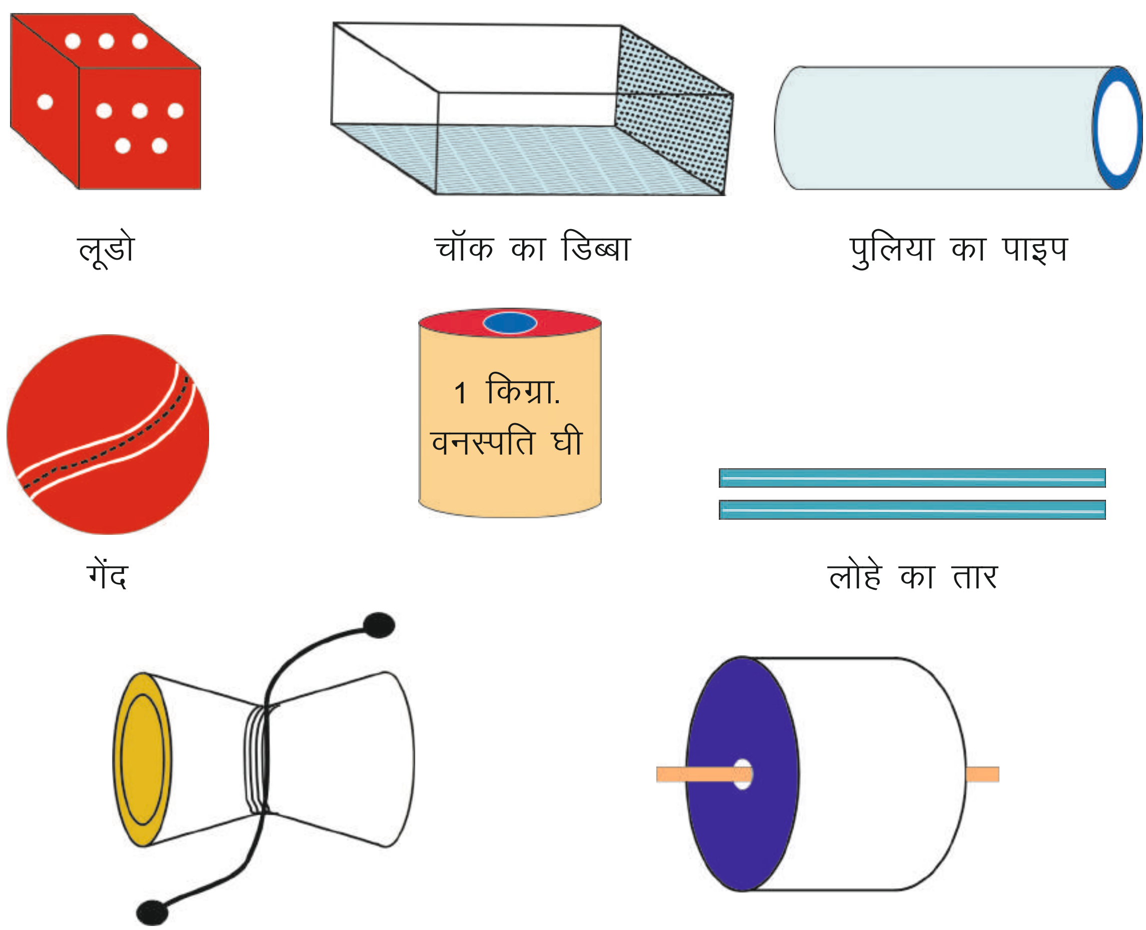
अध्याय–15
क्षेत्रमिति – 3
MENSURATION

ABH4R6

आप नल का पाइप, लकड़ी का रोलर, पेन का रिफिल, ट्यूब लाइट, टार्च की बैटरी, कुआँ जैसी चीज़ों को प्रतिदिन देखते हैं, इन आकृतियों के क्या नाम हैं? इनमें क्या–क्या समानताएँ हैं?

निम्न आकृतियों को ध्यानपूर्वक देखिये एवं उनका एक समूह बनाइये –



चित्र 15.1

ऊपर दिये गये चित्रों में से समान आकृतियों को आपने किन–किन आधारों पर पहचाना? अपने साथियों से चर्चा कीजिए।

आप पाते है कि पाइप, रोलर जैसी आकृतियों में से प्रत्येक में दो वृत्ताकार सतहें हैं, जो

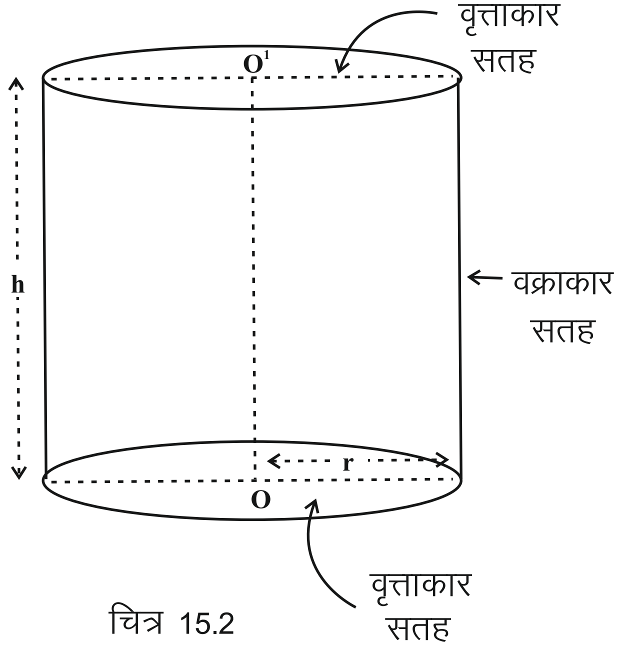
परस्पर समान्तर एवं बराबर हैं तथा तीसरी सतह वक्राकार है। ऐसी आकृतियों को बेलनाकार आकृतियाँ कहते हैं।

आइए, अब हम एक बेलन पर चर्चा करें –

दिये गये चित्र में एक बेलन की आकृति को दर्शाया गया है। बेलन में दो वृत्ताकार सिरे हैं, जो परस्पर समान्तर एवं सर्वांगसम हैं। ये वृत्ताकार सिरे बेलन का शीर्ष एवं आधार कहलाते हैं। बेलन का शेष पृष्ठीय भाग अर्थात् दोनों वृत्ताकार सिरों को मिलाने वाला बेलनाकार पृष्ठ बेलन का वक्राकार भाग या वक्र पृष्ठ कहलाता है।

बेलन के आधार या शीर्ष की त्रिज्या बेलन की त्रिज्या होती है जिसे अक्षर 'r' से व्यक्त करते हैं।

बेलन के आधार एवं शीर्ष के केन्द्रों को मिलाने वाल रेखाखण्ड OO' उनके बीच की लम्बवत् दूरी होती है। यही लम्बवत् दूरी बेलन की ऊँचाई होती है जिसे अक्षर 'h' द्वारा दर्शाते हैं।



चित्र 15.2

बेलन का आयतन

कक्षा–7 में आपने घनाभाकार आकृतियों का आयतन निकालना सीख लिया है। क्या आप बता सकते हैं कि घनाभ का आयतन कैसे ज्ञात करते हैं?

मोनिका : घनाभ का आयतन ज्ञात करने के लिए उसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई का आपस में गुणा करते है। अर्थात् **घनाभ का आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई**

सुनील : परन्तु लं.×चौ. धनाभ के आधार के क्षेत्रफल के बराबर है।

तो क्या हम कह सकते है कि **घनाभ का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई**

क्या बेलन के आयतन को भी इसी प्रकार ज्ञात किया जा सकता है? अपने साथियों एवं शिक्षक से चर्चा करें।

आप पायेंगे कि यह सूत्र बेलन के आयतन के लिए भी सत्य है।

अर्थात् बेलन का आयतन = बेलन के आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

माना बेलन के आधार की त्रिज्या r है। तो बेलन के आधार का क्षेत्रफल कितना होगा?

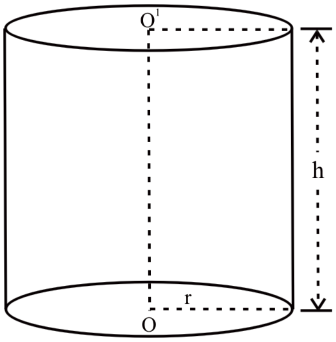
चूँकि बेलन का आधार वृत्ताकार है, इसलिए आधार का क्षेत्रफल = r^2

अब यदि बेलन की ऊँचाई h हो तो

बेलन का आयतन (V) = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

$= \pi r^2 \times h$

$= \pi r^2 h$

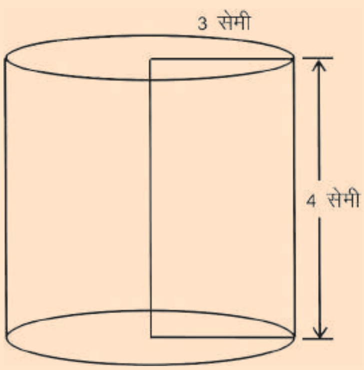
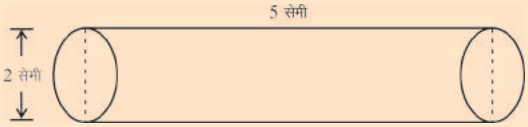


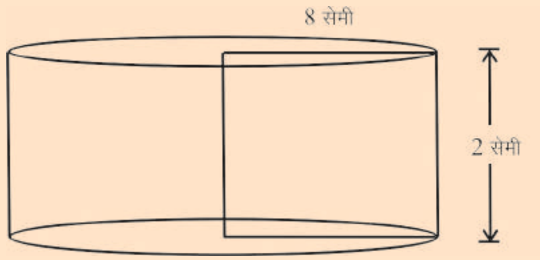
चित्र 15.3

बेलन का आयतन (V) = $\pi r^2 h$ घन इकाई

क्रियाकलाप 1.

नीचे दी गई मापों के आधार पर ज्ञात करके तालिका पूर्ण कीजिए –

क्रमांक	बेलन की आकृति	ऊँचाई या लम्बाई (h)	त्रिज्या (r)	आयतन (v)
1		----------	----------	----------
2		----------	----------	----------

3		----------	----------	----------

उदाहरण 1.

एक बेलन के आधार का व्यास 14 सेमी. तथा ऊँचाई 15 सेमी. है, तो उसका आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : प्रश्नानुसार,

बेलन के आधार का व्यास = 14 सेमी.

बेलन के आधार की त्रिज्या (r) $= \frac{14}{2} = 7$ सेमी.

तथा बेलन की ऊँचाई (h) = 15 सेमी.

∴ बेलन का आयतन (V) $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times (7)^2 \times 15$$

$$= \frac{22}{\cancel{7}_1} \times \overset{1}{\cancel{7}} \times 7 \times 15$$

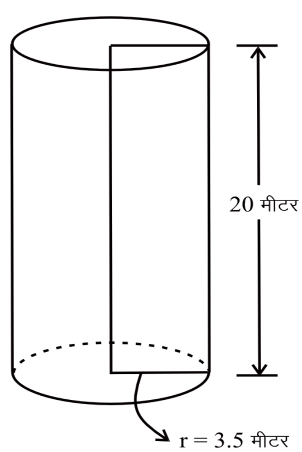
$$= 22 \times 7 \times 15$$

= 2310 सेमी^{3} या घन सेमी

अतः उस बेलन का आयतन 2310 सेमी^{3} है।

उदाहरण 2.

3.5 मीटर त्रिज्या वाला एक वृत्ताकार कुआँ 20 मीटर गहराई तक खोदा गया है। खुदाई से प्राप्त मिट्टी का आयतन ज्ञात कीजिये।



चित्र 15.4

हल : प्रश्नानुसार,

बेलनाकार कुएँ की त्रिज्या r = 3.5 मीटर

कुएँ की ऊँचाई h = 20 मीटर

खुदाई से प्राप्त मिट्टी का आयतन = कुएँ का आयतन

$= \pi r^2 h$

मिट्टी का आयतन $= \frac{22}{7} \times (3.5)^2 \times 20$

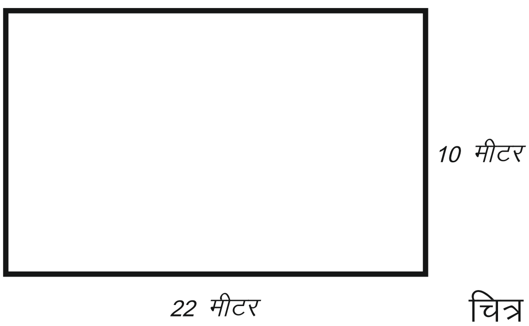
$$= \frac{22}{\cancel{7}_1} \times \overset{0.5}{\cancel{3.5}} \times 3.5 \times 20$$

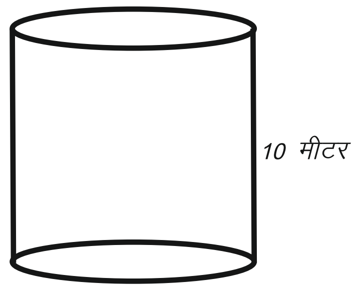
$= 22 \times 0.5 \times 3.5 \times 20$

$= 770$ सेमी^{3}

उदाहरण 3.

22 मीटर × 10 मीटर आयताकार लोहे की चादर को लम्बाई के अनुदिश मोड़कर (दोनों सिरों को एक दूसरे पर चढ़ाये बिना) एक बेलनाकार पाइप बनाया गया है। पाइप का आयतन ज्ञात कीजिए।





चित्र 15.5

हलः

चूँकि लोहे की चादर को लम्बाई के अनुदिश मोड़ा गया है, अतः प्राप्त पाइप की ऊँचाई 10 मीटर होगी।

बेलनाकार पाइप की ऊँचाई $h = 10$ मीटर

यदि चादर को मोड़ने से बने पाइप की त्रिज्या r मीटर हो, तो

आयताकार चादर की लम्बाई = पाइप के आधार की परिधि

$22 = 2\pi r$

$$22 = 2 \times \frac{22}{7} \times r$$

$$\frac{22 \times 7}{2 \times 22} = r$$

$r = 7/2$ मीटर

अतः पाइप का आयतन $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 \times 10$$

$$= \frac{\overset{11}{\cancel{22}}}{\cancel{7}} \times \frac{\cancel{7}}{\cancel{2}} \times \frac{7}{2} \times 10$$

$= 385$ घन मीटर

उदाहरण 4.

एक बेलन के आधार का क्षेत्रफल 154 वर्ग सेमी और ऊँचाई 8 सेमी हो तो उसका आयतन कितना होगा?

हल: प्रश्नानुसार,

बेलन के आधार का क्षेत्रफल $= 154$ सेमी^{2}

बेलन की ऊँचाई $= 8$ सेमी

बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

$= 154$ सेमी$^2 \times 8$ सेमी

$= 1232$ सेमी^{3}

ABVZST

प्रश्नावली 15.1

प्र.1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए –

(i) बेलन के आधार का आकार .... होता है।

(ii) बेलन के आयतन का सूत्र .... है।

(iii) बेलन की त्रिज्या व ऊँचाई प्रत्येक 7 सेमी.की है तो बेलन का आयतन .... होगा।

प्र.2. एक बेलन के आधार का क्षेत्रफल 1386 सेमी^{2} है। यदि उसकी ऊँचाई 15 सेमी हो तो उसका आयतन कितना होगा?

प्र.3. बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए, जिसकी माप निम्नांकित हों –

(i) त्रिज्या $= 12$ सेमी, ऊँचाई $= 14$ सेमी.

(ii) त्रिज्या $= 2.8$ सेमी, ऊँचाई $= 5$ सेमी.

(iii) व्यास $= 20$ मीटर, ऊँचाई $= 21$ मीटर

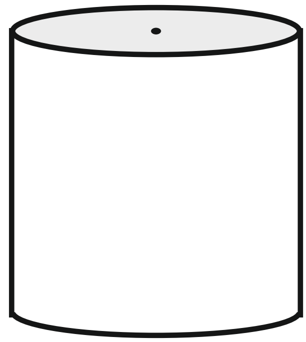
प्र.4. यदि एक बेलन का व्यास आधा कर दिया जाये तो प्राप्त नये बेलन का आयतन एवं पहले वाले बेलन के आयतन में क्या अनुपात होगा?

प्र.5. एक बेलनाकार टंकी की त्रिज्या 2.8 मीटर और ऊँचाई 3.5 मीटर है। उस टंकी की धारिता ज्ञात कीजिए।

प्र.6. 1.4 सेमी. व्यास वाली तथा 90 सेमी. लम्बी लोहे की एक ठोस छड़ बनवाने के लिए कितने लोहे की आवश्यकता पड़ेगी?

बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

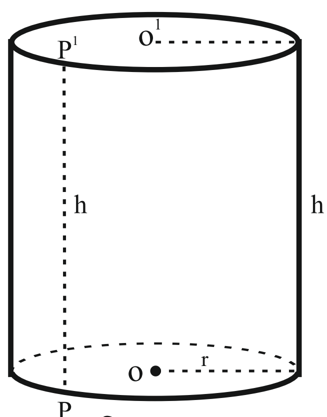
टिन का एक बन्द बेलनाकार डिब्बा लीजिए। बताइये कि इस डिब्बे का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए किन–किन भागों का क्षेत्रफल ज्ञात करना होगा?



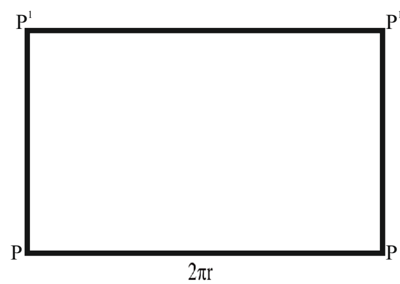
टिन का डिब्बा ३चित्र 15.6७

बेलनाकार डिब्बे में कुल तीन पृष्ठ हैं जिनमें से दो पृष्ठ वृत्ताकार (आधार व शीर्ष) तथा तीसरा पृष्ठ वक्राकार भाग है। आधार और शीर्ष दोनों वृत्तीय पृष्ठों का क्षेत्रफल बराबर होगा। यदि वृत्तीय पृष्ठों की त्रिज्या r हो तो प्रत्येक वृत्तीय पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \pi r^2$ होगा।

अब प्रश्न उठता है कि तीसरे पृष्ठ अर्थात् वक्राकार भाग का क्षेत्रफल कैसे प्राप्त किया जाये? चर्चा कीजिए।



चित्र 15.7



चित्र 15.8

वक्राकार भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए उसमें एक रेखाखण्ड PP^1 अंकित कर लेते हैं (चित्र 15.7)। अब डिब्बे के वक्राकार भाग को PP^1 (लम्बाई) के अनुदिश काटकर फैला देते है, जिससे हमें एक आयताकार पट्टी चित्र 15.8 की भाँति प्राप्त होती है। प्राप्त आयताकार पट्टी की लम्बाई, वक्राकार भाग की परिधि के बराबर होगी एवं चौड़ाई वक्राकार भाग की ऊँचाई के बराबर होगी। साथ ही आयताकार पट्टी एवं वक्राकार भाग के क्षेत्रफल भी बराबर होंगे।

चूँकि वक्राकार भाग की त्रिज्या r है, इसलिए उसकी परिधि $= 2\pi r$

अब यदि वक्राकार भाग की (डिब्बे की) ऊँचाई h हो, तो

वक्राकार भाग का क्षेत्रफल = आयताकार पट्टी का क्षेत्रफल

= पट्टी की लम्बाई × चौड़ाई

= वक्राकार भाग की परिधि ×ऊँचाई

$= 2\pi r \times h = 2\pi rh$

बेलन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल	$= 2\pi rh$

अतः बेलनाकार डिब्बे का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

= वक्राकार भाग का क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल + शीर्ष का क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2$

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r(h+r)$

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल	$= 2\pi r\,(r+h)$

उदाहरण 5. टिन का बना एक बन्द बेलनाकार डिब्बे की त्रिज्या 7 सेमी. तथा ऊँचाई 15 सेमी. है। उस डिब्बे को बनाने में प्रयुक्त चादर का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: प्रश्नानुसार,

बेलनाकार डिब्बे की त्रिज्या $r = 7$ सेमी.

एवं ऊँचाई $h = 15$ सेमी.

प्रयुक्त चादर का क्षेत्रफल= डिब्बे का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

= बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\pi r(h + r)$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times (15 + 7)$$

$$= 2 \times \frac{22}{\cancel{7}_1} \times \cancel{7}^1 \times 22$$

$= 968$ सेमी^{2}

उदाहरण 6. किसी ठोस बेलन के आधार की त्रिज्या 5 सेमी. और ऊँचाई 21 सेमी. है। बेलन का वक्र पृष्ठ और सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: प्रश्नानुसार,

बेलन के आधार की त्रिज्या $(r) = 5$ सेमी.

ऊँचाई $(h) = 21$ सेमी.

बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

$$= 2 \times \frac{22}{\cancel{7}_1} \times 5 \times \cancel{21}^3$$

$= 2 \times 22 \times 5 \times 3$

$= 660$ सेमी^{2}

तथा बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r(h + r)$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 5 \times (21 + 5)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 5 \times 26$$

$= 817.14$ सेमी^{2}

उदाहरण 7. एक बेलन का आयतन 36π सेमी^{3} और आधार का क्षेत्रफल 9π सेमी^{2} है। बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हलः माना कि बेलन के आधार की त्रिज्या r सेमी. एवं उसकी ऊँचाई h सेमी. है।

तो बेलन के आधार का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$$9\pi = \pi r^2$$

$$\frac{9\pi}{\pi} = r^2$$

$$r = \sqrt{9}$$

$r = 3$ सेमी

तथा बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

$$36\pi = \pi(3)^2 \times h$$

$$36 = 9h$$

$$36/9 = h$$

$h = 4$ सेमी

अतः बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r\,(r + h)$

$$= 2 \times \pi \times 3(3 + 4)$$

$$= 6\pi \times 7$$

$= 42\pi$ सेमी^{2}

उदाहरण 8. एक बेलनाकार पाइप जिसका व्यास 14 सेमी. तथा ऊँचाई 20 सेमी. है, के वक्रीय पृष्ठ पर 2 रु. प्रति 100 सेमी^{2} की दर से रंगाई कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल : प्रश्नानुसार,

पाइप का व्यास = 14 सेमी.

त्रिज्या r $= \frac{14}{2} = 7$ सेमी.

तथा पाइप की ऊँचाई (h) $= 20$ सेमी.

पाइप का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

$$= 2 \times \frac{22}{\cancel{7}} \times \cancel{7} \times 20 = 880 \text{ सेमी}^2$$

दिया है कि प्रति 100 वर्ग सेमी का रंगाई व्यय = 2 रु.

$$\text{पाइप को रंगाने का कुल व्यय} = \frac{88\cancel{0} \times 2}{10\cancel{0}} = 17.60 \text{ रु.}$$

उदाहरण 9.

एक बेलन के आधार की परिधि 132 सेमी है तथा उसकी ऊँचाई 2 मीटर है। उसके वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : प्रश्नानुसार,

आधार की परिधि = 132 सेमी

बेलन की ऊँचाई (h) = 2 मीटर = 200 सेमी.

वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = ?

बेलन का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = आधार की परिधि × ऊँचाई

= 132 × 200

= 26400 सेमी²

अतः उस बेलन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल 26400 सेमी² है।

प्रश्नावली 15.2

प्र.1. बेलन का वक्र पृष्ठ एवं सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये जिनके माप निम्नानुसार हों–

(i) त्रिज्या = 7 सेमी, ऊँचाई = 24 सेमी

(ii) व्यास = 20 मीटर, ऊँचाई = 21 मीटर

(iii) त्रिज्या = 10.5 सेमी, ऊँचाई = 35 सेमी

(iv) त्रिज्या = 14 सेमी, ऊँचाई = 1 मीटर

AC5VUG

प्र.2. एक बेलनाकार टैंक के आधार की परिधि 176 सेमी तथा ऊँचाई 30 सेमी हो तो उसके वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्र.3. एक बेलन का आयतन 44 घन सेमी तथा त्रिज्या 2 सेमी हैं। उसका सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्र.4. 14 मीटर व्यास के 25 मीटर गहरे कुएँ को खोदने पर कितने घन मीटर मिट्टी निकलेगी? इस कुएँ को अन्दर की ओर से प्लास्टर करवाने में 3 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से कितना खर्च आयेगा?

प्र.5. एक बेलन के आधार की परिधि 6 मीटर है एव ऊँचाई 44 मीटर है। उसका वक्र पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

प्र.6. एक बेलन के वक्राकार भाग का क्षेत्रफल 1000π वर्ग सेमी और उसका व्यास 20 सेमी है। उस बेलन की ऊँचाई कितनी होगी?

हमने सीखा

1. बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई
   $= \pi r^2 h$
2. बेलन का वक्र पृष्ठ = आधार की परिधि × ऊँचाई
   $= 2\pi rh$
3. बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ = 2 × आधार का क्षेत्रफल + वक्र पृष्ठ
   $= 2\pi r^2 + 2\pi rh$
   $= 2\pi r(r + h)$
4. क्षेत्रफल की इकाई हमेशा वर्ग इकाई होती है जैसे वर्ग सेमी, वर्ग मीटर आदि तथा आयतन की इकाई घन इकाई होती है जैसे घन सेमी, घन मीटर आदि।
5. एक ठोस बेलन में कुल तीन पृष्ठ होते है जिनमें से दो पृष्ठ वृत्ताकार (आधार एवं शीर्ष) एवं एक पृष्ठ वक्राकार होता है।