



## अध्याय–2

### घातांक

### EXPONENT

#### पूर्णांकों की घात

अब तक हमने प्राकृत संख्याओं के घातांकों पर विचार किया, परन्तु फातिमा के मन में यह प्रश्न उठ रहा था कि ऋणात्मक संख्याओं की घातांकों से सम्बंधित प्रश्नों को कैसे हल करेंगे? उसने सोचा कि क्यों न धनात्मक के स्थान पर ऋणात्मक संख्या लिख कर उसके किसी भी घात के लिए हल करके देखें —

$$\begin{aligned} (-1)^2 &= (-1) \times (-1) = 1 \\ (-1)^3 &= (-1) \times (-1) \times (-1) \\ &= \{(-1) \times (-1)\} \times (-1) = 1 \times (-1) = -1 \\ (-1)^4 &= (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \\ &= \{(-1) \times (-1)\} \times \{(-1) \times (-1)\} \\ &= 1 \times 1 = 1 \\ (-1)^5 &= (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \\ &= \{(-1) \times (-1)\} \times \{(-1) \times (-1)\} \times (-1) \\ &= 1 \times 1 \times (-1) = -1 \end{aligned}$$

इन्हें देखकर कमली ने कहा ‘जब  $(-1)$  का घात सम संख्या है तब उसका मान 1 एवं जब  $(-1)$  का घात विषम संख्या है तब उसका मान  $-1$  है।’

अर्थात्

$$(-1)^{\text{सम संख्या}} = 1$$

एवं

$$(-1)^{\text{विषम संख्या}} = -1$$

इस प्रकार फातिमा एवं कमली के समझ में यह बात आ गई कि  $(-1)^{25} = -1$ ,  $(-1)^{50} = 1$

$(-1)^{143} = -1$ ,  $(-1)^{144} = 1$  इत्यादि।

अब निम्नांकित पर विचार करें :—

$$\begin{aligned} (-5) &= (-1) \times 5 \\ (-5)^4 &= \{(-1) \times 5\}^4 \\ &= (-1)^4 \times 5^4 & [\therefore (a \times b)^m = a^m \times b^m \text{ से}] \\ &= 1 \times 5^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 5^4 \\
 (-27)^{13} &= \{(-1) \times 27\}^{13} \\
 &= (-1)^{13} \times 27^{13} \\
 &= (-1) \times 27^{13} \quad [ \because (-1)^{\text{विषम संख्या}} = -1 ] \\
 &= -27^{13} \\
 (-m)^{16} &= \{(-1) \times m\}^{16} \\
 &= (-1)^{16} \times m^{16} \quad [ \because (-1)^{\text{सम संख्या}} = 1 ] \\
 &= m^{16}
 \end{aligned}$$

सोचकर बताएँ कि घातांक संख्याओं  $(-35)^{12}$ ,  $(-149)^{23}$ ,  $(-m)^{37}$ ,  $(-m)^{100}$ ,  $(-11)^{111}$  में से कौनसी धनात्मक होगी एवं कौन-सी ऋणात्मक? क्या आप इनसे कुछ निष्कर्ष निकाल सकते हैं? आप पायेंगे कि यदि  $a$  और  $m$  कोई प्राकृत संख्याएँ हों, तो  $(-a)^m = \{(-1) \times a\}^m = (-1)^m \times a^m$

अर्थात्  $(-a)^m$  धनात्मक है या ऋणात्मक,  $(-1)^m$  पर निर्भर करता है। या  $(-a)^m$  धनात्मक होगा यदि  $m$  सम संख्या हो तथा ऋणात्मक होगा यदि  $m$  विषम संख्या हो

**उदाहरण 1.** सरल कीजिए —

- (i)  $(-5)^4 \times (-5)^7$
- (ii)  $(-4)^2 \times (-4)^6 \times (-4)^{17}$
- (iii)  $(-9)^8 \div (-9)^2$
- (iv)  $(-x)^7 \div (-x)^4$

**हल :**

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad (-5)^4 \times (-5)^7 &= [(-1) \times 5]^4 \times [(-1) \times 5]^7 \\
 &= [(-1)^4 \times 5^4] \times [(-1)^7 \times 5^7] \\
 &= 1 \times 5^4 \times (-1) \times 5^7 \\
 &= -1 \times 5^{4+7} = -5^{11} \quad [ \because a^m \times a^n = a^{m+n} ] \\
 \text{(ii)} \quad (-4)^2 \times (-4)^6 \times (-4)^{17} &= [(-1) \times (4)]^2 \times [(-1) \times (4)]^6 \times [(-1) \times (4)]^{17} \\
 &= (-1)^2 \times (4)^2 \times (-1)^6 \times (4)^6 \times (-1) (4)^{17} \\
 &= 1 \times 4^2 \times 1 \times 4^6 \times (4)^{17} (-1) \times 4^{17} \\
 &= -4^{2+6+17} \\
 &= -4^{25} \quad [ \because a^\ell \times a^m \times a^n = a^{\ell+m+n} ]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iii)} \quad (-9)^8 \div (-9)^2 &= \frac{(-9)^8}{(-9)^2} = \frac{\{(-1) \times 9\}^8}{\{(-1) \times 9\}^2} \\
 &= \frac{(-1)^8 \times 9^8}{(-1)^2 \times 9^2} = \frac{1 \times 9^8}{1 \times 9^2} = \frac{9^8}{9^2} \\
 &= 9^{8-2} = 9^6 \quad [ \because a^m \div a^n = a^{m-n} ]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iv)} \quad (-x)^7 \div (-x)^4 &= \frac{(-x)^7}{(-x)^4} = \frac{\{(-1) \times x\}^7}{\{(-1) \times x\}^4} \\
 &= \frac{(-1)^7 \times x^7}{(-1)^4 \times x^4} = \frac{-1 \times x^7}{1 \times x^4} \\
 &= (-1) \times x^{7-4} = -x^3 \quad [ \because a^m \div a^n = a^{m-n} ]
 \end{aligned}$$

### प्रश्नावली 2.1

1. सरल करें :—  
 (a)  $(-5)^3$       (b)  $(-4)^5$       (c)  $(-2)^6$       (d)  $(-3)^6$
2. निम्न को घातांक के रूप में लिखें :—  
 (a)  $5^4 \times (-5)^2$       (b)  $15 \times (-15)^{25}$   
 (c)  $12^5 \div (-12)^3$       (d)  $(-p)^{14} \div (-p)^7$
3. दोनों पक्षों को हल कर निम्न कथनों की सत्यता की जाँच कीजिए :—  
 (a)  $(-2)^4 \times (-2)^2 = (-2)^8 \div (-2)^2$   
 (b)  $(-3)^2 \times (-3)^{-6} = \frac{1}{(3^2)^2}$   
 (c)  $(-7)^{32} \div (-7)^{32} = 1$

### परिमेय संख्याओं की घात

रजिया के मन में विचार आया कि अभी तक हमने प्राकृत संख्याओं एवं पूर्णांकों के घातांकों पर ही विचार किया है किन्तु इनके स्थान पर यदि परिमेय संख्याएं हों तब क्या होगा?

आइए, रजिया के सवाल का जवाब ढूँढें।

परिमेय संख्याओं के कुछ घातांकों पर विचार कीजिए :—

$$\begin{aligned}
 \text{(1)} \quad \left(\frac{5}{7}\right)^4 &= \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} \\
 &= \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5}{7 \times 7 \times 7 \times 7} = \frac{5^4}{7^4} \\
 \text{(2)} \quad \left(-\frac{3}{11}\right)^5 &= \left\{(-1) \times \left(\frac{3}{11}\right)\right\}^5 = (-1)^5 \times \left(\frac{3}{11}\right)^5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (-1) \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{11} \times \frac{3}{11} & [ \because (-1)^5 = -1 ] \\
 &= -\frac{3^5}{11^5} \\
 (3) \quad \left(-\frac{4}{3}\right)^6 &= (-1)^6 \times \left(\frac{4}{3}\right)^6 \\
 &= \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times \dots \text{ 6 बार} & [ \because (-1)^6 = 1 ] \\
 &= \frac{4^6}{3^6}
 \end{aligned}$$

अतः यदि हमारे पास कोई परिमेय संख्या  $\left(\frac{5}{4}\right)^m$  हो, तब

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{5}{4}\right)^m &= \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} \times \dots \text{ (m बार)} \\
 &= \frac{5 \times 5 \times \dots \text{ m बार}}{4 \times 4 \times \dots \text{ m बार}} = \frac{5^m}{4^m}
 \end{aligned}$$

अब आप  $\left(\frac{3}{2}\right)^3, \left(\frac{9}{4}\right)^5, \left(-\frac{4}{7}\right)^6, \left(-\frac{2}{5}\right)^3, \left(\frac{2}{3}\right)^p$  को विस्तारित करके देखें।

यदि कोई परिमेय संख्या  $\frac{p}{q}$  (जहाँ  $q \neq 0$ ) की घात m हो, तब

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{p}{q}\right)^m &= \frac{p}{q} \times \frac{p}{q} \times \frac{p}{q} \times \dots \text{ (m बार)} \\
 &= \frac{p \times p \times p \times \dots \text{ m बार}}{q \times q \times q \times \dots \text{ m बार}} = \frac{p^m}{q^m}
 \end{aligned}$$

अर्थात्  $\left(\frac{p}{q}\right)^m = \frac{p^m}{q^m}$  जहाँ p, q कोई पूर्णांक हैं एवं  $q \neq 0$

अब यदि परिमेय संख्या का घात ऋणात्मक हो, तब स्थिति कैसी होगी?  
निम्न उदाहरणों पर विचार कीजिए :—

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{5^{-2}}{4^2}\right) = \frac{1/5^2}{1/4^2} = \frac{4^2}{5^2} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \quad \left[ \because \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \text{ और } a^{-m} = \frac{1}{a^m} \right]$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{-4} = \frac{3^{-4}}{7^{-4}} = \frac{1/3^4}{1/7^4} = \frac{7^4}{3^4} = \left(\frac{7}{3}\right)^4$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-m} = \frac{2^{-m}}{5^{-m}} = \frac{1/2^m}{1/5^m} = \frac{5^m}{2^m} = \left(\frac{5}{2}\right)^m$$

### अभ्यास

निम्नलिखित को स्वयं हल करने का प्रयास करें —

$$\left(\frac{7}{5}\right)^{-5}, \left(\frac{14}{13}\right)^{-9}, \left(\frac{15}{6}\right)^{-4}, \left(\frac{113}{53}\right)^{-11}, \left(\frac{5}{7}\right)^{-7}$$

पुनः विचार करें :—

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

इस प्रकार स्पष्ट है कि —

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m} \quad \text{यहाँ } a, b \text{ कोई पूर्णांक हैं तथा } a \neq 0, b \neq 0$$

**उदाहरण 2.** निम्न को सरल कीजिए —

$$1. \quad \left(\frac{5}{7}\right)^4 \times \left(\frac{7}{5}\right)^2 \quad 2. \quad \left(-\frac{2}{9}\right)^{-4} \times \left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$\text{हल : } 1. \quad \left(\frac{5}{7}\right)^4 \times \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \left(\frac{5}{7}\right)^4 \times \left(\frac{5}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{7}\right)^{4+(-2)} \quad \left[ \because \left(\frac{a}{b}\right)^m \times \left(\frac{b}{a}\right)^{-m} = a^m \times a^{-m} = a^{m-n} \right]$$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{5^2}{7^2} = \frac{25}{49}$$

$$\text{हल : } 2. \quad \left(-\frac{2}{9}\right)^{-4} \times \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \left(-\frac{9}{2}\right)^4 \times \left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$= (-1)^4 \times \left(\frac{9}{2}\right)^4 \times \left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$= 1 \times \left(\frac{9}{2}\right)^{4+2}$$

$$= \left(\frac{9}{2}\right)^6 = \frac{531441}{64}$$

3.  $-\frac{36}{49}$  को घात के रूप में व्यक्त कीजिए।

$$\text{यहाँ } -\frac{36}{49} = (-1) \times \frac{36}{49}$$

$$= (-1) \times \left(\frac{6}{7}\right)^2 = -\left(\frac{6}{7}\right)^2$$

## प्रश्नावली 2.2

1. निम्न को सरल कीजिए :—

$$(a) \quad \left(\frac{2}{7}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad (b) \quad \left(\frac{4}{5}\right)^4 \times \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$(c) \quad (-5)^3 \div \left(-\frac{1}{5}\right)^2 \quad (d) \quad \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-5}$$

2. घात के रूप में व्यक्त कीजिए :—

$$(a) \quad -\frac{25}{49} \quad (b) \quad \frac{27}{125} \quad (c) \quad \frac{729}{64}$$

3. सिद्ध कीजिए :—

$$(a) \quad \left(\frac{5}{7}\right)^7 \times \left(\frac{7}{5}\right)^7 - \left(\frac{3}{19}\right)^2 \times \left(\frac{19}{3}\right)^2 = 0$$

$$(b) \quad \left(\frac{p}{q}\right)^m \times \left(\frac{p}{q}\right)^m \times \left(\frac{q}{p}\right)^m = \left(\frac{q}{p}\right)^{-m}$$

$$(c) \quad \left(\frac{25}{16}\right)^{-4} = \left(\frac{16}{25}\right)^4$$



4. सत्य या असत्य लिखिए :—

(a)  $\left(\frac{-5}{4}\right)^{65} = \frac{-5^{65}}{4^{65}}$

(b)  $\left(\frac{-32}{19}\right)^{150} = \frac{32^{150}}{19^{150}}$

(c)  $(25 \times 3)^5 = 25 \times 3^5$

(d)  $\left(\frac{27}{16}\right)^{-15} = \frac{27^{15}}{16^{15}}$

हमने सीखा

1.  $(-1)^{\text{सम संख्या}} = 1$  एवं  $(-1)^{\text{विषम संख्या}} = -1$

2. यदि  $\frac{p}{q}$  कोई परिमेय संख्या हो, तो  $\left(\frac{p}{q}\right)^m = \frac{p^m}{q^m}$

3. यदि  $\frac{a}{b}$  कोई परिमेय संख्या हो, तो  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$