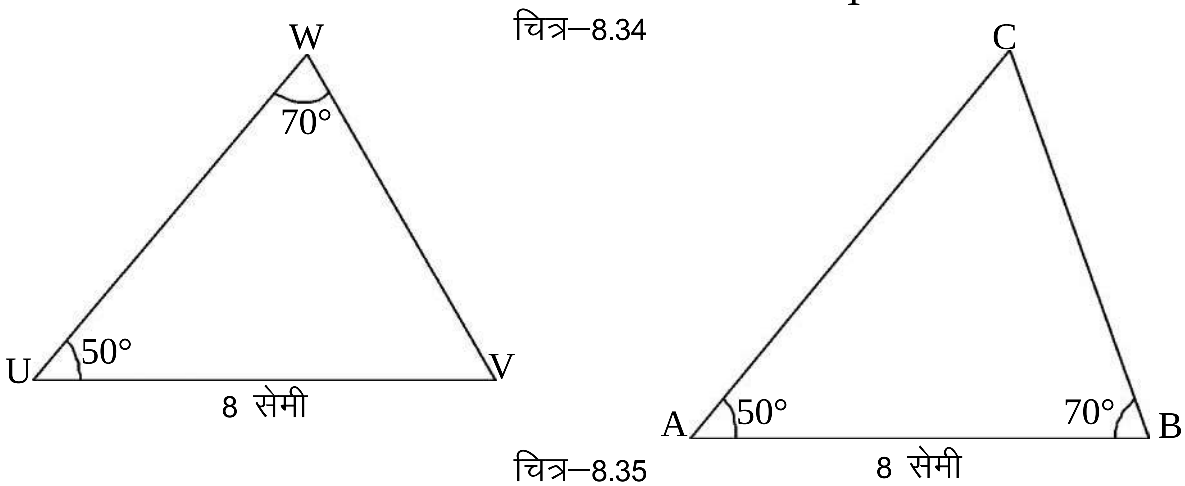
चित्र–8.32



चित्र–8.33

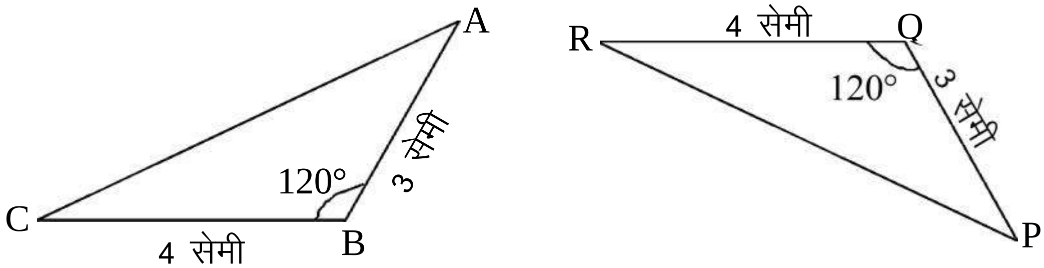


चित्र–8.34



चित्र–8.35

उदाहरण 2. नीचे दो त्रिभुज CAB और RPQ दिये गये हैं। बताइये कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम है या नहीं? शेष अवयवों को मापकर उनके बीच सम्बन्ध बताइए।



चित्र–8.36

हल यहां ΔCAB और ΔRPQ में,

$BC = QR = 4$ सेमी

$\angle B = \angle Q = 120°$

और $AB = PQ = 3$ सेमी

यहाँ की ΔCAB दो भुजाएँ और उनके बीच का कोण ΔRQP की दो संगत भुजाओं और उनके बीच के कोण के बराबर है।

अतः भुजा–कोण–भुजा (S.A.S.) सर्वांगसमता से स्पष्ट है कि

$$\Delta CAB \cong \Delta RPQ$$

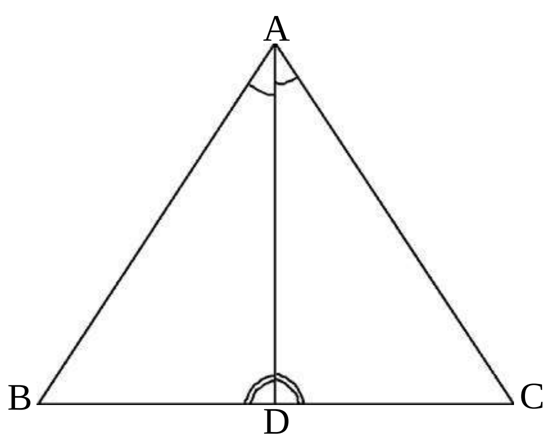
पुनः दोनों त्रिभुजों में,

$AC = PR = 6.1$ सेमी, $\angle C = \angle R = 26°$

एवं $\angle A = \angle P = 34°$

अतः भुजा $AC \leftrightarrow$ भुजा PR, $\angle C \leftrightarrow \angle R$ और $\angle A \leftrightarrow \angle P$

उदाहरण 3. नीचे आकृति में दो त्रिभुज दिये गये हैं। दोनों त्रिभुजों में जो संगत भाग बराबर हैं, उन्हें दर्शाया गया है। बताइए कि $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ है या नहीं?



चित्र–8.37

हल चित्र में ΔABD और ΔACD बनते हैं।

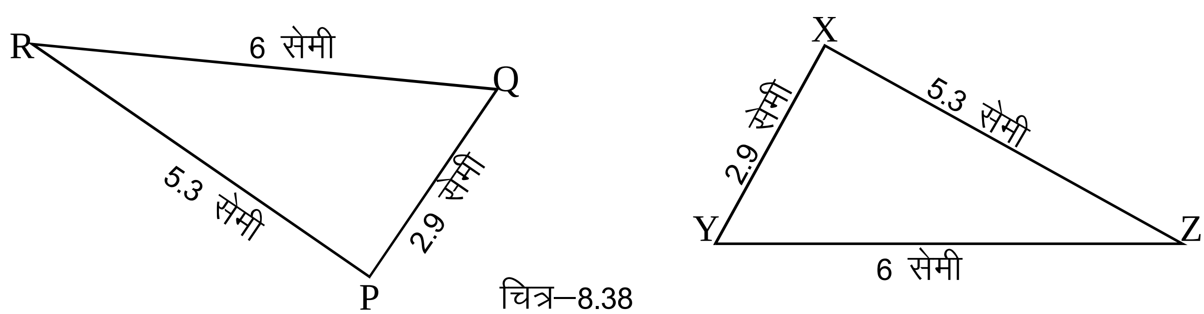
जिसमें $\angle BAD = \angle CAD$ (चित्र में दिया हुआ है)

$AD = AD$ (उभयनिष्ठ है)

और $\angle ADB = \angle ADC$ (चित्र में दिया हुआ है)

अतः कोण–भुजा–कोण (A.S.A.) सर्वांगसमता से, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$

उदाहरण 4. नीचे दिए हुए त्रिभुजों में भुजाओं की मापों को देखकर सर्वांगसमता स्थापित कीजिए–



चित्र–8.38

हल दिये गये चित्रानुसार ΔPQR और ΔXYZ में,

$PQ = XY = 2.9$ सेमी (चित्र में दिया हुआ है)

$QR = YZ = 6$ सेमी (चित्र में दिया हुआ है)

$RP = ZX = 5.3$ सेमी (चित्र में दिया हुआ है)

अतः भुजा–भुजा–भुजा (S.S.S.) सर्वांगसमता से, $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$

अर्थात् दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

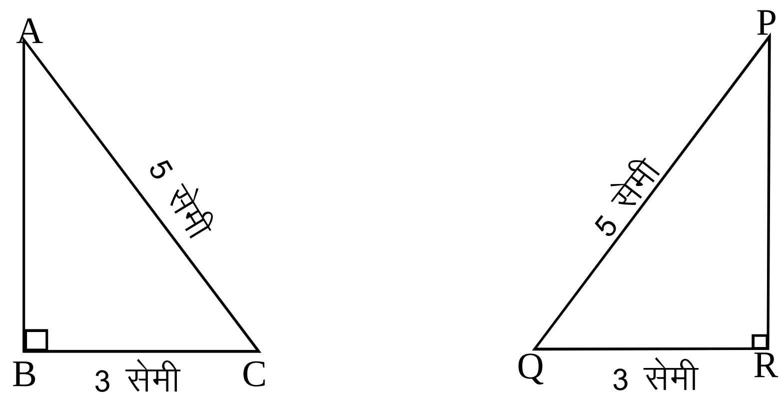
समकोण कर्ण भुजा (R.H.S.) नियम

सर्वांगसमता के तीनों नियम सभी त्रिभुजों पर लागू होते हैं, परन्तु समकोण कर्ण भुजा नियम समकोण त्रिभुज पर ही लागू होता है।

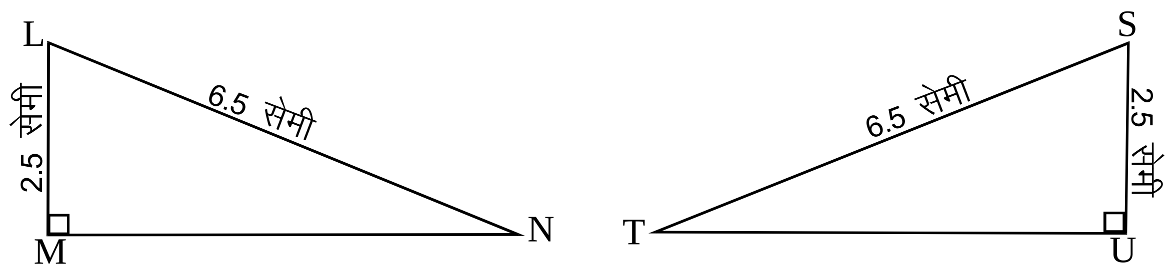
"यदि किसी समकोण त्रिभुज का कर्ण व एक भुजा दूसरे समकोण त्रिभुज के कर्ण व एक भुजा के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। सर्वांगसमता के इस गुण को समकोण कर्ण भुजा सर्वांगसमता (R.H.S. Congruence) कहते हैं।

क्रियाकलाप–8

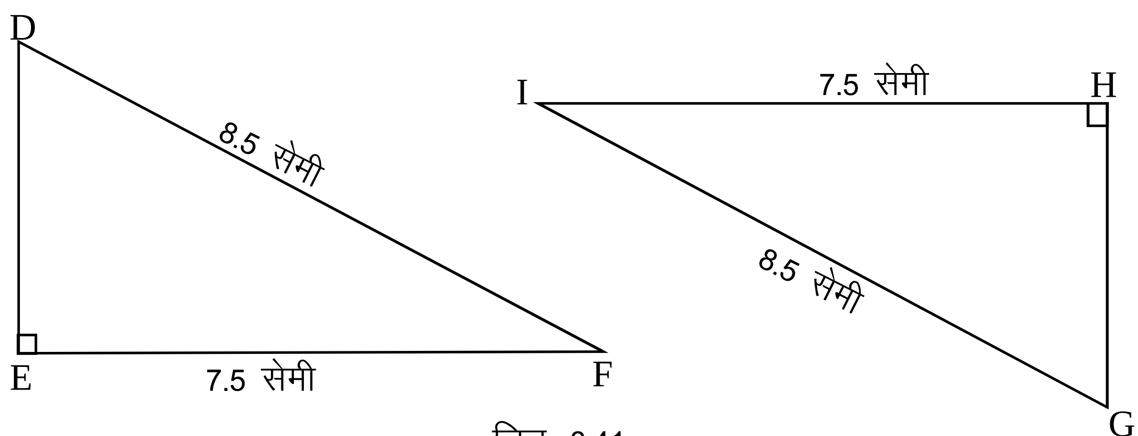
आगे चित्रों में दो–दो समकोण त्रिभुजों के युग्म दिए गए हैं। प्रत्येक युग्म में पहले त्रिभुज का कर्ण व भुजा, दूसरे त्रिभुज के कर्ण व भुजा के बराबर हैं। प्रत्येक युग्म के दोनों त्रिभुजों की तीसरी भुजा व कोणों को माप कर जाँच कीजिए कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम है अथवा नहीं। यदि नहीं तो क्यों?



चित्र–8.39

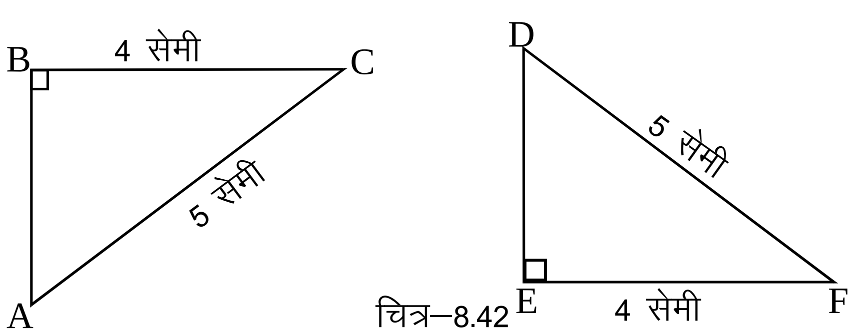


चित्र–8.40



चित्र–8.41

उदाहरण 5. नीचे दिए गए त्रिभुजों को देखकर बताइए कि $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ है या नहीं? कारण भी दीजिए।



चित्र–8.42

हल दिये गये ΔABC और ΔDEF में,

$AC = DF = 5$ सेमी (कर्ण)

$BC = EF = 4$ सेमी (भुजा)

और $\angle B = \angle E = 90°$ (समकोण)

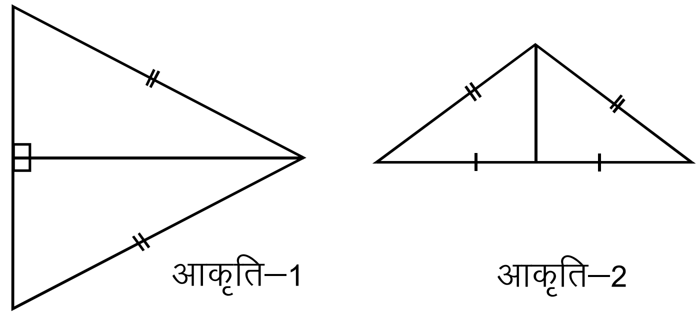
अतः R.H.S. सर्वांगसमता से, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

प्रश्नावली 8.2

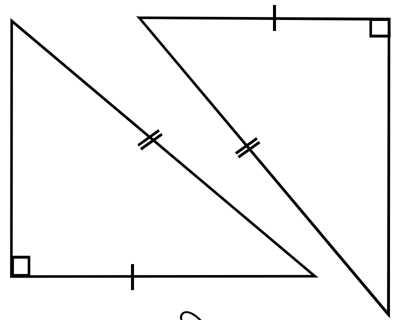
1. नीचे दो त्रिभुजों ABC और DEF के कुछ माप दिए गए हैं। मापों के आधार पर बताइए कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम है या नहीं। यदि सर्वांगसम है, तो सर्वांगसमता का नियम भी लिखिए? एक उदाहरण हल करके दिया गया है, उसके अनुसार शेष प्रश्नों को हल करें।

क्र.	त्रिभुजों की माप		सर्वांगसम है या नहीं	सर्वांगसम नियम
1.	AB=7 सेमी, BC=5 सेमी CA=9 सेमी	DE=7 सेमी, EF=5 सेमी FD=9 सेमी	हां	भु.भु.भु.
2.	BC=3.5 सेमी, CA=6.2 सेमी $\angle C=47°$	EF=3.5 सेमी FD=6.2 सेमी $\angle F=45°$	....	....
3.	$\angle B=90°$, BA=5 सेमी, AC=13 सेमी	$\angle E=90°$, ED=5 सेमी, DF=13 सेमी	....	....
4.	AB=7.1 सेमी, $\angle A=30°$, $\angle B=43°$	DE=7.1 सेमी $\angle D=30°$, $\angle E=43°$	....	....
5.	$\angle C=110°$, $\angle B=30°$ BC=5.5 सेमी	$\angle F=30°$, $\angle E=110°$ EF=5.5 सेमी	....	....
6.	CB=8 सेमी, $\angle C=90°$, AB=10 सेमी	FE= 8 सेमी, $\angle E=90°$, DF=10 सेमी	....	....
7.	AB=6 सेमी, BC=8.2 सेमी CA=7.8 सेमी	DF=6 सेमी, EF=8.2 सेमी ED=7.8 सेमी	....	....

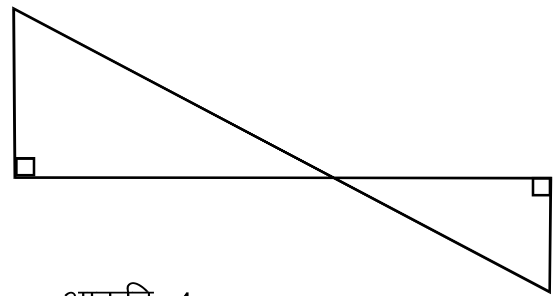
प्र.2 दिए गए आकृतियों में दोनों त्रिभुजों के सर्वांगसमता की जाँच कीजिए। सर्वांगसमता नियम का उल्लेख भी कीजिए–



आकृति–1 आकृति–2

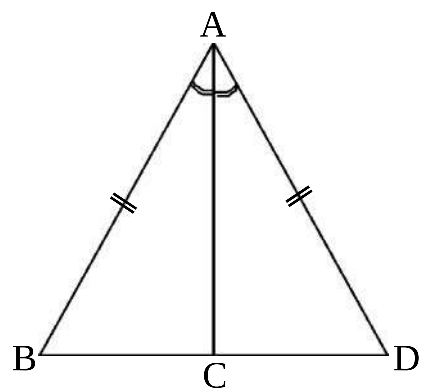


आकृति–3



आकृति–4

प्र.3 यदि दी गई आकृति में AB=AD, ∠BAC=∠DAC तो क्या ΔABC≅ΔADC? यदि हां तो क्यों?

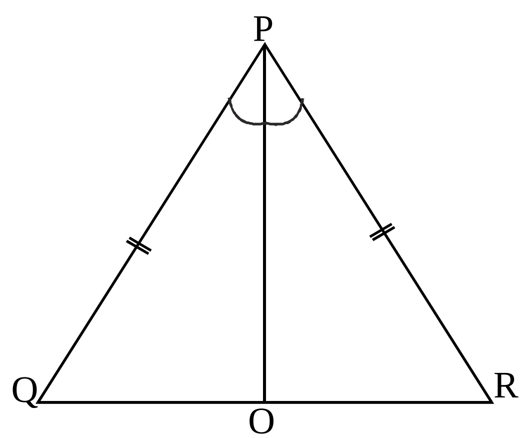


प्र.4 ΔPQR एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें PQ=PR यदि PO, ∠P को समद्विभाजित करता है और आधार QR से बिन्दु O पर मिलता है, तो कौनसा कथन सत्य है और कौनसा कथन असत्य–

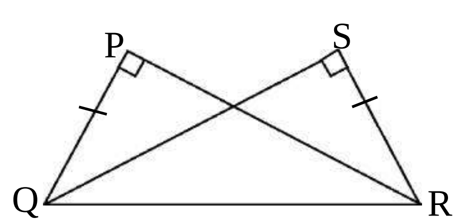
i) ΔPOQ≅ΔPOR

ii) ΔPQR≅ΔPQO

iii) ΔPRQ≅ΔPRO



प्र.5 दी गई आकृति में ∠P=∠S=90° तथा PQ=SR तो क्या ΔPQR और ΔSQR सर्वांगसम हैं? कारण भी लिखिए।



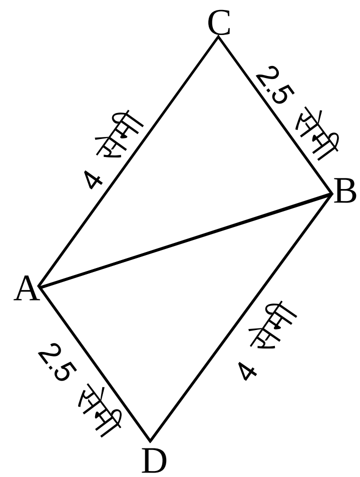
प्र.6 दिये गये दो त्रिभुजों में कौनसी संगतता में सर्वांगसम हैं?

i) $\Delta ABC \cong \Delta ABD$

ii) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

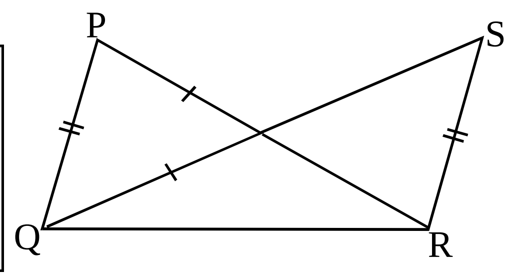
iii) $\Delta ABC \cong \Delta DBA$

iv) $\Delta ABC \cong \Delta DAB$



प्र.7 दिये गये ΔPQR तथा ΔSRQ में यदि $PR=SQ$ एवं $PQ=SR$ है, तो उचित संगतता के साथ दिखाइये कि ये त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

6GHJCL



हमने सीखा

1. नियत लम्बाई के दो रेखा खण्ड एक–दूसरे को पूरी तरह ढंक लेते हैं इसलिए सर्वांगसम होते हैं।
2. समान माप और आकार की दो आकृतियां सर्वांगसम होती हैं।
3. दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज के तीनों भुजाएं एवं तीनों कोण दूसरे त्रिभुज के तीनों संगत भुजाएं एवं तीनों संगत कोणों के बराबर हों।
4. दो सर्वांगसम त्रिभुजों में एक त्रिभुज की तीनों भुजाएं एवं तीनों कोण दूसरे त्रिभुज के संगत भुजाओं एवं कोणों के तुल्य होते हैं।
5. किसी त्रिभुज की दो भुजाओं और उनके बीच का कोण यदि दूसरे त्रिभुज की संगत दो भुजाओं और उनके बीच बने कोण के समान हों तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। इसे भुजा कोण भुजा (SAS) सर्वांगसमता कहते हैं।
6. किसी त्रिभुज के तीनों भुजाएं दूसरे त्रिभुज के संगत तीनों भुजाओं के बराबर हों तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। इसे भुजा भुजा भुजा (SSS) सर्वांगसमता कहते हैं।
7. किसी त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा दुसरे त्रिभुज के संगत दो कोणों और भुजाओं के अलग–अलग बराबर हो तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। इसे कोण–भुजा–कोण (ASA) सर्वांगसमता कहते हैं।
8. किसी समकोण त्रिभुज का कर्ण व एक भुजा, दूसरे समकोण त्रिभुज के कर्ण व एक भुजा के अलग–अलग बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। इसे समकोण कर्ण भुजा (R.H.S.) सर्वांगसमता कहते हैं।