अध्याय–7

अनुक्रमानुपाती एवं व्युत्क्रमानुपाती विचरण

DIRECT AND INVERSE VARIATION

9GKENI

भूमिका

कभी कभी ऐसी चर्चाएँ सुनने में आती हैं कि जिस वर्ष अधिक पानी गिरता है उस वर्ष तालाब और कुँओं में जल स्तर अधिक बढ़ जाता है। जनसंख्या बढ़ने के साथ पानी की खपत भी बढ़ जाती है। जैसे–जैसे तालाबों की संख्या कम हो रही है इससे जल इकट्ठा करने की क्षमता भी कम हो रही है। बिजली का उत्पादन कम होने से उद्योगों में वस्तुओं का उत्पादन कम हो जाता है।

चित्र–7.1

उपरोक्त कथनों पर विचार करें तो हम देखते हैं कि दो राशियाँ किस प्रकार एक दूसरे पर निर्भर है तथा किसी एक का मान बदलने से दूसरे का मान भी बदल जाता है।

इस प्रकार दो संबंधित राशियों में से एक राशि का मान बदलने पर दूसरी राशि का मान बदलने को गणित में **विचरण** कहते हैं तथा जब एक के बढ़ने से दूसरा बढ़े या एक के घटने से दूसरा घटे तो इस प्रकार के विचरण को **अनुक्रमानुपाती** विचरण कहते हैं।

आप भी अपने आसपास इस तरह के परिवर्तन से संबंधित उदाहरण सोचिए और लिखिए।

राजू ने लिखा कि यदि खेती की जमीन अधिक रहेगी तो फसल भी ज्यादा पैदा होगी अर्थात् यदि एक एकड़ में 24 बोरा धान उत्पन्न होता है तो 3 एकड़ में 72 बोरा धान उत्पन्न होगा।

सुधा ने अनाज की मात्रा और उसके मूल्य के बीच संबंध को लिखा। उसने लिखा कि यदि 1 किलो चावल का मूल्य 9 रु. है तो 2 किलो का मूल्य 18 रु. एवं 5 किलो चावल का मूल्य 45 रु. होगा।

इन उदाहरणों को पढ़कर मेरी ने कहा कि ''परन्तु हमेशा ऐसा तो नहीं होता कि दो राशियों में एक का मान बढ़ने से दूसरा भी एक निश्चित अनुपात में बढ़े अथवा एक का कम होने से दूसरा भी उसी अनुपात में कम हो। कभी–कभी एक के बढ़ने से दूसरा कम होता है या एक के कम होने से दूसरा

बढ़ता है,'' जैसे उद्योगों के बढ़ने से बेरोजगारी कम होती है, गर्मी ज्यादा होने से तालाबों में पानी का स्तर कम हो जाता है, ज्यादा मजदूर लगाने से काम के समाप्त होने में समय कम लगता है।

इस प्रकार के सम्बन्धों को अनुक्रमानुपाती सम्बन्ध तो नहीं कहेंगे, फिर उन्हें क्या कहेंगे?

चित्र–7.2

राजू, मेरी की बात को ध्यान से सुन रहा था, उसने कहा ''अनुक्रमानुपात में दो परस्पर सम्बन्धित मानों में एक के बढ़ने से दूसरा बढ़ता है या एक के कम होने से दुसरा घटता है परन्तु जब एक के घटने से दूसरा बढ़े या एक के बढ़ने से दूसरा घटे अर्थात् अनुक्रमानुपात का उल्टा हो तो क्या इसे **व्युत्क्रमानुपात** कह सकते हैं?

राजू ने ठीक सोचा अनुक्रमानुपात के विपरीत विचरण को **व्युत्क्रमानुपात** कहते हैं। आइए, पहले अनुक्रमानुपाती विचरण को कुछ और उदाहरणों से समझें।

9GUAQ6

अनुक्रमानुपाती विचरण

उदाहरण 1. 5 पेनों का मूल्य 20 रू. है तो क्या आप बता सकते हैं कि उसी प्रकार के 10, 15, 20, 25 और 30 पेनों का मूल्य कितना होगा?

हल यदि पेनों की संख्या को x तथा संगत मूल्य को y से व्यक्त करें तो, **ऐकिक विधि** से इस उदाहरण को हल करके निम्नांकित सारणी बना सकते हैं।

पेनों की संख्या x	5	10	15	20	25	30
पेनों का मूल्य (रू.में) y	20	40	60	80	100	120
अनुपात $\frac{x}{y}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{10}{40}$	$\frac{15}{60}$	$\frac{20}{80}$	$\frac{25}{100}$	$\frac{30}{120}$
अनुपात $\frac{x}{y}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

उपर्युक्त सारणी से स्पष्ट है कि जैसे–जैसे पेनों की संख्या बढ़ रही है वैसे–वैसे उनके संगत मूल्य भी बढ़ रहे हैं। किन्तु प्रत्येक स्थिति में पेनों की संख्या और उनके संगत मूल्य का अनुपात एक समान (यहाँ ¼) रहता है। इस प्रकार के पेनों को संख्या में वृद्धि से पेनों की मूल्य में आनुपातिक वृद्धि को **अनुक्रमानुपाती विचरण** कहते हैं।

क्रियाकलाप–1

नीचे सारणी में कुछ गेदों के संख्या के लिए उनके मूल्य दिए गए है, इस आधार पर सारणी के खाली खण्डों को भरिए एवं सारणी के नीचे दिए गऐ प्रश्नों का जवाब ढूँढिए।

गेंदों की संख्या x	10	6	4	3	2	1
मूल्य (रू.में) y	30			9		3
अनुपात $\frac{x}{y}$	$\frac{10}{30}$			$\frac{3}{9}$		$\frac{1}{3}$
अनुपात $\frac{x}{y}$	$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$

(1) 6 गेदों का मूल्य क्या है? (2) 4 गेंदो का मूल्य क्या हैं?

(3) 2 गेंदों का मूल्य क्या है?

(4) गेंदो की संख्या और मूल्य के बीच में कौन सा अनुपात है?

यहाँ गेंदों की संख्या घटने से उनका संगत मूल्य एक स्थिर अनुपात में घट रहा है। अर्थात् गेंदों की संख्या व उनके संगत मूल्य साथ–साथ बदल रहे हैं तथा उनका अनुपात एक समान या 1/3 है अतः इनके बीच के संबंध को अनुक्रमानुपाती सम्बन्ध कहेंगे।

क्रियाकलाप–2

नीचे दी गई सारणी में प्रत्येक x के लिए एक y का मान दिया गया है उनमें से किन–किन मानों के बीच अनुक्रमानुपाती सम्बन्ध है, उन्हें छाँट कर लिखिए।

x	4	9	12	15	20	7	13
y	28	63	72	105	100	49	91
$\frac{x}{y}$	–––	–––	–––	–––	–––	–––	–––

अपने दैनिक जीवन से संबंधित अनुक्रमानुपाती विचरण के पाँच उदाहरण सोचकर लिखिए।

जिन दो चरों में अनुक्रमानुपाती विचरण का संबंध होता है, उनके बीच का अनुपात सदैव एक समान होता है। प्राप्त समान अनुपात को स्थिरांक या अचर राशि कहते हैं।

अर्थात् यदि x और y अनुक्रमानुपात में विचरण करते हैं तो $\frac{x}{y} = k$

यदि वही अनुपात x_1 और y_1 तथा x_2 और y_2 के बीच भी हो तो $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = k$ होगा।

क्रियाकलाप–3

यदि x और y के बीच अनुक्रमानुपाती सम्बन्ध हों, तो निम्नांकित सारणी में रिक्त स्थानों को भरिए–

क्र.स.	x	y	$\frac{x}{y}$
(1)	3	18	....
(2)	25	....	$\frac{1}{6}$
(3)	9	....	$\frac{1}{6}$

क्र.सं.	x	y	$\frac{x}{y}$
(4)	....	24	$\frac{1}{6}$
(5)	7	42	....
(6)	....	66	$\frac{1}{6}$

उदाहरण 2. यदि 3 किग्रा. गेहूँ का मूल्य 36 रु. है तो 18 किग्रा. गेहू का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हलः चूंकि गेहूँ की मात्रा बढ़ने से संगत मूल्य भी बढ़ रहा है। अतः यहाँ अनुक्रमानुपाती विचरण का सम्बन्ध है।

माना कि 18 किग्रा. गेहूँ का मूल्य x रु. है।

तो इसे हम निम्नांकित सारणी के रूप में लिखते हैं–

गेहूँ की मात्रा (किग्रा में)	3	18
मूल्य (रू. में)	36	x

यहाँ 18 और x के बीच वही अनुपात होनी चाहिए जो 3 और 36 के बीच है या

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$$

$$\therefore \quad \frac{3}{36} = \frac{18}{x}$$

या $3 \times x = 18 \times 36$ (तिर्यक गुणा से)

या $x = \frac{18 \times 36}{3}$

∴ $x = 216$ रु.

अर्थात् 18 किग्रा. गेहूँ का मूल्य 216 रू. है।

उदाहरण 3. एक रेलगाड़ी 2 घण्टे में 120 किमी. दूरी तय करती है। उसी चाल से वह 5 घण्टे में कितनी दूरी तय करेगी?

हलः चूंकि समय में वृद्धि के साथ तय की गई दूरी भी अधिक होगी, अतः यहाँ अनुक्रमानुपाती विचरण का सम्बन्ध है।

माना कि 5 घंटे में x किमी. दूरी तय करेगी।

तो उसे हम निम्नांकित सारणी के रूप में लिख सकते हैं–

समय (घण्टे में)	2	5
तय की गई दूरी (किमी. में)	120	x

यहाँ 5 और x के बीच वही अनुपात होनी चाहिए, जो 2 और 120 के बीच है।

या $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$

∴ $\frac{2}{120} = \frac{5}{x}$

या $2 \times x = 5 \times 120$ (तिर्यक गुणा से)

या $x = \frac{5 \times 120}{2}$

∴ $x = 300$ किमी.

अर्थात् वह रेलगाड़ी 5 घण्टे में 300 किमी. दूरी तय करेगी।

उदाहरण 4. यदि 4 घण्टे काम करने पर 32 रू. मजदूरी मिलती हो, तो 7 घण्टे काम करने पर कितनी मजदूरी मिलेगी?

हलः चूंकि अधिक समय काम करने पर अधिक मजदूरी मिलेगी, अतः यहाँ अनुक्रमानुपाती विचरण का संबंध है।

माना कि 7 घण्टे काम करने पर x रू. मजदूरी मिलेगी। तो सारणी इस प्रकार होगी–

समय (घण्टे में)	4	7
मजदूरी (रूपये में)	32	x

यहाँ 7 और x के बीच वही अनुपात होनी चाहिए, जो 4 और 32 के बीच है।

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$$

$\therefore$ $\frac{4}{32} = \frac{7}{x}$

या $4 \times x = 7 \times 32$ (तिर्यक गुणा से)

या $x = \frac{7 \times 32}{4}$

$\therefore$ $x = 56$ रुपये

अर्थात् 7 घण्टे काम करने पर 56 रुपये मज़दूरी मिलेगी।

उदाहरण 5. यदि कागज के 6 पत्रों का भार 45 ग्राम हो, तो ऐसे कितने पत्रों का भार $1\frac{1}{2}$ किग्रा. होगा?

हलः चूंकि पत्रों की संख्या बढ़ने से उसका भार भी उसी अनुपात में बढ़ेगा, अतः यहाँ अनुक्रमानुपाती विचरण का संबंध है।

माना कि x पत्रों का भार $1\frac{1}{2}$ किग्रा. या 1500 ग्राम है।

(यहाँ पर भार को समान इकाइयों (ग्राम) में बदला गया है)

सारणी इस प्रकार होगी–

पत्रों की संख्या	6	x
भार (ग्राम में)	45	1500

यहाँ x और 1500 के बीच वही अनुपात होना चाहिए, जो 6 और 45 के बीच है।

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$$

$\therefore$ $\frac{6}{45} = \frac{x}{1500}$

या $6 \times 1500 = 45 \times x$ (तिर्यक गुणा से)

या $\frac{6 \times 1500}{45} = x$ या $x = \frac{6 \times 1500}{45}$

$\therefore$ $x = 200$ पत्र

अर्थात् 200 पत्रों का भार $1\frac{1}{2}$ किग्रा. होगा।

प्रश्नावली 7.1

प्र.1 नीचे दी गई किन सारणियों में x और y अनुक्रमानुपात में विचरण करते हैं? स्थिरांक का मान भी ज्ञात कीजिए।

सारणी (i)

x	7	9	13	21	25	30	41
y	21	27	39	63	75	90	123

सारणी (ii)

x	2.5	7.5	11	17.5	19
y	2.5	7.5	11	17.5	19

सारणी (iii)

x	5	6	7	8	9	11
y	25	24	35	40	50	66

सारणी (iv)

x	1	2	3	4	5
y	2	1	2/3	½	2/5

प्र.2 निम्नांकित अनुक्रमानुपाती विचरण सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

मजदूरों की संख्या	1	2	....	4	5	....
मजदूरी (रूपये में)	50	....	150	200	....	300

प्र.3 निम्नांकित सारणी में x और y अनुक्रमानुपात में विचरण करते हैं। स्थिरांक k का मान ज्ञात कीजिए–

x	2	4	8	16	32
y	14	28	56	112	224
$k = \frac{x}{y}$	....	....	....	....	....

प्र.4 एक कार 3 घण्टे में 600 किमी. चलती है, तो 5 घण्टे में कितनी दूरी चलेगी?

प्र.5 यदि x और y परस्पर अनुक्रमानुपात में विचरण करते हैं, तो निम्नलिखित सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

x	4	24	....	....	44	52
y	10	......	70	90	....	....

प्र.6 निम्नलिखित अनुक्रमानुपाती विचरण सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

समय (मिनटों में)	3	4	–	25	–
तय की गई दूरी (किमी. में)	–	48	84	–	1860

प्र.7 निम्नलिखित में से कौन–कौन सी राशियाँ अनुक्रमानुपात में विचरती हैं ?

(i) वस्तुओं की संख्या और उनका मूल्य

(ii) कक्षा–7 वीं के गणित की किताबों की संख्या और उनका मूल्य

(iii) खेत का क्षेत्रफल और उसका मूल्य

(iv) दूध की लीटर में मात्रा और उसका मूल्य

(v) श्रमिकों की संख्या और कार्य समाप्त होने में दिनों की संख्या

(vi) चाल और समय जबकि तय की गई दूरी वही रहे।

प्र.8 समान मूल्य वाले 15 टिकटों का मूल्य 18 रु. है। 72 रुपये में उसी मूल्य वाले कितने टिकट खरीदे जा सकते हैं?

प्र.9 एक कार 48 लीटर पेट्रोल में 432 किलोमीटर चलती है। 20 लीटर पेट्रोल में वह कितनी दूरी चलेगी?

प्र.10 2 दर्जन संतरे का मूल्य 48 रू. है। 108 संतरे का मूल्य ज्ञात कीजिए।

प्र.11 एक मशीन 5 मिनट में 200 पन्ने छापती है। उसी प्रकार 2×10^3 पन्नों को छापने में कितना समय लगेगा?

प्र.12 एक साइकिल चालक 3 घण्टे में 12 किमी. चलता है। कितने घण्टे में वह 20 किमी. की दूरी तय करेगा?

प्र.13 25 मजदूरों की मजदूरी 1250 रूपये है। 40 मजदूरों के लिए कितनी मजदूरी चाहिए?

प्र.14 एक मजदूर को 13 दिनों के काम के लिए 806 रूपये मिलता है। यदि उसे 1798 रूपये मिले, तो बताइये कि उन्होंने कितने दिनों तक काम किया?

प्र.15 100 मीटर की दूरी तय करने में नम्रता 1225 कदम चलती हैं 2835 कदम चलने पर वह कितनी दूरी तय करेगी?

प्र.16 1000 रू. का सामान बेचने पर एक दलाल को 73 रू. कमीशन मिलता है। 100 रू. का सामान बेचने पर उसे कितना कमीशन मिलेगा?

प्र.17 यदि कागज के 500 पत्रों की मोटाई 3.5 सेमी है, जो उस कागज के 275 पत्रों की मोटाई ज्ञात कीजिए।

प्र.18 एक व्यक्ति 1 मिनट में 180 शब्द पढ़ सकता है, तो 768 शब्द पढ़ने में उसे कितना समय लगेगा?

प्र.19 सुनीता एक घंटे में 1080 शब्द टाइप करती है। इसके टाइप करने की दर शब्द प्रति मिनट में ज्ञात कीजिए।

प्र.20 25 मजदूर एक सप्ताह में 7.5 किमी लम्बी सड़क बनाते हैं। कितने मजदूर एक सप्ताह में 10.2 किमी. लम्बी सड़क तैयार कर लेंगे?

प्र.21 10 बोरी सीमेंट का वजन 4.50 क्विंटल है। ऐसी ही 35 बोरियों का वजन बताइये।

प्र.22 एक कार 60 किमी. प्रति घण्टा की चाल से चलती है। नीचे दी गई सारणी में तय की गई दूरियाँ और समय अनुक्रमानुपाती विचरण में दिये गये हैं तो दूरी तथा समय का सही सम्बन्ध जोड़िए–

	दूरी (किमी.)	समय (घण्टे में)
(i)	120	(a) 3
(ii)	180	(b) 2
(iii)	210	(c) 4
(iv)	240	(d) 3½

व्युत्क्रमानुपाती विचरण

9H46RT

दैनिक जीवन में हम कुछ स्थानों पर यह देखते हैं कि एक राशि के बढ़ने

चित्र–7.3

से दूसरी राशि एक स्थिर अनुपात में घटने लगती है अथवा पहली राशि के घटने से दूसरी राशि एक स्थिर अनुपात में बढ़ने लगती है। इस प्रकार के आनुपातिक सम्बन्धों को **व्युत्क्रमानुपात** कहते है।

आइए, एक उदाहरण देखें–

एक सड़क पर मिट्टी डालने के काम को पूरा करने के लिए आवश्यक मजदूरों और दिनों की संख्या नीचे सारणी में दी हुई हैं–

मजदूरों की संख्या (x)	5	10	15	20	30
दिनों की संख्या (y)	60	30	20	15	10

ऊपर सारणी में मजदूरों की संख्या (x) है तथा दिनों की संख्या (y) है क्या आप प्रत्येक x के लिए दिए गए y के मध्य कोई सम्बन्ध प्राप्त कर सकते हैं? जो x, y के प्रत्येक मान के लिए स्थिर हैं।

उदाहरण को देखकर आशु सोच रही थी कि मजदूरों की संख्या दुगनी होने पर दिनों की संख्या आधी हो गई तथा आगे मजदूरों की संख्या तीन गुनी हो जाने पर दिनों की संख्या 1/3 गुनी हो गई। उसी प्रकार मजदूरों की संख्या यदि 10 गुनी कर दी जाए तो दिनों की संख्या 1/10 गुनी हो जायेगी। यदि x और y के मानों को गुणा किया जाए तो एक स्थिरांक प्राप्त होगा। जिस प्रकार अनुक्रमानुपाती सम्बन्ध में $\frac{x}{y}$ या x:y स्थिरांक होता है उसी प्रकार यहाँ $x \times y$ या $\frac{x}{1/y}$ या $x:\frac{1}{y}$ स्थिरांक होता है। जो कि अनुक्रमानुपात का व्युत्क्रम है इसलिए हम इसे व्युत्क्रमानुपात कहते हैं।

क्या आप आशु से सहमत है? यहाँ हम पाते है कि मजदूरों की संख्या जिस अनुपात में बढ़ती है, ठीक उसके उल्टे या विपरीत अनुपात में दिनों की संख्या घटती है और जिस अनुपात में मजदूरों की संख्या घटती है, ठीक उसके उल्टे या विपरीत अनुपात में दिनों की संख्या बढ़ती है। ऐसे अनुपात को विलोम अनुपात या **व्युत्क्रमानुपात** कहते हैं। जैसे उपरोक्त उदाहरण में मजदूरों की संख्या और दिनों की संख्या में व्युत्क्रमानुपात है।

अर्थात् दोनों राशियों में विचरण व्युत्क्रम अनुपात में है।

क्रियाकलाप–4

एक यात्री गाड़ी 12 किमी./घण्टा की चाल से चलकर कोई दूरी 4 घण्टे में तय करती है। बताइए–

(i) चाल बढ़ाकर 24 किमी./घण्टा कर देने से उस दूरी को पार करने में कितना समय लगेगा?

(ii) चाल बढ़ाकर 36 किमी./घण्टा कर देने से उस दूरी को पार करने में कितना समय लगेगा?

साथ ही निम्नांकित सारणी को भी पूर्ण करें–

चाल (किमी/घण्टा में) क्रमशः बढ़ाने पर	12	24	36	48
समय (घण्टे में)	4	.....	.....	.....
चाल × समय = दूरी	48	48	48	48

निष्कर्ष : चाल बढ़ाने पर समय .... लगता है।

चाल किमी प्रतिघंटा में क्रमशः कम करने पर	48	32	16	6
समय (घंटे में)	1	.....	.....	.....
चाल × समय = दूरी	48	.....	.....	.....

निष्कर्ष– चाल .... होने पर समय अधिक लगता है।

आप भी दैनिक जीवन से संबंधित ऐसे पांच उदाहरण लिखिए, जो परस्पर व्युत्क्रम अनुपात में हो।

आइए, एक और उदाहरण देखें:– प्रतिदिन 16 पृष्ठ पढ़ने पर एक पुस्तक 15 दिनों में पूर्णतः पढ़ी जा सकती है। यदि प्रतिदिन 8 पृष्ठ पढ़ें, तो पुस्तक को पूर्णतः पढ़ने में कितने दिन लगेंगे? यदि 12, 15 तथा 24 पृष्ठ प्रतिदिन पढ़ें तो पुस्तक को कितने दिनों में पढ़ा जा सकता है।

यदि प्रतिदिन पढ़े गये पृष्ठों की संख्या x तथा पढ़ने में लगे संगत दिनों की संख्या y से व्यक्त करें, तो हल करने से प्राप्त उत्तरों को निम्नानुसार सारणी में लिखा जा सकता है–

पृष्ठों की संख्या (x)	16	8	12	15	24
दिनों की संख्या (y)	15	30	20	16	10

यहाँ $\frac{1}{y} = \frac{1}{15} = \frac{1}{30} = \frac{1}{20} = \frac{1}{16} = \frac{1}{10}$

$$x:\frac{1}{y} = \frac{x}{1/y} = \frac{16}{1/15} = \frac{8}{1/30} = \frac{12}{1/20} = \frac{15}{1/16} = \frac{24}{1/10}$$

मानक रूप में $x \times y = 16\times15 = 8\times30 = 12\times20 = 15\times16 = 24\times10$

$=240 \quad =240 \quad =240 \quad =240 \quad =240$

$$x:\frac{1}{y} = x\Big/\frac{1}{y} = xy = 240 = k$$ (माना)

यहाँ पृष्ठों की संख्या, दिनों की संख्या के व्युत्क्रम अनुपात में है। चूँकि पृष्ठों की संख्या के प्रत्येक मान के लिए आवश्यक दिनों की संख्या के मध्य व्युत्क्रम अनुपाती संबंध हर जगह एक स्थिर मान देता है। इसलिए पृष्ठों की संख्या के सभी दिनों की संख्याओं के संगत मानों के व्युत्क्रम समानुपाती है। दूसरे शब्दों में कह सकते हैं कि पृष्ठों की संख्या x और संगत दिनों की संख्या y का गुणनफल एक नियत राशि है अर्थात् $xy=k$

अब यदि xy के एक से अधिक मान k के बराबर हैं तो वे आपस में भी बराबर होंगे $x_1y_1=x_2y_2$

निष्कर्ष: हम पाते हैं कि **"जब दो चर राशियों में परस्पर इस प्रकार का संबंध हो कि उनमें से एक राशि का मान बढ़ाने से दूसरी राशि का मान कम हो या पहली राशि का मान कम करने से दूसरी राशि का मान बढ़ता है तथा प्रत्येक स्थिति में दोनों राशियों का गुणनफल नियत रहे, तो उनके बीच के सम्बन्ध को व्युत्क्रमानुपाती विचरण कहते हैं।"**

गणितीय रूप में, यदि x और y व्युत्क्रमानुपाती विचरण में हो तो $\boxed{xy = k}$

यदि x के दो मान x_1 एवं x_2 के लिए y के दो संगत मान y_1 एवं y_2 हो तो $\boxed{x_1y_1=x_2y_2}$

क्रियाकलाप–5

नीचे दी गई किन सारणियों में x और y व्युत्क्रमानुपाती विचरण में है–

(i)

x	6	2	3	18
y	3	9	6	1

(ii)

x	40	20	16	10	2.5
y	2	4	5	8	32

(iii)

x	10	5	2	4
y	3	6	15	8

(iv)

x	9	10	12	15
y	5	4.5	3.75	3

क्रियाकलाप–6

यदि x और y व्युत्क्रमानुपात में विचरण करते हैं, तो निम्नांकित सारणी में आवश्यकतानुसार रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

(i)

x	9	18	20	---	30
y	4	---	---	1.5	----

(ii)

x	16	8	--	---
y	3	---	12	24

(iii)

x	20	50	25	----
y	---	4	----	5

आइए, व्युत्क्रमानुपाती विचरण के कुछ उदाहरणों को देखें–

उदाहरण 6. 12 मजदूर एक दीवार को 10 दिन में बना सकते हैं। उसी दीवार को 20 मजदूर कितने दिनों में बना लेंगे?

हल चूंकि मजदूरों की संख्या बढ़ाने से काम पूरा होने में कम समय लगेगा, अतः यहाँ व्युत्क्रमानुपाती विचरण की स्थिति है।

माना कि 20 मजदूर उस दीवार को y दिनों में बना लेंगे। तो सारणी इस प्रकार होगी–

मजदूरों की संख्या(x)	12	20
दिनों की संख्या (y)	10	y

व्युत्क्रमानुपाती विचरण में–

$$x_1y_1 = x_2y_2$$
$$12\times10 = 20\times y$$
$$\Rightarrow \frac{12\times10}{20} = y$$
$$\Rightarrow \quad 6 = y$$
$$\Rightarrow \quad y = 6$$

अर्थात् 20 मजदूर उस दीवार को 6 दिन में बना लेंगे।

उदाहरण 7. एक छात्रावास में 200 छात्रों के लिए 24 दिन की खाद्य सामग्री है। यदि छात्रावास में 100 छात्र और शामिल हो जाएँ, तो खाद्य सामग्री कितने दिनों में समाप्त हो जाएगी?

हल 100 छात्रों के और शामिल हो जाने से छात्रावास में छात्रों की संख्या= 200+100 =300

चूंकि खाद्य सामग्री निश्चित है और छात्रों की संख्या बढ़ने से खाद्य सामग्री कम समय में समाप्त हो जाएगी, अतः यहाँ व्युत्क्रमानुपाती सम्बन्ध है।

माना कि खाद्य सामग्री y दिनों में समाप्त हो जाएगी। तो सारणी इस प्रकार होगी–

छात्रों की संख्या (x)	200	300
दिनों की संख्या (y)	24	y

व्युत्क्रमानुपाती विचरण में –

$$x_1y_1 = x_2y_2$$
$$\therefore \quad 200 \times 24 = 300 \times y$$
या $$\frac{200\times24}{300} = y$$
या $$16 = y \Rightarrow y = 16$$

अर्थात् खाद्य सामग्री 16 दिनों में समाप्त हो जायेगी।

उदाहरण 8. शालू 12 किमी/घण्टा की औसत चाल से साइकिल चलाकर घर से स्कूल जाती है। वह 20 मिनट में स्कूल पहुँच जाती है। यदि वह 15 मिनट में स्कूल पहुँचना चाहे, तो उसकी औसत चाल क्या होनी चाहिए?

हल: चूंकि कम समय में स्कूल पहुँचने के लिए चाल बढ़ानी होगी, अतः यहाँ व्युत्क्रमानुपाती विचरण की स्थिति है।

माना कि अभीष्ट औसत चाल x किमी/घण्टा है।

तो यहाँ सारणी इस प्रकार होगी–

चाल (किमी./घण्टा में) (x)	12	x
समय (मिनटो में) (y)	20	15

व्युत्क्रमानुपाती विचरण में–

$$x_1y_1 = x_2y_2$$

या $12 \times 20 = x \times 15$

या $\frac{12\times20}{15} = x$

या $16 = x$

$\therefore$ $x = 16$ किमी/घण्टा

अर्थात् 15 मिनट में स्कूल पहुँचने के लिए शालू की औसत चाल 16 किमी/घण्टा होनी चाहिए।

प्रश्नावली 7.2

1. यदि x और y व्यत्क्रमानुपाती विचरण में हों, तो आवश्यकतानुसार रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

x	8	6	4	-----	36
y	9	12	-----	10	----

2. निम्नांकित विचरण सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

चाल (किमी/घण्टा में)	4	8	....	.....	64
लगा समय (मिनटों में)	.....	40	20	10	......

3. 10 मजदूर किसी काम को 2 दिन में करते हैं। उसी काम को 2 मजदूर कितने दिनों में करेंगे?

4. 45 मजदूर एक काम को 27 दिनों में पूरा करते हैं, तो कितने मजदूर उसी काम को 15 दिनों में पूरा करेंगे?

5. एक बस 30 किमी/घण्टा की चाल से 6 घण्टे में एक निश्चित दूरी तय करती है। उसी दूरी को वह बस किस चाल से केवल 4 घण्टे में तय कर लेगी?

6. 40 घोड़े एक क्विंटल चने को 7 दिनों में खाते हैं। कितने घोड़े उतने ही चने को 28 दिनों में खायेंगे?

7. एक छात्रावास में 300 छात्रों के लिए 15 दिनों की राशन सामग्री है। यदि अवकाश के कारण 200 छात्र बाहर चले जायें तो वह सामग्री कितने दिनों तक चलेगी?

8. एक छावनी में 700 सैनिकों के लिए 25 दिनों की पर्याप्त खाद्य सामग्री है। किन्तु कुछ और सैनिकों के आ जाने के कारण वह खाद्य सामग्री केवल 20 दिनों में समाप्त हो जाती है। बताइये कि बाद में छावनी में और कितने सैनिक आये?

9. एक व्यक्ति प्रतिदिन किसी पुस्तक के 8 पृष्ठों को पढ़कर उसे 15 दिनों में पूरा पढ़ लेता है।यदि वह प्रतिदिन 12 पृष्ठ पढ़े तो तो पूरे पुस्तक को वह कितने दिनों में पढ़ लेगा?

10. एक सैनिक शिविर में 105 सैनिकों के लिए 21 दिनों की रसद सामग्री है। यदि शिविर में 42 सैनिक और शामिल हो जाये, तो रसद सामग्री कितने दिनों में समाप्त हो जायेगी?

11. निम्नलिखित में से कौन–कौन सी व्युत्क्रमानुपात में विचरण करती है?

    (i) खरीदी गई पुस्तकों की संख्या और प्रत्येक पुस्तक की कीमत।

    (ii) बस द्वारा तय की गई दूरी और खपत पेट्रोल की कीमत।

    (iii) साइकिल द्वारा किसी निश्चित दूरी को पार करने में लगा समय और उसकी चाल।

    (iv) एक पुल बनाने में लगाये गये मजदूरों की संख्या और पुल बनने मे लगने वाला समय।

    (v) छात्रों की संख्या और प्रतिछात्र वितरित मिठाई का वजन। (यदि 40 किग्रा. मिठाई बाटनी है)।

    (vi) मजदूरी और कार्य के घण्टे।

    (vii) वस्तुओं की संख्या और उनका कुल मूल्य।

12 26 जनवरी को एक विद्यालय के 800 छात्रों में 100 ग्राम प्रति छात्र के हिसाब से मिठाई बांटी गई। उतनी ही मिठाई यदि 1000 छात्रों में बराबर–बराबर बांटी जाये, तो प्रत्येक छात्र को कितने ग्राम मिठाई मिलेगी?

13. जब एक नल एक घंटे में 640 लीटर पानी भरता है तो एक पानी टंकी को भरने में 10 घण्टे का समय लगता है। यदि उसी टंकी को दूसरे नल से 8 घण्टे में भरा गया हो, तो दूसरे नल ने प्रतिघंटा कितना पानी भरा?

हमने सीखा

1. जब दो चर राशियाँ इस प्रकार संबंधित हो कि एक चर का मान बढ़ने या घटने से दूसरे चर का मान भी उसी अनुपात में बढ़ या घट जाता है, तो वे अनुक्रमानुपाती कहलाती है।

2. जब दो चर राशियों x और y अनुक्रमानुपात में होती हैं तो उनका अनुपात एक स्थिरांक होता है अर्थात् $\frac{x}{y} = k$

3. यदि दो राशियाँ अनुक्रमानुपात में हों तथा एक राशि के दो मानों x_1 और x_2 के लिए दूसरी राशि के संगत मान क्रमशः y_1 एवं y_2 हों तो $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$

4. जब दो चर राशियाँ इस प्रकार संबंधित हों कि एक चर का मान बढ़ने (या घटने से) दूसरे चर के मान में उसी अनुपात में कमी (वृद्धि) हो तो राशियाँ व्युत्क्रमानुपात में होती हैं।

5. जब दो राशियाँ x और y व्युत्क्रमानुपात में होती हैं तो उनका गुणनफल एक स्थिरांक होता है, अर्थात् $x.y=k$ जहाँ k एक स्थिरांक है।

6. यदि दो राशियाँ व्युत्क्रमानुपात में हों तथा एक राशि के दो मानों x_1 और x_2 के लिए दूसरी राशि के संगत मान क्रमशः y_1 और y_2 हो तो

$$x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2$$

9HD2TG