अध्याय–12

समीकरण

EQUATION

9X5SHF

पिछली कक्षा में आप निम्न प्रकार के समीकरणों को हल कर चुके हैं। आइये, कुछ और सरल समीकरणों को हल करें।

क्र.सं.	समीकरण	समीकरण का हल
1.	$3x + 9 = 12$	$x = 1$
2.	$3x + 5 = 8$	----------------------
3.	$5x + 9 = 2x + 12$	----------------------
4.	$6x + 18 = 24$	----------------------
5.	$x + 3 = 4$	----------------------

ऊपर के समीकरणों को हल करते हुए शैली ने अनु से कहा कि सभी समीकरणों के हल $x = 1$ प्राप्त हो रहे हैं। समीकरण तो अनेक हैं, लेकिन सभी समीकरणों के हल एक ही है, ऐसा क्यों?

इन समीकरणों को ध्यान से देखिए। आप पाते हैं कि पहले समीकरण से ही दूसरा समीकरण बना है, पहले समीकरण के दोनों पक्षों में 4 घटाने पर दूसरा समीकरण प्राप्त हुआ है। अतः दोनों समीकरणों का हल एक ही है। इसी प्रकार, पहले समीकरण के दोनों पक्षों में $2x$ जोड़ने पर तीसरा समीकरण प्राप्त हुआ।

पहले समीकरण में 2 का गुणा तथा 3 का भाग देने पर क्रमशः चौथा और पाँचवाँ समीकरण प्राप्त हुआ है। तभी रहीम ने कहा – चूँकि प्रत्येक बार समान संख्या से एक ही प्रकार की संक्रिया दोनों पक्षों में की जा रही है, इसलिए उसका हल नहीं बदल रहा है।

अतः

(i) किसी भी समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ने या घटाने पर,

(ii) किसी भी समीकरण के दोनों पक्षों में समान शून्येत्तर (जो शून्य न हो) संख्या का गुणा या भाग करने पर, समीकरण के हल में कोई अन्तर नहीं आता।

किसी समीकरण के दोनों पक्षों में शून्य से गुणा करने अथवा शून्य से भाग देने पर क्या होगा? सोचिए, अपने साथियों एवं अध्यापक से चर्चा कीजिए।

क्रियाकलाप–1.

अब आप भी नीचे दी गई सारणी में निर्देशानुसार नया समीकरण बनाइये।

सारणी 12.1

क्र.सं.	समीकरण	दोनों पक्षों में की जाने वाली संक्रियाएं	नया समीकरण
1.	$5x + 6 = 11$	5 जोड़ने पर	$5x + 11 = 16$
2.	$17x - 8 = 22$	$4x$ घटाने पर	----------------------
3.	$4x - 5 = 2x + 9$	6 जोड़ने पर	----------------------
4.	$3x + 2 = 5$	2 गुणा करने पर	----------------------
5.	$6x + 15 = 9$	3 से भाग देने पर	----------------------
6.	$2x - 7 = 11$	$3x$ जोड़ने पर	----------------------

आप पिछली कक्षा में निम्न प्रकार के समीकरण भी हल कर चुके हैं –

जैसे, $\frac{x}{7} = 3$ को हल करने के लिए बाएँ पक्ष के हर से 7 हटाना होगा, इस हेतु समीकरण के दोनों पक्षों में 7 का गुणा करते हैं–

अर्थात् $\frac{x}{7} \times 7 = 3 \times 7$

$\Rightarrow x = 21$

अब यदि समीकरण $\frac{7}{x} = 1$ हो, तो आप इसे कैसे हल करेंगे?

यहाँ भी समीकरण के हर से x हटाने के लिए समीकरण के दोनों पक्षों में x का गुणा करना होगा।

इस प्रकार, बीजीय हर वाली समीकरण से हर को विलोपित किया जाता है।

नीचे सारणी में दिए गए निर्देशों के अनुसार समीकरणों को हल कीजिए–

सारणी 12.2

क्र.सं.	समीकरण	समीकरण के एक पक्ष को अंश/हर के रुप में लिखने पर	दोनों पक्षों में हर को गुणा करने पर	समीकरण को रेखिय रूप में लिखने पर	चर एवं अचर का पक्षान्तर करने पर	हल
1.	$\frac{8x+5}{2x+7} - 3 = 0$	$\frac{8x+5}{2x+7} = 3$	$\frac{(8x+5)\cancel{(2x+7)}}{\cancel{2x+7}} = 3(2x+7)$	$8x + 5 = 6x + 21$	$8x - 6x = 21 - 5$	$x = 8$
2.	$\frac{9x}{x+5} = 4$					
3.	$\frac{2y+9}{3y+10} - 3 = 0$					
4.	$\frac{3(x-3)}{x+4} = 2$					

वास्तव में इस प्रकार के प्रश्न $\frac{ax+b}{cx+d}=k$ के रूप में हैं। जहाँ a, b, c, d एवं k पूर्णांक हैं एवं x चर राशि है तथा $cx + d \neq 0$

$\mathbf{\frac{ax+b}{cx+d}=k}$ प्रकार के समीकरणों का हल–

समीकरण $\frac{6x+2}{4x+1}=2$ भी एकचरीय समीकरण है। इस समीकरण के हर में भी चर राशि है। व्यापक समीकरण $\frac{ax+b}{cx+d}=k$ से तुलना करने पर $a = 6, b = 2, c = 4, d = 1$ एवं $k = 2$ है।

इस प्रकार के समीकरणों को हल करना आप सीख चुके हैं। आइए, कुछ और समीकरणों को हल करें –

उदाहरण 1. समीकरण $\frac{2x+5}{3x+1}=\frac{3}{11}$ को हल कीजिए।

हल: दिये गये समीकरण $\frac{2x+5}{3x+1}=\frac{3}{11}$

समीकरण के दोनों पक्षों में $(3x + 1)$ से गुणा करने पर,

$$\frac{2x+5}{3x+1}\times(3x+1)=\frac{3}{11}\times(3x+1)$$

$$\Rightarrow 2x+5=\frac{3}{11}(3x+1) \qquad \text{(चरण 1)}$$

दायें पक्ष के हर से 11 विलोपित करने हेतु समीकरण के दोनों पक्षों में 11 का गुणा करने पर,

$$11\times(2x+5)=\frac{3}{11}(3x+1)\times 11$$

$$\Rightarrow 11(2x+5)=3(3x+1) \qquad \text{(चरण 2)}$$

$$\Rightarrow 22x+55=9x+3 \qquad \text{(कोष्ठक हल करने पर)}$$

$$\Rightarrow 22x-9x=3-55$$

$$\Rightarrow 13x=-52$$

$$\Rightarrow x=\frac{-52}{13}$$

$$\Rightarrow x=-4$$

जाँच: बायां पक्ष $= \dfrac{2x+5}{3x+1}$

$$= \frac{2(-4)+5}{3(-4)+1}$$

$$= \frac{-8+5}{-12+1}$$

$$= \frac{-3}{-11}$$

$$= \frac{3}{11}$$

= दायाँ पक्ष

अतः प्राप्त हल $x = -4$ ही दिये गये समीकरण का अभीष्ट हल है।

उपरोक्त उदाहरण में आप देख रहे हैं कि बाएँ पक्ष का हर $(3x+1)$ चरण, (1) में वहाँ से विलोपित होकर दाएँ पक्ष के अंश से गुणा हो जाता है। इसी प्रकार, दाएँ पक्ष का हर 11 चरण, (2) से विलोपित होकर बाएँ पक्ष के अंश से गुणा हो जाता है। इस प्रकार के परिवर्तन को वज्रगुणन कहते हैं।

इस प्रकार के प्रश्नों को वज्रगुणन या तिर्यक गुणन का उपयोग करके भी हल किया जा सकता है।

उदाहरण 2. समीकरण $\dfrac{5-7y}{2+4y} = \dfrac{-8}{7}$ को हल कीजिए।

$$\frac{5-7y}{2-4y} = \frac{-8}{7}$$

(वज्र गुणन या तिर्यक गुणा)

हल: दिये गये समीकरण–

$$\frac{5-7y}{2+4y} = \frac{-8}{7}$$

वज्र गुणा या तिर्यक गुणा करने पर,

$7\times(5-7y) = -8\times(2+4y)$

या $35 - 49y = -16 - 32y$

या $-49y + 32y = -16 - 35$ (पक्षान्तर करने पर)

या $-17y = -51$

या $y = \dfrac{-51}{-17}$

$y = 3$

उत्तर की जाँच आप स्वयं कीजिए।

उदाहरण 3. समीकरण $\frac{y-(7-8y)}{9y-(3+4y)}=\frac{11}{7}$ को हल कीजिए।

हल: दिये गये समीकरण

$$\frac{y-(7-8y)}{9y-(3+4y)}=\frac{11}{7}$$

या $\frac{y-7+8y}{9y-3-4y}=\frac{11}{7}$ (कोष्ठक हल करने पर)

या $\frac{9y-7}{5y-3}=\frac{11}{7}$

$\frac{9y-7}{5y-3} \times \frac{11}{7}$ (वज्रगुणन करने पर)

$7\times(9y-7) = 11\times(5y-3)$

या $63y-49 = 55y-33$ (कोष्ठक हल करने पर)

या $63y-55y = -33+49$ (पक्षान्तर करने पर)

या $8y = 16$

या $y = \frac{16}{8}$

$\Rightarrow$ $y = 2$

उत्तर की जाँच आप स्वयं कीजिए।

उदाहरण 4. समीकरण–

$\frac{x+0.5}{0.3x}=20$ हल कीजिए।

हल: दिये गए समीकरण–

$$\frac{x+0.5}{0.3x}=\frac{20}{1}$$

$\frac{x+0.5}{0.3x} \times \frac{20}{1}$ वज्र गुणन करने पर

$1\times(x+0.5)=20\times 0.3x$

या $x+0.5=6x$

या $6x = x + 0.5$

या $6x - x = 0.5$ (पक्षान्तर करने पर)

या $5x = 0.5$

$$5x = \frac{5}{10}$$

या $x = \frac{5}{10} \times \frac{1}{5}$ (गुणा 5 का पक्षान्तरण करने पर)

या $x = \frac{1}{10}$

या $x = 0.1$

अतः दिये गये समीकरण का अभीष्ट हल $x = 0.1$ है।

प्रश्नावली 12.1

निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए और अपने उत्तर की जाँच कीजिए।

(1) $\frac{4x+18}{5x} = 2$

(2) $\frac{5x+2}{2x+3} = \frac{7}{5}$

(3) $\frac{7m+6}{4m+2} = 2$

(4) $\frac{x-3}{x+2} = \frac{-3}{7}$

(5) $\frac{2y-5}{3y+1} = \frac{3}{13}$

(6) $\frac{8-3y}{5y+2} = \frac{1}{6}$

(7) $\frac{17-2k}{k-5} = -3$

(8) $\frac{4x-(x+7)}{3x-(5x-9)} = \frac{2}{3}$

(9) $\frac{1.5x+0.3}{3x} = \frac{3}{10}$

दैनिक जीवन में समीकरण के अनुप्रयोग

हमारे दैनिक जीवन में भी कई समस्याएं आती हैं। इन समस्याओं में ज्ञात, अज्ञात राशि या संख्याओं में कुछ सम्बन्ध होते हैं। इन सम्बन्धों को समीकरण बनाकर आसानी से हल कर सकते हैं। समीकरण हल करने के महत्वपूर्ण चरण निम्न हैं :–

1. प्रश्न को ध्यान से पढ़कर ज्ञात एवं अज्ञात राशि की पहचान करते हैं।
2. अज्ञात राशियों को x, y, z आदि अक्षरों से निरूपित करते हैं।
3. शाब्दिक समस्या के कथनों को गणितीय कथन में परिवर्तित कर समीकरण बनाते हैं।
4. समीकरण को हल करके अज्ञात राशि का मान ज्ञात करते हैं।

आइये, उपरोक्त प्रक्रिया को उदाहरणों से समझें।

उदाहरण 5. दो संख्याओं का योग 35 है एवं दोनों संख्याओं का अनुपात 1 : 4 है। वे संख्याएं ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि पहली संख्या x है।

प्रथम शर्तानुसार,

चूँकि दोनों संख्याओं का योग = 35

$\Rightarrow$ x + दूसरी संख्या = 35

$\Rightarrow$ दूसरी संख्या $= 35 - x$

द्वितीय शर्तानुसार,

संख्याओं का अनुपात = 1 : 4

या $$\frac{x}{35-x} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{x}{35-x} \times = \frac{1}{4}$$ (तिर्यक गुणन)

या $4x = 35 - x$

या $4x + x = 35$ (x का पक्षान्तर करने पर)

या $5x = 35$

या $x = \frac{35}{5}$ (5 का पक्षान्तर करने पर)

या $x = 7$

अत: एक संख्या = 7

एवं दूसरी संख्या = 35 − 7 = 28

जाँच :

1. दोनों संख्याओं का योग = 7 + 28 = 35
2. दोनों संख्याओं का अनुपात $= \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$

अत: हमारा हल सही है।

उदाहरण 6.

एक परिमेय संख्या का हर उसके अंश से 4 अधिक है। अंश में 6 जोड़ने एवं हर में 3 घटाने पर संख्या $\frac{3}{2}$ हो जाती है। वह परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि अंश x है

तो हर $= x + 4$

अत: परिमेय संख्या $= \frac{\text{अंश}}{\text{हर}} = \frac{x}{x+4}$

अंश में 6 जोड़ने पर $= x + 6$

हर में 3 घटाने पर $= (x + 4) - 3 = x + 1$

$\therefore$ नई परिमेय संख्या $= \dfrac{x+6}{x+1}$

शर्तानुसार, नई संख्या $\dfrac{3}{2}$ हो जाती है।

$$\frac{x+6}{x+1} = \frac{3}{2}$$

तिर्यक गुणा करने पर

$$\frac{x+6}{x+1} \times \frac{3}{2}$$

$2(x + 6) = 3(x + 1)$

या $2x + 12 = 3x + 3$

या $2x - 3x = 3 - 12$

$-x = -9$

$x = 9$

अतः अभीष्ट परिमेय संख्या $= \dfrac{x}{x+4} = \dfrac{9}{9+4} = \dfrac{9}{13}$

जाँच

1. $13 - 9 = 4$ अर्थात् हर, उसके अंश से 4 अधिक है।
2. 6 जोड़ने पर अंश $= 9 + 6 = 15$

   3 घटाने पर हर $= 13 - 3 = 10$

   नई संख्या $= \dfrac{15}{10} = \dfrac{3}{2}$

   अतः हमारा हल सही है।

उदाहरण 7. दो अंकीय संख्या के दोनों अंकों का योग 12 है। अंकों को उलटने से प्राप्त नवीन संख्या मूल संख्या से 18 अधिक हो जाती है, तो मूल संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि इकाई का अंक x है,

तो प्रश्नानुसार, इकाई अंक + दहाई अंक $= 12$

$\Rightarrow$ x + दहाई का अंक $= 12$

$\Rightarrow$ दहाई का अंक $= 12 - x$

अतः मूल संख्या = 10×(दहाई का अंक) + इकाई का अंक

$= 10\times(12 - x) + x$ [स्थानीयमान के अनुसार]

$= 120 - 10x + x$

$= 120 - 9x$

अब अंकों को उलटने पर इकाई अंक, दहाई एवं दहाई अंक, इकाई अंक बन जायेगा।

अतः इकाई अंक $= 12 - x$

एवं दहाई अंक $= x$

तब नवीन संख्या $= 10 \times x + (12 - x)$

$= 10x + 12 - x$

$= 9x + 12$

शर्तानुसार, नवीन संख्या मूल संख्या से 18 अधिक हो जाती है।

अर्थात् नवीन संख्या = मूल संख्या + 18

$9x + 12 = 120 - 9x + 18$

$9x + 12 = 138 - 9x$

$9x + 9x = 138 - 12$ (पक्षान्तर करने पर)

$18x = 126$

$x = \frac{126}{18}$ या $x = 7$

अतः मूल संख्या $= 120 - 9x$

$= 120 - 9 \times 7$

$= 120 - 63 = 57$

जाँचः स्वयं करके देखिए।

उदाहरण 8. दो संख्याओं में 3 : 5 का अनुपात है। प्रत्येक में से 4 घटाने पर यह अनुपात 5 : 9 हो जाता है। संख्याएं ज्ञात कीजिए।

हलः माना कि पहली संख्या $= 3x$

एवं दूसरी संख्या $= 5x$

पहली संख्या में से 4 घटाने पर $= 3x - 4$ एवं

दूसरी संख्या में से 4 घटाने पर $= 5x - 4$

शर्तानुसार, प्रत्येक संख्या में से 4 घटाने पर उनका अनुपात $= \frac{5}{9}$

$$\Rightarrow \quad \frac{3x-4}{5x-4} = \frac{5}{9}$$

$$\frac{3x-4}{5x-4} \times \frac{5}{9}$$ (वज्र गुणा करने पर)

$9 \times (3x - 4) = 5(5x - 4)$

$\Rightarrow$ $27x - 36 = 25x - 20$ (कोष्ठक हल करने पर)

$\Rightarrow$ $27x - 25x = -20 + 36$ (पक्षान्तर करने पर)

$\Rightarrow$ $2x = 16$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{16}{2}$ या $\quad x = 8$

अतः पहली संख्या $= 3 \times 8 = 24$

एवं दूसरी संख्या $= 5 \times 8 = 40$

जाँच : 1. दोनों संख्याओं का अनुपात $= \dfrac{24}{40} = \dfrac{3}{5}$

2. प्रत्येक में से 4 घटाने पर अनुपात $= \dfrac{24-4}{40-4} = \dfrac{20}{36} = \dfrac{5}{9}$

अतः हमारा हल सही है।

उदाहरण 9. पिता की वर्तमान आयु, पुत्र की आयु से 20 वर्ष अधिक है। 3 वर्ष बाद पुत्र तथा पिता की आयु का अनुपात 19 : 39 हो जायेगा। पुत्र की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हलः माना कि पुत्र की वर्तमान आयु $= x$ वर्ष

तो पिता की वर्तमान आयु $= (x + 20)$ वर्ष

3 वर्ष बाद पुत्र की आयु $= (x + 3)$ वर्ष

3 वर्ष बाद पिता की आयु $= x + 20 + 3 = (x + 23)$ वर्ष

प्रश्नानुसार, 3 वर्ष बाद पुत्र तथा पिता की आयु का अनुपात $= 19 : 39$

$\Rightarrow \quad (x + 3) : (x + 23) = 19 : 39$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x+3}{x+23} = \dfrac{19}{39}$ (तिर्यक गुणा करने पर)

$\Rightarrow \quad 39(x + 3) = 19(x + 23)$

$\Rightarrow \quad 39x + 117 = 19x + 437$ (कोष्ठक हटाने पर)

$\Rightarrow \quad 39x - 19x = 437 - 117$ (पक्षान्तर करने पर)

$\Rightarrow \quad 20x = 320$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{320}{20}$ (दोनों पक्षों में 20 से भाग देने पर)

$x = 16$

अतः पुत्र की वर्तमान आयु $= 16$ वर्ष

एवं पिता की आयु $= x + 20$

$= 16 + 20 = 36$ वर्ष

9XENY3

जाँच :

3 वर्ष बाद पुत्र की आयु $= 16 + 3 = 19$ वर्ष

तथा 3 वर्ष बाद पिता की आयु $= 36 + 3 = 39$ वर्ष

3 वर्ष बाद पुत्र और पिता की आयु का अनुपात $= 19 : 39$

अतः हमारा उत्तर सही है।

प्रश्नावली 12.2

1. दो संख्याओं का योग 42 है एवं यदि दूसरी संख्या पहली की दुगुनी हो तो संख्याएं ज्ञात कीजिए।
2. नीरज के पास मंयक से 3 गुने आम थे। यदि मयंक को 8 आम एवं नीरज को 6 आम और दिए जाए, तो मयंक और नीरज के आम का अनुपात 1 : 2 हो जाता है। बताइए दोनों के पास कितने–कितने आम थे।
3. दो समबाहु त्रिभुजों में से पहले त्रिभुज की भुजा, दूसरे त्रिभुज की भुजा से 3 सेमी अधिक है एवं दोनों त्रिभुजों के परिमापों का अनुपात 5 : 2 है, तो त्रिभुजों की भुजाएं ज्ञात कीजिए।
4. दो अंकीय संख्या के दहाई का अंक इकाई के अंक का तीन गुना है। यदि अंकों को उलट दिया जाए, तो नई संख्या मूल संख्या से 36 कम हो जाती है। संख्या ज्ञात कीजिए।
5. दो अंकीय संख्या के दोनों अंकों का योग 7 है। अंकों को उलटने पर नई संख्या, मूल संख्या से 9 अधिक हो जाती है। संख्या ज्ञात कीजिए।
6. एक परिमेय संख्या का हर उसके अंश से 2 अधिक है, यदि अंश 4 गुना कर दिया जाये और हर में 8 जोड़ दिया जाये तो नवीन संख्या $\frac{4}{3}$ हो जाती है। मूल संख्या ज्ञात कीजिए।
7. अनुराग और आकांक्षा की आयु का अनुपात 7 : 5 है। 6 वर्ष बाद उनकी आयु 5 : 4 के अनुपात में हो जाती है, तो दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।
8. मनीषा की मां की आयु, मनीषा की आयु की तिगुनी है। चार वर्ष बाद माँ की आयु मनीषा की आयु से ढाई गुनी हो जाती है। दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हमने सीखा

1. समीकरण के मान में कोई अन्तर नहीं आता, यदि समीकरण के दोनों पक्षों में –
   (i) समान संख्या जोड़ दें।
   (ii) समान संख्या घटा दें।
   (iii) समान शून्येत्तर संख्या का गुणा कर दें।
   (iv) समान शून्येत्तर संख्या का भाग दें।
2. $\frac{ax+b}{cx+d}=k$ जहाँ समीकरण में a, b, c, d एवं k पूर्णांक तथा $cx + d \neq 0$ हो, तो समीकरण एक चरीय समीकरण होता है।
3. $\frac{ax+b}{cx+d}=k$ जैसी समीकरणों को हल करने में वज्रगुणन विधि उपयोगी रहती है।
4. किसी शाब्दिक समस्या को हल करने के लिए अज्ञात राशि को किसी चर से व्यक्त करते हैं एवं प्रश्नानुसार इसे बीजीय समीकरण में बदलकर समीकरण हल करते हैं।