

अध्याय—3

समान्तर रेखाएँ

PARALLEL LINES



समान्तर रेखाएँ

पिछली कक्षा में आपने समान्तर रेखाओं के बारे में पढ़ा है। ये एक ही तल पर स्थित ऐसी दो रेखाएँ हैं, जिनके बीच की लम्बवत् दूरी सदैव समान रहती है। इन्हें दोनों ओर कितना भी बढ़ाया जाए, ये एक दूसरे को प्रतिच्छेद नहीं करती हैं।

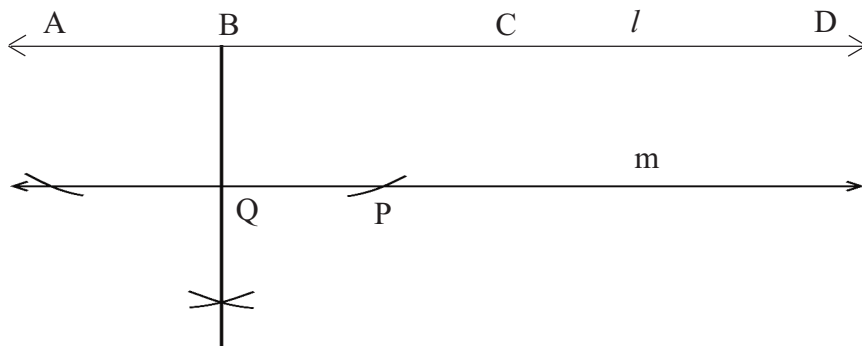
वर्ग या आयत की सम्मुख भुजाएँ, श्यामपट के सम्मुख किनारे, रेल की पटरी इत्यादि समान्तर रेखाओं के उदाहरण हैं। आप भी समान्तर रेखाओं के ऐसे ही कुछ उदाहरणों को सोच कर अपने कॉपी में लिखें।

समान्तर रेखाओं के बीच की दूरी

दो समान्तर रेखाओं की लम्बवत् दूरी सदैव समान होती है। इसे ज्ञात करने के लिए, एक रेखा के किसी बिन्दु से दूसरी रेखा पर लम्ब डालते हैं। इस प्रकार प्राप्त लम्ब की लम्बाई ही उन रेखाओं के बीच की दूरी होती है।

क्रियाकलाप 1

अपनी कॉपी पर दो समान्तर रेखाएँ बनाएं। उनके बीच की दूरी को अलग-अलग बिन्दुओं पर नाप कर अवलोकन सारणी को पूर्ण कीजिए –



चित्र 3.1

सारणी 3.1

क्रमांक	रेखा l पर चिह्नित बिन्दु	रेखा l से समान्तर रेखा m पर डाले गए लम्ब का बिन्दु	दूरी (सेमी में)
1	A
2	B	Q	BQ =.....
3	C
4	D

क्या प्रत्येक स्थिति में दोनों रेखाओं के बीच की दूरी समान है?

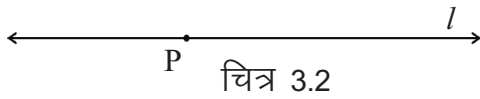
.....

दी गई रेखा से निश्चित दूरी पर समान्तर रेखा खींचना

रेखा l खींच कर इससे 3 सेमी की दूरी पर एक समान्तर रेखा m की रचना करना—

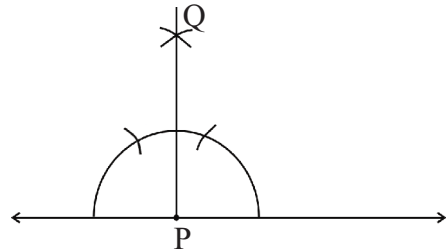
रचना के चरण

- दी गई रेखा l पर कोई बिन्दु P लीजिए (चित्र 3.2)



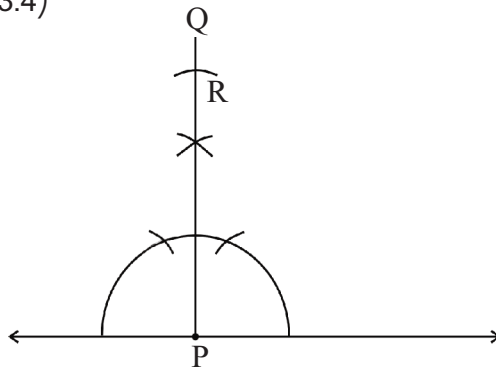
चित्र 3.2

- P पर $PQ \perp l$ बनाइए (चित्र 3.3)



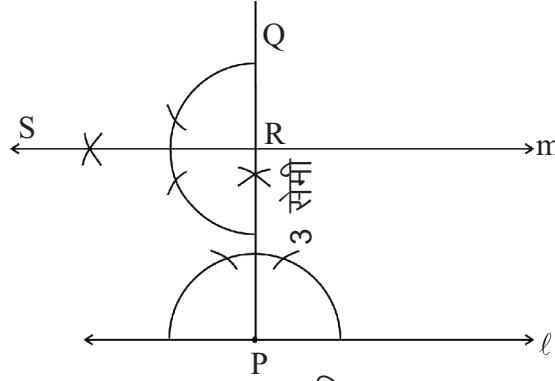
चित्र 3.3

- बिन्दु P को केन्द्र मानकर परकार की सहायता से PQ पर 3 सेमी. त्रिज्या का चाप काटिए जो PQ को R पर मिलता है। (चित्र 3.4)



चित्र 3.4

4. बिन्दु R पर $RS \perp PR$ बनाइए तथा RS को आगे बढ़ाकर रेखा m बनाइए (चित्र 3.5)



चित्र 3.5

रेखा m, रेखा l से 3 सेमी. दूरी पर स्थित समान्तर रेखा है।

टीप – सेट स्क्वायर की सहायता से भी दी गई रेखा से निश्चित दूरी पर समांतर रेखा खींची जा सकती है।

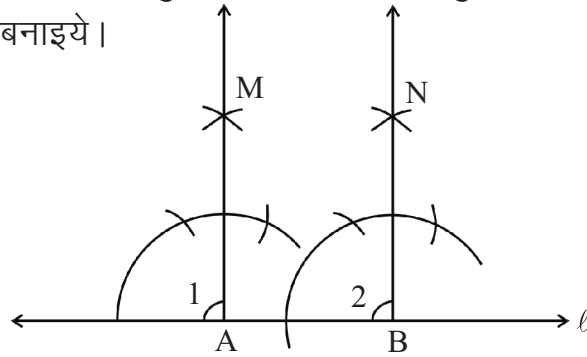


समान्तर रेखाओं से सम्बन्धित कुछ गुणधर्म

1. एक ही रेखा के दो बिन्दुओं पर खींची गई लम्बवत् रेखाएँ परस्पर समान्तर होती हैं।

क्रियाकलाप 2.

एक रेखा l खींच कर उस पर कोई दो बिन्दु A एवं B लीजिए बिन्दु A से रेखा l पर लम्ब AM तथा बिन्दु B से लम्ब BN बनाइये।



चित्र 3.6

अब अपने मित्रों को भी इसी प्रकार अपनी-अपनी कॉपी में एक रेखा के लम्बवत् दो रेखाएँ खींचने को कहें तथा संगत कोण माप कर सारणी की पूर्ति करने को कहें –

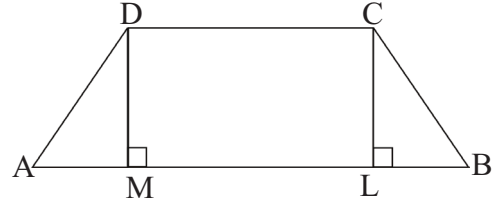
सारणी 3.2

क्र.सं.	नाम	$\angle 1$	$\angle 2$	क्या $\angle 1 = \angle 2$ है?
1.	मोहन	-----	-----	-----
2.	-----	-----	-----	-----
3.	-----	-----	-----	-----
4.	-----	-----	-----	-----

हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में $\angle 1 = \angle 2$, चूँकि ये कोण संगत कोण हैं, अतः रेखाएँ AM एवं BN समान्तर रेखा होंगी। इस प्रकार एक ही तल में स्थित किसी रेखा के दो बिन्दुओं पर खींची गई लम्बवत् रेखाएँ आपस में समान्तर होती हैं।

अभ्यास - 1

1. एक रेखा खींच कर उससे 5 सेमी. की दूरी पर इसके समान्तर रेखा की रचना कीजिए।
2. एक रेखा खींच कर उससे 4.3 सेमी. की दूरी पर इसके समान्तर रेखा की रचना कीजिए। इस प्रकार किसी रेखा के समान्तर अधिकतम कितनी समान्तर रेखाएँ खींची जा सकती हैं?
3. ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसमें $AB \parallel CD$, $CL \perp AB$ और $DM \perp AB$ है तो क्या $CL \parallel DM$? चतुर्भुज DMLC किस प्रकार का चतुर्भुज होगा? $\triangle ADM$ और $\triangle LCB$ किस प्रकार के त्रिभुज हैं?

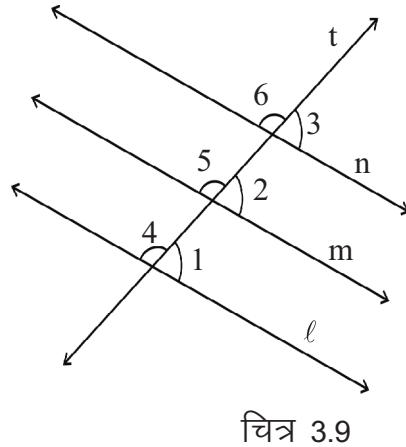
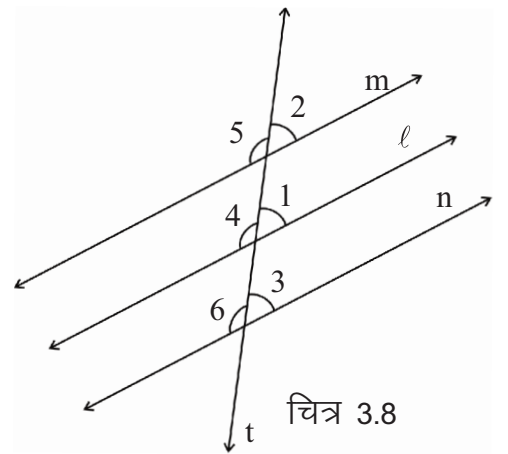
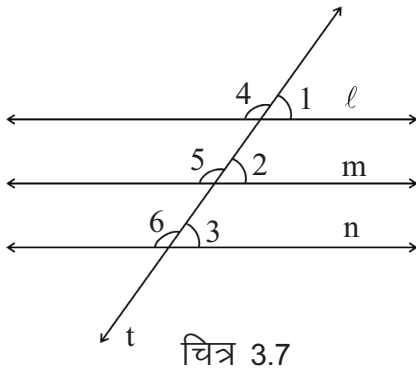


2. एक ही रेखा के समान्तर दो रेखाएँ परस्पर समान्तर होती है



क्रियाकलाप 3

निम्न चित्रों में रेखाएँ m एवं n एक ही रेखा l के समान्तर रेखाएँ हैं तथा t एक तिर्यक रेखा है जो इन्हें प्रतिच्छेद करती है। अब चित्रानुसार कोणों को माप कर सारणी की पूर्ति कीजिए—



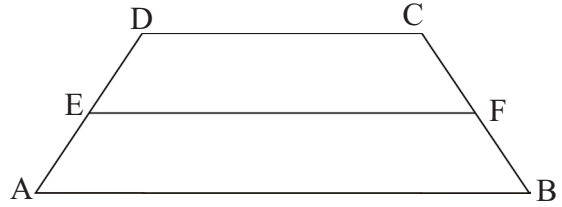
सारणी 3.3

चित्र क्रमांक	कोणों की माप (अंश में)							
	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$	$\angle 4$	$\angle 5$	$\angle 6$	क्या $\angle 2 = \angle 3$?	क्या $\angle 5 = \angle 6$?
3.7								
3.8								
3.9								

चित्र से हम पाते हैं कि $\angle 2 = \angle 3$ तथा $\angle 5 = \angle 6$, किन्तु ये संगत कोण हैं। अतः रेखाएँ m व n आपस में समान्तर होंगी अर्थात् “**एक ही रेखा के समान्तर खींची गई सभी रेखाएँ परस्पर समान्तर होती हैं।**”

अभ्यास 2

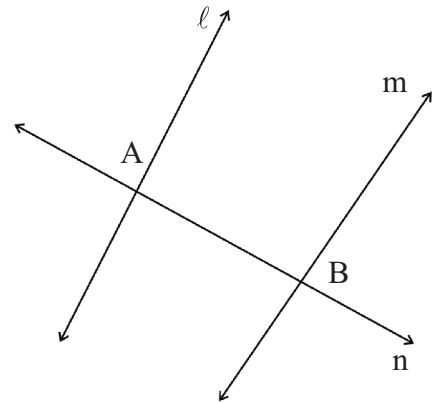
- चित्र में ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसमें $AB \parallel DC$ है। रेखाखण्ड $EF \parallel AB$ तथा E व F क्रमशः AD व BC पर हैं। क्या $EF \parallel DC$ होगी, यदि हाँ तो क्यों ?
- इस आकृति में कितने समलम्ब चतुर्भुज हैं। नाम लिखिए।



अन्तःखण्ड

जब दो सरल रेखाओं को तिर्यक रेखा काटती है तो तिर्यक रेखा का सरल रेखाओं के बीच कटा हुआ भाग **अन्तःखण्ड** कहलाता है। चित्र में AB, रेखा l एवं m के द्वारा रेखा n पर काटा गया अन्तःभाग है इसे अन्तःखण्ड AB कहेंगे।

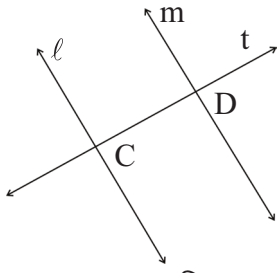
यह आवश्यक नहीं है कि दो रेखाएँ l एवं m समान्तर ही हों।



चित्र 3.10

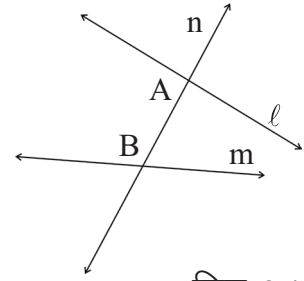
अभ्यास 3

1. निम्न चित्र में अन्तःखण्ड की पहचान कर रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए



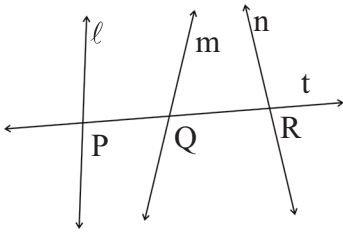
चित्र 3.11

अन्तःखण्ड _____



चित्र 3.12

अन्तःखण्ड _____



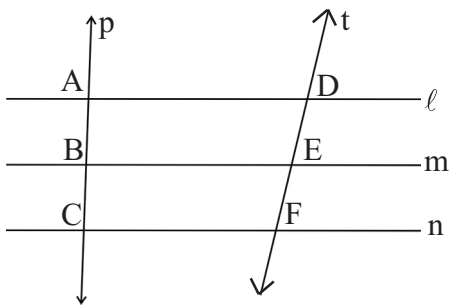
चित्र 3.13

अन्तःखण्ड _____

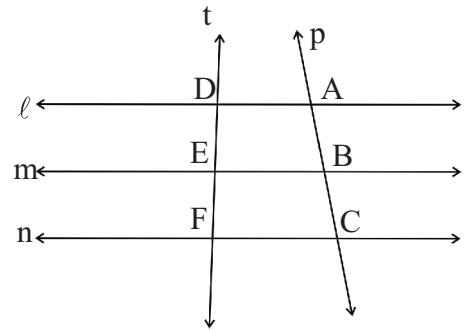
समान्तर रेखाएँ एवं समान अन्तःखण्ड

क्रियाकलाप 4

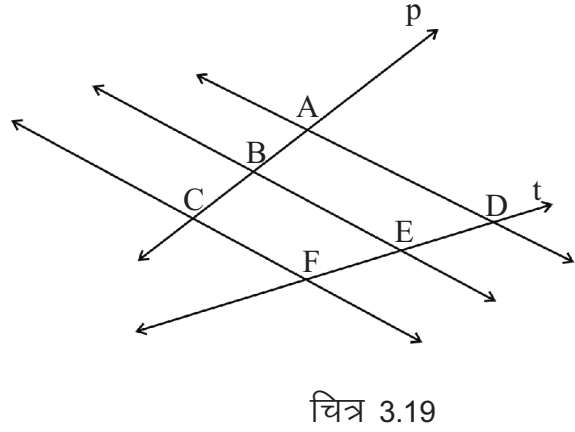
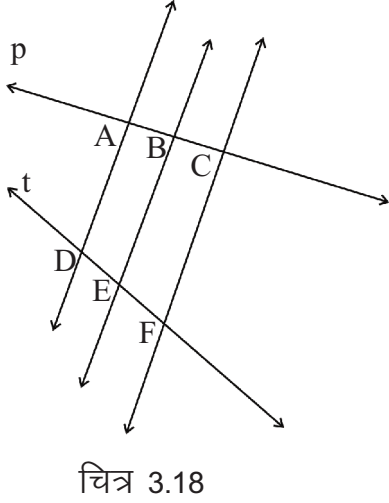
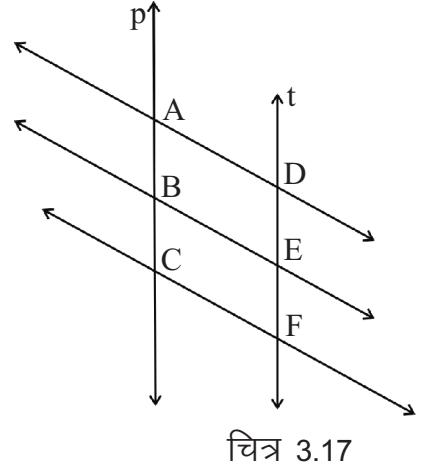
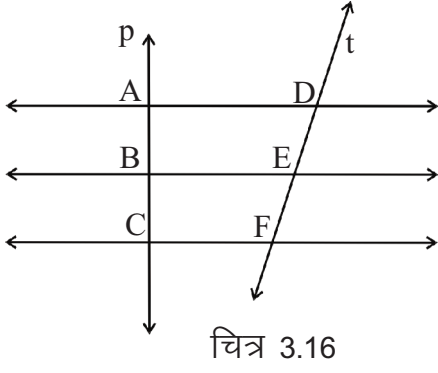
दिए गए चित्रों में रेखा P पर तीन बिन्दु A, B, C इस प्रकार लिए गए हैं कि $AB = BC$, इन बिन्दुओं से होती हुए तीन समान्तर रेखाएँ l, m व n खींची गई हैं। इन समान्तर रेखाओं को प्रतिच्छेद करती हुई एक तिर्यक रेखा t खींची गई है, जो इन्हें क्रमशः D, E व F पर काटती है। स्केल की सहायता से नापकर दी गई सारणी पूरा कीजिए—



चित्र 3.14



चित्र 3.15



सारणी 3.4

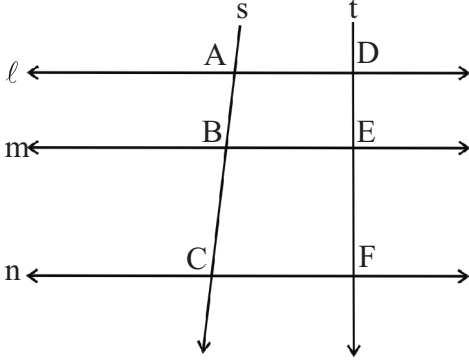
चित्र.क्र.	DE	EF	क्या DE = EF ?
3.14			
3.15			
3.16			
3.17			
3.18			
3.19			

उपरोक्त क्रियाकलाप में आपने पाया कि प्रत्येक स्थिति में $DE = EF$ प्राप्त होता है।

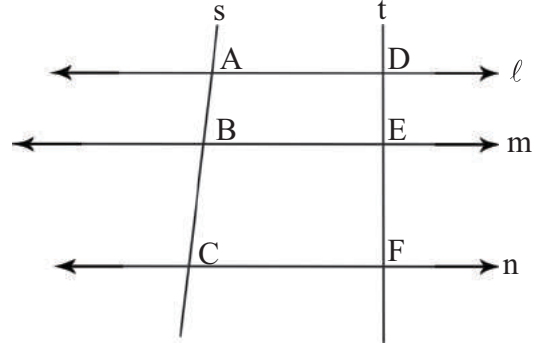
अतः हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि “तीन समान्तर रेखाओं पर एक तिर्यक रेखा समान अन्तःखण्ड काटती है तो दूसरी तिर्यक रेखा भी समान अन्तःखण्ड काटेगी।”

क्रियाकलाप 5.

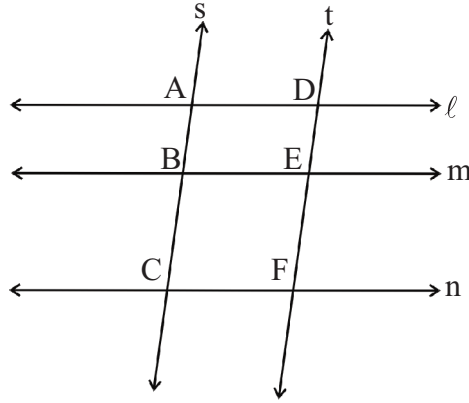
दिए गए चित्रों में $l \parallel m \parallel n$ है तथा तिर्यक रेखाएँ s व t तीनों समान्तर रेखाओं को A, B, C तथा D, E, F पर काटती हैं। स्केल की सहायता से सारणी में दिए गए मापों को नाप कर सारणी पूर्ण कीजिए?



चित्र 3.20



चित्र 3.21



चित्र 3.22

सारणी 3.5

क्र.सं.	चित्र क्र.	AB	BC	$\frac{AB}{BC}$	DE	EF	$\frac{DE}{EF}$	क्या $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$?
1.	3.20							
2.	3.21							
3.	3.22							

उपरोक्त क्रियाकलाप में प्रत्येक स्थिति में $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ प्राप्त होता है।

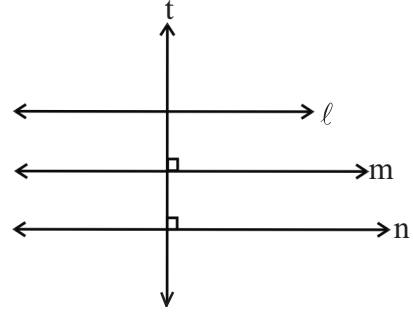
अतः "तीन समान्तर रेखाओं पर किसी एक तिर्यक रेखा के द्वारा काटे गए अंतःखण्डों का जो अनुपात होता है, वहीं अनुपात अन्य तिर्यक रेखाओं में भी होता है।"

प्रश्नावली 3.1

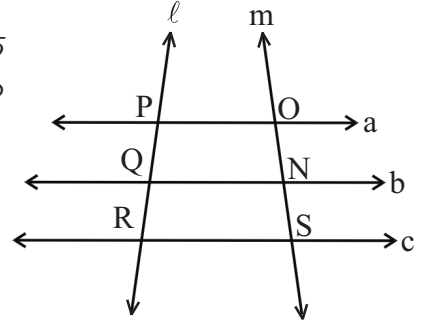
1. 6 सेमी. का एक रेखाखण्ड खींचकर इस पर कोई बिन्दु P लेकर 2.5 सेमी. दूरी पर एक समान्तर रेखा खींचिए।

2. दी गई आकृति में $l \parallel m$, $t \perp m$ एवं $t \perp n$ है, तो

- (i) क्या $m \parallel n$ है? क्यों?
(ii) क्या $l \parallel n$ है? क्यों?
(iii) क्या $t \perp l$ है? क्यों?

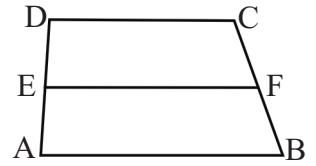


3. दिए गए चित्र में $a \parallel b \parallel c$ है तथा l व m दो तिर्यक रेखाएँ हैं यदि $PQ = QR$ हो, तो क्या $ON = NS$ है? क्यों?

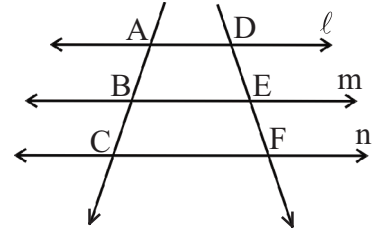


4. दी गई आकृति में $AB \parallel DC$, $EF \parallel AB$ और E रेखाखण्ड AD का मध्य बिन्दु है, तब

- (i) क्या $AB \parallel EF \parallel DC$ है? क्यों?
(ii) क्या F, रेखाखण्ड CB का मध्यबिन्दु है? क्यों?



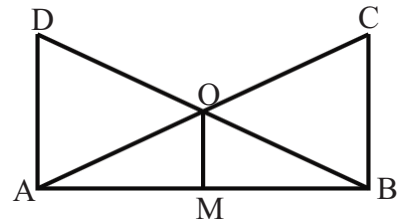
5. दी गई आकृति में $l \parallel m \parallel n$ है, तो क्या इनके अन्तःखण्डों का अनुपात बराबर होगा?



6. यदि DA, CB और OM सभी रेखाखण्ड AB पर लम्ब हैं जहाँ O रेखाखण्ड AC व DB का प्रतिच्छेद बिन्दु है। यदि $OA = 2.4$ सेमी. व $OC = 3.6$ सेमी. हो, तो

- (i) $\frac{AM}{BM}$ मान ज्ञात करो।

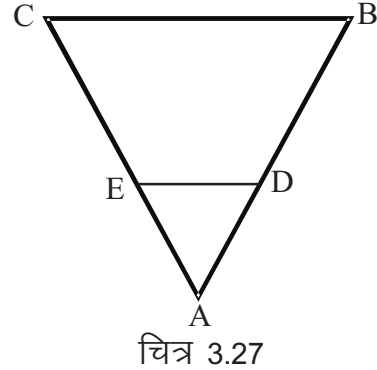
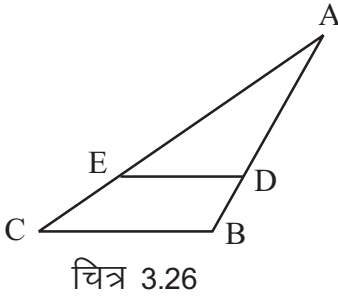
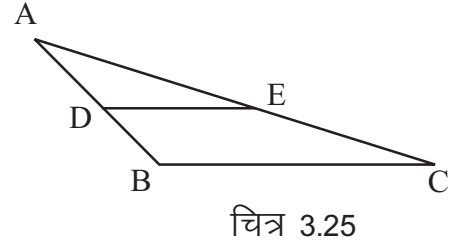
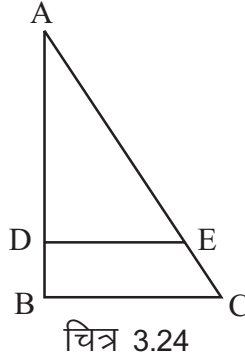
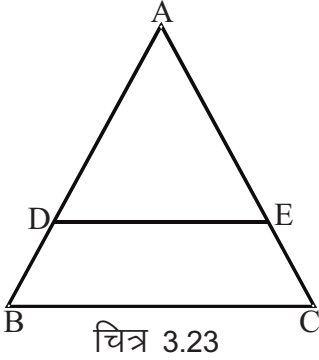
- (ii) यदि $BO = 3$ सेमी. तो DO का मान ज्ञात कीजिए।



त्रिभुज में एक भुजा के समान्तर खींची गई रेखा का अन्य दोनों भुजाओं से संबंध-

क्रियाकलाप 6.

नीचे दिए गए ABC में $DE \parallel BC$ है, जो AB को D तथा AC को E पर प्रतिच्छेद करती है। चित्र की सहायता से सारणी में आये तथ्यों के मान माप कर लिखिए।



सारणी 3.6

क्र.सं.	चित्र क्र.	AD	DB	$\frac{AD}{DB}$	AE	EC	$\frac{AE}{EC}$	क्या $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$?
1.	3.23							
2.	3.24							
3.	3.25							
4.	3.26							
5.	3.27							

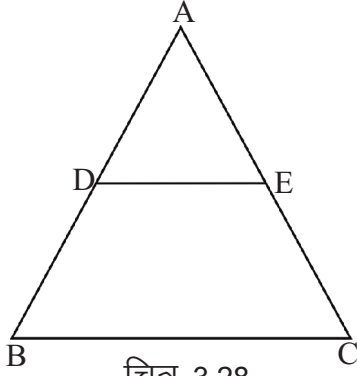
उपरोक्त क्रियाकलाप में प्रत्येक स्थिति में $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ प्राप्त होता है।

“अतः किसी त्रिभुज में एक भुजा के समान्तर खींची गई रेखा अन्य दोनों भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।”

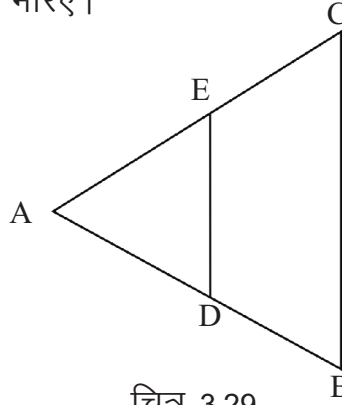
त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा का तीसरी भुजा से सम्बन्ध

क्रियाकलाप 7

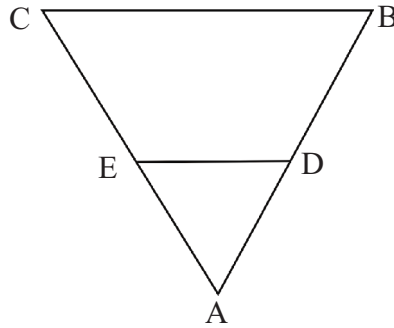
दिये गये $\triangle ABC$ में AB व AC के मध्य बिन्दु D व E हैं। DE पर बनने वाले कोण तथा B व C पर बने कोण को नाप कर सारणी में भरिए।



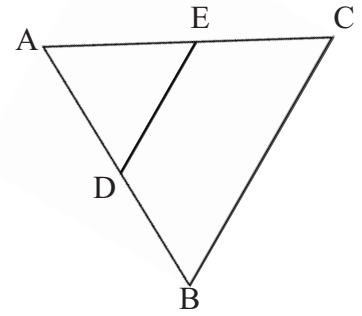
चित्र 3.28



चित्र 3.29



चित्र 3.30



चित्र 3.31

सारणी 3.7

क्र.सं.	चित्र क्र.	$\angle ADE$	$\angle B$	क्या $\angle ADE = \angle B$?	$\angle AED$	$\angle C$	क्या $\angle AED = \angle C$?
1.	3.28						
2.	3.29						
3.	3.30						
4.	3.31						

आप उपरोक्त क्रियाकलाप में पाते हैं कि $\angle ADE = \angle B$ तथा $\angle AED = \angle C$ है। पुनः इन कोणों को ध्यान से देखिए? इन कोणों को आप किस नाम से जानते हैं?

जब संगत कोण बराबर होते हैं तो रेखाओं में क्या सम्बन्ध होता है?

अतः "त्रिभुज में किन्हीं दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखा तीसरी भुजा के समान्तर होती है।"

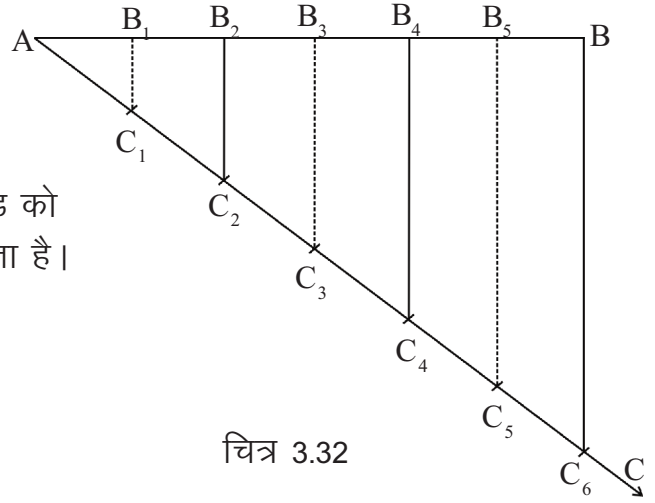
रेखाखण्ड का समान भागों में विभाजन

सलमा ने अशोक से कहा, क्या तुम 5 सेमी के एक रेखाखण्ड को तीन समान भागों में विभाजित कर सकते हो ?

अशोक ने कहा, क्यों नहीं उसने 5 को तीन से भाग दिया और $\frac{5}{3}=1.66..$ सेमी प्राप्त हुआ चूँकि स्केल से 1.66 सेमी मापा नहीं जा सकता है इसलिए उसने 1.6 सेमी तथा 1.6 सेमी के दो खण्ड किए तो तीसरा खण्ड 1.8 सेमी प्राप्त हुआ।

इस पर सलमा ने कहा, स्केल से मापकर किसी रेखाखण्ड को मनचाहे भागों में बाँटना तो सम्भव नहीं है, इसलिए कोई न कोई तरीका ऐसा होना चाहिए जिससे बिना मापे रेखाखण्डों को समान भागों में विभाजित किया जा सके।

आइए देखें, किस प्रकार समान्तर रेखाओं का उपयोग कर बिना स्केल की सहायता से मापन किये बिना किसी रेखाखण्ड को कई समान भागों में विभाजित किया जा सकता है।



चित्र 3.32

उदाहरण 1.

दिये गये रेखाखण्ड AB को 6 समान भागों में विभक्त करना।

रचना के पद

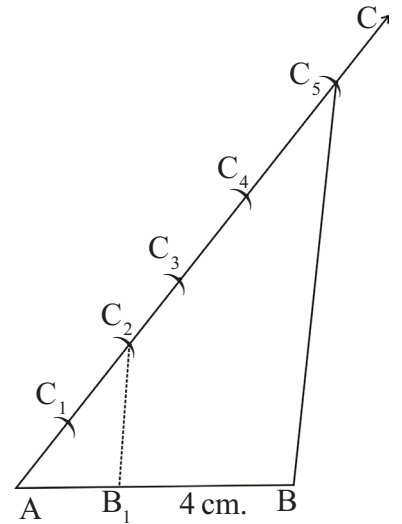
1. रेखाखण्ड AB के बिन्दु A पर न्यून कोण बनाते हुए AC किरण खींचें।
2. अब किरण AC के बिन्दु A से परकार की सहायता से समान दूरियों पर 6 भाग $AC_1, C_1C_2, C_2C_3, \dots, C_5C_6$ काटिये।
3. C_6 को B से मिलाइये और C_6B के समान्तर रेखाएँ क्रमशः C_5, C_4, \dots, C_1 से खींचिए जो रेखाखण्ड BA को $B_5B_4B_3 \dots B_1$ पर मिलती हैं।

इस प्रकार, AB रेखाखण्ड $AB_1, B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, B_4B_5, B_5B$, 6 समान भागों में विभक्त हो गया।

उदाहरण 2. 4 सेमी. लम्बाई का रेखाखण्ड लेकर इसे 2:3 के अनुपात में विभाजित कीजिए।

रचना के पद

1. 4 सेमी. लम्बाई लेकर रेखाखण्ड AB खींचिए उसके बाद AC किरण खींचिए जो AB पर न्यून कोण बनाए



चित्र 3.33

2. किरण AC को परकार की सहायता से समान माप के चाप काट कर अनुपात के योगफल $(2+3=5)$ अर्थात् पाँच बराबर भागों में चिह्नित कीजिए। जैसे- $AC_1, C_1C_2, \dots, C_4C_5$ ।
3. अब C_5B मिलाइये और उसके बाद C_5B के समान्तर एक रेखा AC को 2:3 में विभाजित करने वाले बिन्दु C_2 से खींचिए जो रेखाखण्ड AB को B_1 पर प्रतिच्छेद करे। इस प्रकार अभीष्ट अनुपात का रेखाखण्ड AB_1 व B_1B प्राप्त हुआ अर्थात् $AB_1 : B_1B = 2 : 3$.

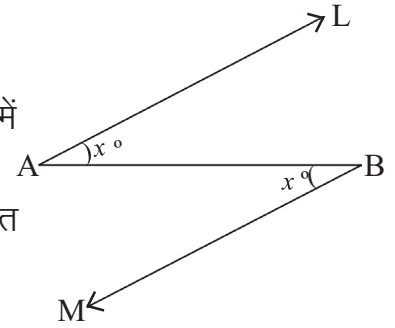
इसी प्रकार अब आप विभिन्न माप के रेखाखण्डों को लेकर मन चाहे अनुपात में विभाजित कीजिए तथा अपने साथियों को भी ऐसे ही प्रश्नों को हल करने दीजिए।

किसी रेखा के समान भाग करने की एक और विधि :

शैली को रेखाखण्डों को विभाजित करने में मज़ा तो आ रहा था परन्तु कभी-कभी उसे समान्तर रेखा खींचने में कुछ परेशानी हो रही थी। आइए एक और तरीका देखें जिससे समान दूरी पर समान्तर रेखाएँ भी बड़ी आसानी से खींची जा सकती हैं।

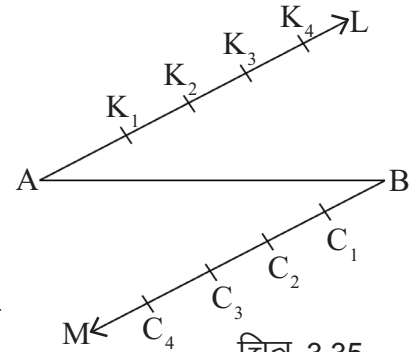
उदाहरण 3. AB रेखाखंड खींचकर उसको चार समान भागों में विभाजित करना।

- रचना 1.** AB रेखाखंड खींच कर उसके दोनों सिरों पर विपरीत दिशा में समान न्यून कोण बनाइए। यह ध्यान रहे कि दोनों न्यून कोण एक समान हों।



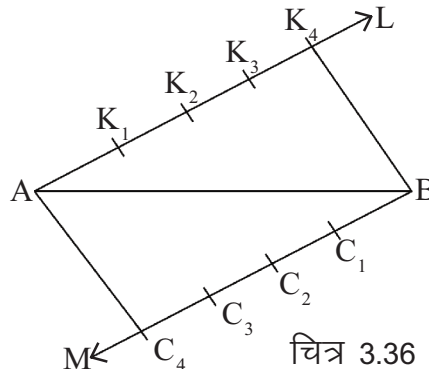
चित्र 3.34

रचना 2. परकार की सहायता से दोनों किरणों AL व BM पर 4-4 समान त्रिज्या के चाप काटिए।



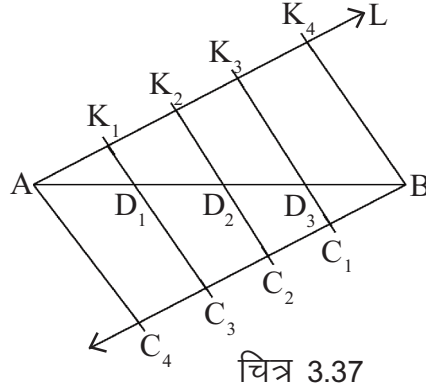
चित्र 3.35

रचना 3. अन्तिम बिन्दु K_4 व C_4 को क्रमशः B व A से मिलाइए



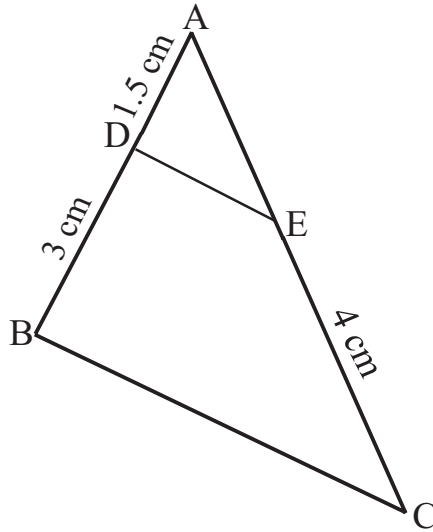
चित्र 3.36

रचना 4. फिर K_3 को C_1 से K_2 को C_2 से और K_1 को C_3 से मिलाइए
इस प्रकार AB पर व तीन बिन्दु D_1, D_2 एवं D_3 प्राप्त हुए यह बिन्दु रेखाखण्ड को चार समान भागों में विभाजित करता है।



प्रश्नावली 3.2

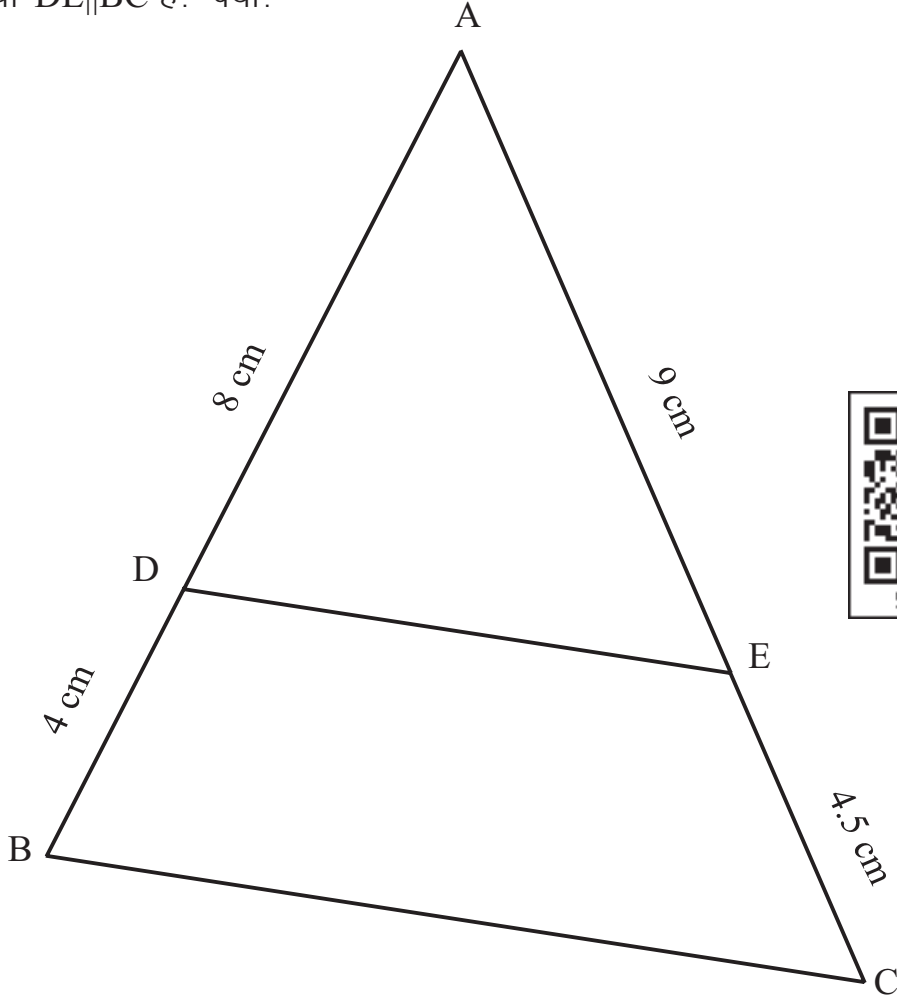
- दी गई आकृति में $DE \parallel BC$, यदि $AD = 1.5$ सेमी, $DB = 3$ सेमी और $EC = 4$ सेमी हो, तो AE का मान ज्ञात कीजिए।



- 7.5 सेमी. का एक रेखाखण्ड AB खींचिए और इसे तीन समान भागों में विभाजित कीजिए प्रत्येक भाग की लम्बाई नापिए।
- 8.4 सेमी. का एक रेखाखण्ड खींचिए और इसे सात समान भागों में विभाजित कीजिए प्रत्येक भाग की लम्बाई नापिए।
- 10 सेमी. के एक रेखाखण्ड को 2:3 के अनुपात में विभाजित कीजिए।
- 7 सेमी. का एक रेखाखण्ड AB खींचिए इस पर एक बिन्दु P इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि

$$AP = \frac{2}{5}AB \text{ हो।}$$

6. दी गई आकृति में $AD = 8$ सेमी, $BD = 4$ सेमी तथा $AE = 9$ सेमी., $EC = 4.5$ सेमी. हो, तो क्या $DE \parallel BC$ है? क्यों?



हमने सीखा

1. दो समान्तर रेखाओं के बीच की लम्बवत् दूरी सदैव समान रहती है।
2. एक रेखा के समान्तर खींची गई सभी रेखाएँ आपस में समान्तर होती हैं।
3. एक रेखा के विभिन्न बिन्दुओं से लम्बवत् खींची गई सभी रेखाएँ परस्पर समान्तर होती हैं।
4. तीन समान्तर रेखाओं पर एक तिर्यक रेखा समान अन्तःखण्ड काटती है तो अन्य तिर्यक रेखा भी समान अन्तःखण्ड काटेगी।
5. तीन समान्तर रेखाओं पर दो तिर्यक रेखाओं के अन्तःखण्डों का अनुपात समान होता है।
6. त्रिभुज में एक भुजा के समान्तर खींची गई रेखा अन्य भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।
7. त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समान्तर होती है।